GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVI

NUMĂRUL 1. — SEPTEMVRIE 1940

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SUMARUL

1. Lista Membrilor Societății „Gazeta Matematică".
2. Membrii decedați.
3. † Preduța Bungețeanu . . . . . *P. Sergescu.*
4. Proprietăți ale conicelor osculatoare la o curbă plană . . . . . *N. Abramescu.*
5. Premii, burse și publicații din veniturile Societății „Gazeta Matematică".
6. Note Matematice: 1 — 3.
7. Bibliografie.
8. Cereri.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 2144, 3167, 4279, 4342, 4935, 4936, 5036, 5109, 5232, 5297.
11. Exerciții: 1.
12. Probleme propuse: 3920, 4602, 5362 — 5376.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1940

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **D. Stoica**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: **4**85, **8**87, **10**00, 08, 56, **1**46, **2**70, 97, 99, **3**10, 67, **4**12, 50, **5**53, **6**50, **7**11, 64, **9**14, 29, 59, **20**04, 70, 74, **1**70, **3**38, **4**30, 39, 77, **5**77, 87, **6**07, 38, 55, 65, 84, **7**13, 17, 69, **8**14, 65, 86, **9**09, 12, 26, 36, 47, **30**69, 81, **1**27, 61, **2**08, 55, 98, **3**04, 10, 16, 18, 50, **4**05, 12, 24, 25, **5**22, 23, 33, 42, 45, 72, 73, **6**08, 27, 35, 47, 57, 81, 99, **7**33, 36, 93, **8**02, 29, 36, 44, 53, 64, 96, **9**09, 13, 20, 33, 44, 83, **40**10, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 70, 85, **1**02, 11, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, **2**06, 36, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 89, 90, **3**03, 15, 19, 20, 33, 37, 40, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 80, 84, 89, 93, 95, 96, **4**04, 12, 16, 26, 45, 49, 52, 68, 73, 80, 81, 86, 87, 89, 90, 92, **5**11, 13, 16, 34, 47, 58, 61, 87, 92, 98, **6**01, 02, 03, 05, 15, 30, 36, 41, 47, 57, 67, 70, 72, 75, 80, 85, 86, 90, 93, 98, **7**10, 34, 42, 49, 72, 91, **8**12, 39, 49, 79, 90, 94, **9**01, 05, 13, 14, 15, 20, 29, 37, 38, 44, 49, 62, 73, 74, 79, 81, 86, 91, 92, 97, **50**10, 22, 28, 37, 43, 45, 49, 59, 72, 73, 74, 76, 91, 93, 94, 95, 99, **1**05, 06, 17, 21, 23, 25, 26, 27, 29, 30, 37, 38, 39, 40, 41, 46, 47, 49, 57, 63, 65, 77, 78, 79, 84, 89, 93, 96, 97, **2**00, 04, 08, 11, 12, 20, 21, 25, 30, 37, 42, 48, 53, 70, 72, 74, 77, 79, 84, 86, 88, 89, 93, 94, 95, 98, **3**04, 06, 08, 09, 11, 14, 17, 18, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

GAZETA MATEMATICA

GAZETA MATEMATICA

FOAE LUNARĂ

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ŞI SPECIALE

PENTRU UZUL

ŞCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ŞI SUPERIOARE

VOLUMUL XLVI

15 SEPTEMVRIE 1940 — 15 AUGUST 1941

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1940

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIUNE LUNARĂ

PENTRU

MATEMATICI ELEMENTARE ȘI SPECIALE

PENTRU UZUL

ȘCOLILOR SECUNDARE, SPECIALE ȘI SUPERIOARE

VOLUMUL XLVI

1940

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAȚIONALĂ

1940

M. S. REGELE MIHAI I

Societatea „Gazeta Matematică", salutând cu sentimente de respect și devotament urcarea pe Tronul Regilor tuturor Românilor a Majestății Sale Regelui MIHAI I, Îi face călduroase urări de lungă și glorioasă Domnie.

LISTA MEMBRILOR
SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ"

DELEGAȚIUNEA SOCIETĂȚII PENTRU ANUL 1940 *)

C-DOR-ING. I. LINTEȘ, D. STOICA, AL. D. BUNESCU (Cassier)

PERSONALUL REDACȚIUNII „GAZETA MATEMATICĂ"

GENERAL GH. BUICLIU și I. IONESCU. Membri delegați pentru : cereri, diverse și suplimente.

O. N. ȚINO ajutat de GH. TH. GHEORGHIU și C. IONESCU-BUJOR. Raportori.

LT. C. IONESCU-ȚIU și C-DOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru : schimburi de reviste și primirea lor, reclamațiuni privitoare la tipărire, primirea și repartizarea manuscriselor destinate *Gazetei Matematice*.

GH. ILIESCU. Membru delegat pentru convocările lunare.

G. G. CONSTANTINESCU, GH. ILIESCU, C. IONESCU-BUJOR, LT. C. IONESCU-ȚIU, N. N. MIHĂILEANU și F. PĂSĂRICĂ. Membri delegați pentru corecturi și imprimarea revistei.

GENERAL GH. BUICLIU, G. G. CONSTANTINESCU, M. GHERMĂNESCU, COMANDOR I. LINTEȘ, O. N. ȚINO și COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru aritmetică.

D. BARBILIAN, P. BENEȘ, GH. DUMITRESCU, ADRIAN GHEORGHIU, VIRGIL GHIȚESCU, C. IONESCU-BUJOR, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, AL. ROȘU și G. D. SIMIONESCU. Membri delegați pentru geometrie.

I. S. ANTONIU, M. BOTEZ, GH. TH. GHEORGHIU, VIRGIL GHIȚESCU, H. P. IONESCU, LT. C. IONESCU-ȚIU, GENERAL GH. LITEANU, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU și O. N. ȚINO. Membri delegați pentru trigonometrie.

TH. ANGHELUȚĂ, G. G. CONSTANTINESCU, OTILIA GEORGESCU-ROEGEN, GH. TH. GHEORGHIU, V. GHIȚESCU, C. IONESCU-BUJOR, LT. C. IONESCU-ȚIU, H. P. IONESCU, AL. ROȘU și O. N. ȚINO. Membri delegați pentru algebra elementară.

I. ALEXIU, P. BENEȘ, M. BOTEZ, I. CHIȚULESCU, GH. DUMITRESCU, AL. NICULESCU și GH. D. SIMIONESCU. Membri delegați pentru geometrie descriptivă.

*) Societatea este administrată și reprezentată de o delegație alcătuită din doi membri și un cassier (Art. 14 din Statute).

I. S. ANTONIU, EM. BOTEA, GH. D. SIMIONESCU, AL. STOENESCU, C. C. TEODORESCU şi GABRIELA ŢIŢEICA. Membri delegaţi pentru mecanica elementară.

GENERAL GH. BUICLIU, G. G. CONSTANTINESCU, CPT. M. FOCŞENEANU, GH. TH. GHEORGHIU, C. IONESCU-BUJOR, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU şi O. N. ŢINO. Membri delegaţi pentru geometria analitică.

G. G. CONSTANTINESCU, C. IONESCU-BUJOR şi AL. STOENESCU. Membri delegaţi pentru cosmografie.

N. ABRAMESCU, TH. ANGHELUŢĂ, N. CIORĂNESCU, D. V. IONESCU, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, TIB. POPOVICI, O. N. ŢINO şi P. SERGESCU. Membri delegaţi pentru articole şi note de matematici superioare.

N. ABRAMESCU, I. IONESCU, V. MARIAN şi P. SERGESCU. Membri delegaţi pentru istoria matematicilor.

I. IONESCU, O. ONICESCU, P. SERGESCU, T. VESCAN şi GH. ZAPAN. Membri delegaţi pentru filosofia matematicei.

N. ABRAMESCU, TH. ANGHELUŢĂ, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, D. V. IONESCU, TIB. POPOVICIU, P. SERGESCU şi O. N. ŢINO. Membri delegaţi pentru probleme propuse de matematici superioare.

O. N. ŢINO. Membru delegat pentru clasarea problemelor propuse.

I. ALEXIU, GH. DUMITRESCU, V. GHIŢESCU, C. IONESCU-BUJOR, LT. C. IONESCU-ŢIU, N. N. MIHĂILEANU şi AL. NICULESCU. Membri delegaţi pentru exerciţii.

N. ABRAMESCU, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, AL. PANTAZI, TIBERIU POPOVICIU, GABRIELA ŢIŢEICA şi O. N. ŢINO. Membri delegaţi pentru chestiuni de examen.

GENERAL GH. BUICLIU, G. G. CONSTANTINESCU şi C. IONESCU-BUJOR. Membri delegaţi pentru alcătuirea tablei de materii.

C. IONESCU-BUJOR, LT. C. IONESCU-ŢIU, AL. ROŞU şi GH. D. SIMIONESCU. Membri delegaţi pentru cercetarea prealabilă a soluţiilor primite dela corespondenţi.

LOCOT. C. IONESCU-ŢIU. Bibliotecar.

N. ABRAMESCU, TH. ANGHELUŢĂ, I. S. ANTONIU, EM. BOTEA, M. BOTEZ, GENERAL GH. BUICLIU, G. G. CONSTANTINESCU, GH. DUMITRESCU, CPT. M. FOCŞENEANU, OTILIA GEORGESCU-ROEGEN, ADR. GHEORGHIU, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, V. GHIŢESCU, D. V. IONESCU, H. P. IONESCU, C. IONESCU-BUJOR, LT. C. IONESCU-ŢIU, COMANDOR I. LINTEŞ, GENERAL GH. LITEANU, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, AL. PANTAZI, TIBERIU POPOVICIU, AL. ROŞU, P. SERGESCU, GH. D. SIMIONESCU, AL. STOENESCU, O. N. ŢINO, COMANDOR GR. ZAPAN şi GABRIELA ŢIŢEICA. Membri delegaţi pentru cercetarea şi redactarea problemelor rezolvate.

I. BUŞILĂ şi AL. AL. ROŞU. Membri delegaţi pentru chestiuni fiscale.

MEMBRII

1	1922, Mart. 1*	ABASON ERNEST. Inginer-Şef. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. Doctor în Matematici. — Profesor la Politehnica „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Matei Voevod, 25. Bucureşti 4.
2	1907, Iulie 1	ABRAMESCU NICOLAE. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj.
3	1913, Oct. 7	ALACI V. Doctor în Matematici. — Profesor la Politehnica din Timişoara. — Str. Traian Lalescu, 1. Timişoara.
4	1937, Aug. 27	ALDEA N. N. Licenţiat în Matematici. — Str. Matei Voevod, 65. Bucureşti 4.
5	1938, Febr. 17	ALEXIU IULIAN. Inginer constructor. Licenţiat în Ştiinţe Matematice.— Inginer în Direcţiunea de poduri. Lucrări noui, Studii şi Construcţii. Asistent la Politehnica „Regele Carol II". — Str. Mihail Cornea 41. Bucureşti 2.
6	1940, Aug. 28	ANDONIE GH. Inginer de mine. Inspector Tehnic al Salinelor C. A. M. — Str. Braziliei, 18. Bucureşti 3.
7	1940, Febr. 8	ANDRONESCU PLAUTIUS. Doctor-Inginer. — Profesor, Politehnica Timişoara. — Str. Sevastopol, 30. Bucureşti 2.
8	1921, Noem. 4	ANGHELUŢĂ TH. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj.
9	1934, Febr. 21	ANTONIU CORNELIU. Inginer-Şef. — Şef de serviciu tehnic. Direcţiunea Generală a Drumurilor M. L. P. Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Str. C. Dissescu, 17. Bucureşti 2.
10	1928, Aug. 29	ANTONIU S. ION. Inginer Electromecanic, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Inginer Electrician, Diplomat al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris. — Inginer la Societatea de Gaz şi de Electricitate din Bucureşti. — Str. Aviator Th. Iliescu, 28. Tel. 29437. Bucureşti 3.
11	1931, Mart. 11	ARGHIRIADE EM. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Colegiul Naţional Sft. Sava. — Str. Banu Manta 77. Bucureşti.
12	1935, Febr. 13	ARMEANCA IOAN. Doctor în Matematici. — Astronom la Observatorul Astronomic Cluj. Profesor la Liceul Gh. Barițiu Cluj.
13	1921, Febr. 5	AVRAMESCU C. Inginer. — Subdirector în Direcţiunea Generală a Drumurilor. — Str. Barbu Delavrancea, 51. Bucureşti 2.
14	1940, Febr. 8	BĂDĂRĂU EUGEN. Doctor în Fizică. Profesor universitar. — Str. Academiei, 14. Et. II. Bucureşti.
15	1929, Aug. 28	BĂDESCU A. LUCA. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Director tehnic al Societăţii Comunale a Tramvaelor Bucureşti. — Şoseaua Jianu, 38. Bucureşti.
16	1936, Febr. 27	BĂDESCU RADU. Doctor în Matematici şi Docent al Universităţii din Geneva. — Profesor agregat la Facultatea de Ştiinţe, Universitatea din Cluj.

*) Data admiterii.

17	1924, Aug. 29	BAIDAFF IG. BERNARDO. Doctor în Matematici. — Buenos-Aires. Avenida de Mayo 560. Republica Argentina.
18	1940, Aug. 28	BĂLAN G. ŞTEFAN. Inginer Constructor, Asistent la Politehnica din Bucureşti. — Str. G-l Berthelot, 80. Bucureşti 2.
19	1911, Febr. 20	BANCIU I. Licenţiat în Matematici. — Str. Lucaci, 95. Bucureşti 3.
20	1927, Mai 11	BARBILIAN DAN. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitar. — Str. Carol Davila, 8. Bucureşti 6.
21	1940, Febr. 8	BENEŞ PAUL. Licenţiat în Matematici. — Profesor Secundar. Bibliotecar la Facultatea de Ştiinţe Bucureşti. — Str. Vaporul lui Asan, 13. Bucureşti.
22	1920, Ian. 10	BORNEANU GEORGE. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. Director General al Societăţii „Uzinele Chimice Române". — Str. Basarabia, 49. Bucureşti 2.
23	1938, Febr. 17	BOTEA G. EMIL Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Secţia construcţii. — Şef de secţie în Administraţia Comercială a Porturilor şi Comunicaţiilor pe Apă. — Aleea Alexandru, 11. Bucureşti
24	1935, Aug. 22	BOTEZ ST. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Profesor Liceul „Petre Rareş" din Piatra-Neamţ. — Str. I. Gh. Duca, 15. Piatra-Neamţ.
25	1920, Aug. 15	BRATU GH. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. — Profesor de Astronomie şi de Calcul diferenţial şi integral la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. Directorul Observatorului Astronomic din Cluj.
26	1926, Iunie 28	BRENER M. AVRAM. Inginer. — Str. Viitorului, 22. Bucureşti 3.
27	1910, Iunie 21	BRUCKNER VICTOR. Inginer Inspector General. — Str. Ing. Pandele Ţăruşanu, 7. Bucureşti 2.
28	1935, Noem. 7	BUCURESCU I. Cpt. Licenţiat în Matematici. — Absolvent al Secţiei de Radio-Comunicaţii dela Şcoala Politehnică Bucureşti. — Str. Aviator Iliescu, 31. Bucureşti 3.
29	1920, Ian. 10	BUDEANU I. C. Inginer dela Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele din Bucureşti. Şcoala Superioară de Electricitate din Paris. — Profesor la Politehnica „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Washington, 32. Parcul Bonaparte. Bucureşti 3.
30	1910, Apr. 3	BUICLIU GH. General/r. din Artilerie. — Fost Secretar general la Ministerul Apărării Naţionale. Însărcinat cu conferinţe la Politehnica „Regele Carol II".—Str. M. Cogălniceanu, 10. Bucureşti 2.
31	1918, Mai 9	BUJOREANU N. Inginer Inspector General. Directorul Podurilor C. F. R. — Str. Justinian, 17. Bucureşti 3.
32	1924, Ian. 30	BUNESCU D. AL. Inginer S. N. P. S. — Fost Secretar General al Ministerului Lucrărilor publice şi Comunicaţilor. Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului.—Cartierul Fabricei de Chibrituri, Str. B, 12. Bucureşti 6.
33	1930, Aug, 31	BUNGESCU ION. Lt.-Col. de Artilerie. Absolvent al Şcoalei de Artilerie antiaeriană din Metz (Franţa). Brevetat de Stat Major al Şcoalei Superioare de Războiu din Paris. — Profesor la Şcoala Superioară de Războiu. — Str. Franzelari, 19. Bucureşti.

34	1920, Ian. 10	BURADESCU TRAIAN. Inginer-Şef. Diplomat al Şcoalei de Podur şi Şosele din Bucureşti. — Subdirector în C. F. R. — Str. Lăzureanu, 48. Bucureşti 6.
35	1939, Aug. 31	BURILEANU ŞTEFAN. General. Licenţiat şi Doctor în Matematici dela Paris. Profesor Universitar onorar, Profesor de metalurgie. Consilier general tehnic al Uzinelor şi Oţelăriilor Malaxa. — Str. General Berthelot, 95, Bucureşti 2.
36	1930, Aug. 31	BUŞILĂ ADRIAN. Inginer. — Inginer în Direcţiunea Întreţinerii şi Lucrărilor Noui C. F. R. — Str. Vaselor, 40 B. Bucureşti 4.
37	1910, Oct. 25	BUŞILĂ D. C. Inginer. — Profesor la Politehnica „Regele Carol II". — Aleea Modrogan, 1. Bucureşti 3. (Telefon 2-4661).
38	1921, Mai 4	BUŞILĂ G. IOAN. Inginer Inspector General. — Membru în delegaţia Consiliului Tehnic-Superior. — Str. Dr. Lueger, 8 bis. Bucureşti 1.
39	1926, Iulie 28	CAMBUREANU V. D. Inginer-Şef. — Directorul Întreţinerii din Direcţiunea Generală a Drumurilor. Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. — Str. Simonide, 3 Bucureşti 1.
40	1914, Iulie 12	CAMBUREANU V. Inginer Inspector General. — Str. Vasile Lupu, 24. Bucureşti 2.
41	1921, Noem. 4	CAPRIEL I. Inginer-Şef. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Administrator-Delegat al Societăţii „România Carboniferă", al Societăţii „Construcţiunea". — Str. Visarion, 5. Bucureşti 3.
42	1936, Noem. 7	CARAFOLI ELIE. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat şi Doctor în Ştiinţe dela Sorbona. — Profesor la Politehnica „Regele Carol II". — Str. Popa Savu, 42. Bucureşti 2.
43	1920, Mart. 1	CARAMAN E. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „V. Alecsandri" din Galaţi, Preşedintele Asociaţiei Profesorilor Secundari din Galaţi, fost prefect şi deputat de Covurlui. — Str. Domnească, 170 A. Galaţi.
44	1936, Febr. 27	CARTIANU GH. Inginer. — Asistent la Politehnica „Regele Carol II". Antreprenor. — Str. Popa Tatu, 81. Bucureşti 2.
45	1928, Aug. 29	CASSIAN GH. Colonel de Artilerie. — Comandantul Reg. 40 Artilerie Tg.-Mureş.
46	1920, Ian. 10	CAZACU N. C. Inginer-Şef. — Str. G-ral Angelescu, 44. Bucureşti 2.
47	1939, Aug. 31	CAZANACLI V. PETRE. Licenţiat în Matematici. — Profesor titular.
48	1935, Apr. 10	CHIRICESCU V. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer în Regia Autonomă C. F. R. — Str. Italiană, 30. Bucureşti 1.
49	1914, Dec. 20	CHIRICUŢĂ A. Inginer Inspector General. — Administraţia Comercială a porturilor şi căilor de comunicaţie pe apă. — Str. Oţetari, 8. Bucureşti 1.
50	1920, Mart. 1	CHIŢULESCU I. IOAN. Inginer-Şef. — Director în Ministerul Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor. — Str. Iancu Căpitanu, 44. Bucureşti 4.
51	1921, Febr. 5	CIOC M. Inginer. — Administrator Industrial. Antreprenor de lucrări publice şi particulare. — Str. Gr. Cantacuzino, 14. Bucureşti 1.

52	1930, Aug. 31	CIORĂNESCU NICOLAE. Doctor în Matematici din Paris. Licenţiat în Fizico-Chimice. — Conferenţiar la Politehnica „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Buzeşti, 98. Bucureşti 2.
53	1940, Febr. 8	CIORAPCIU F. MIRCEA. Inginer Constructor. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. Ţepeş Vodă, 34. Bucureşti 4.
54	1939, Dec. 7	CLAUDIAN VIRGIL. Licenţiat în Matematici. Profesor la Liceul Mihai Viteazu Bucureşti.—Str. Lt. Radu Robescu, 24. Bucureşti.
55	1933, Aug. 31	CONSTANTINESCU GH. Inginer. — Administrator delegat al Soc. „Sarotec" S. A. R. — Str. B. Mussolini, 22/II. Bucureşti 3.
56	1938, Aug. 31	CONSTANTINESCU G. G. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Str. Aquila, 10. Bucureşti 6.
57	1895, Sept. 15* (fondator)	CONSTANTINESCU TANCRED. Inginer Inspector General. — Fost Ministru. — Aleea Vulpache, 7. (Parcul Filipescu) Bucureşti 3.
58	1932, Apr 20	CONSTANTINESCU ZAHARIA. Inginer, Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Conducătorul Imprimeriei C. F. R. Asistent la Politehnica „Regele Carol II". — Gara Filaret.
59	1936, Febr. 27	COŞEREANU ION. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Timişoara. — Inginer în Biroul de studii Avioane al Uzinei I. A. R. din Braşov. — Fabrica de avioane I. A. R. — Str. Averescu, 9. Braşov.
60	1910, Apr. 3	COSTINESCU DAN. Inginer. — Director General Soc. „Letea". — Fabrica „Letea", Bacău.
61	1939, Dec. 7	CRĂCIUNEANU CONST. Căpitan. — B-dul Mărăşti, 47. Bucureşti 2.
62	1936, Aug. 25	DĂSCĂLESCU HR. Licenţiat în Matematici. — Profesor.— Str. Cuza Vodă, 58. Focşani.
63	1939, Febr. 23	DOBRESCU A. Licenţiat în Matematici. — Profesor de liceu.— Str. Filoti Anton, 33. Buzău.
64	1939, Aug. 31	DONCIU NICOLAE. Licenţiat în Matematici.— Profesor Liceul militar Târgovişte. — Str. Heliade Rădulescu, 35. Târgovişte.
65	1939, Dec. 7	DRAGOMIRESCU-BUZNE EDUARD. Căpitan de Artilerie, brevetat de Stat Major. Profesor de Construcţii de guri de foc şi muniţiuni la Şcoalele pregătitoare şi de aplicaţie de Artilerie. — Str General Anghelescu, 159. Bucureşti.
66	1936, Febr. 27	DROSESCU GH. ION. Inginer mecanic. — Director al uzinelor Astra şi Union. — Str. Belgrad, 2. Bucureşti 3.
67	1922, Mart. 1	DUMITRESCU ARG. D. Inginer-Şef. — Inspector tehnic C. F. R.— Str. Principele Nicolae, 22. Craiova.
68	1922, Noem. 1	DUMITRESCU I. GH. Licenţiat în Matematici. — Inspector Şcolar. — Str. Sf. Elefterie, 52. Bucureşti 6.
69	1936, Febr. 27	DUMITRESCU C. I. Inginer Electromecanic dela S. P. B. — Asistent la „Rezistenţa Materialelor" la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Inginer la Direcţiunea Economatului C. F. R.—Str. Cuza Vodă, 94. Bucureşti 2.

*) Data fondării revistei „*Gazeta Matematică*". Societatea Gazeta Matematică a fost constituită la 1 Septemvrie 1909.

70	1918, Ian. 28	FELIX CORNELIU. General de Brigadă în rezervă. — Şos. Ştefan cel Mare, 218. Bucureşti 1.
71	1935, Apr. 10	FLORESCU M. ULPIU. Inginer constructor. — Inginer în Direcţia de Poduri C. F. R. Asistent la Politehnica Bucureşti. — U. D. R. Reşiţa.
72	1938, Febr. 17	FLORIAN ZAHARIA. Licenţiat în Matematici. — Profesor. Actuar expert. — Profesor. Director la Societatea de Asigurare „Naţionala". — B-dul Elisabeta, 95 bis A. Bucureşti.
73	1929, Ian. 31	FOCŞENEANU I. MIHAIL. Căpitan de Artilerie. Licenţiat în Matematici. Brevetat de Stat Major. — Profesor la Şcoala Superioară de Război. — Regimentul 1 Artilerie Grăniceri.
74	1928, Mai 9	FUNDĂŢEANU C. ION. Inginer. — Director General al Oficiului Central de Licitaţii din Ministerul Finanţelor. — Aleea N. Ionescu, 3 (Parcul Delavrancea). Bucureşti 2.
75	1921, Mai 4	GABRIELESCU RAMIRO. Inginer. — Str. Dionisie, 19. Bucureşti 1.
76	1914, Dec. 20	GÂLCĂ I. TOMA. Inginer — Fost Secretar General al Ministerului de Lucrări Publice şi Comunicaţii. Profesor la Şcoala Superioară de Război. — Str. Wilson, 13. Etaj II, apart. 7. Bucureşti 1.
77	1906, Mart. 4	GEORGESCU I. N. Inginer Inspector General. — Str. Gh. D. Palade, 35. Bucureşti 3.
78	1921, Febr. 5	GEORGESCU N. N. Inginer. — B-dul Elisabeta, 24. Bucureşti 1.
79	1927, Mai 11	GEORGESCU-ROEGEN N. Licenţiat în Matematici. Diplomat al Institutului de Statistică dela Universitatea din Paris. — Director în Ministerul Economiei Naţionale. Profesor la Şcoala de Statistică. — Str. Bitolia, 5. Bucureşti 3.
80	1939, Dec. 7	GEORGESCU-ROEGEN OTILIA. Licenţiată în Matematici. Profesoară secundară. — Str. Bitolia, 5. Bucureşti 3.
81	1934, Dec. 19	GEORGESCU-VAL. N. ION. Căpitan de Artilerie. Inginer Electro-Mecanic. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Timişoara. — M. I. A. Dir. Tehnică. — Str. Bitolia, 28. Bucureşti 3.
82	1938, Aug. 31	GHEORGHIEŞ AL. General de Artilerie.
83	1936, Febr. 27	GHEORGHIU C. ADR. Licenţiat în Matematici. Arhitect. — Str. G-ral Magheru, 209. Bucureşti 2.
84	1932, Apr. 20	GHEORGHIU TH. GH. Doctor în Matematici. — Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Vatra Luminoasă, 55. Bucureşti 4.
85	1914, Ian. 8	GHEORGHIU S. I. Inginer-Şef. — Profesor Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Lahovary, 3. Bucureşti 3.
86	1913, Aug. 30	GHEORGHIU A MIRCEA. Inginer Inspector General. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Subdirectorul Navigaţiei Fluviale Române. — Str. Aviator Iliescu, 44. Bucureşti 3.
87	1929, Aug. 28	GHEORGHIU A. ŞERBAN. Doctor în Ştiinţele Matematice. Diplomat al Institutului de Statistică al Universităţii din Paris. — Director în Ministerul de Finanţe. — Str. Berzei, 5. Bucureşti 1.
88	1922, Aug. 31	GHERMĂNESCU N. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara. Dirigintele Oficiului Special al Învăţământului P. T. T. — Palatul P. T. T. Timişoara.

89	1921, Mai 4	GHIMUŞ D. A. Lt.-Col. Inginer Radio-electrician. E. S. E. — Str. Chişinău, 12. Bucureşti 2. Telefon 5-4547.
90	1939, Febr. 23	GHIRCOIAŞU V. N. Licenţiat în Matematici.
91	1936, Aug. 25	GHIŞOIU I. PETRE. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice „Regele Carol II" din Bucureşti. — Inginer în Direcţiunea Comercială a Soc. Uzinelor de fier şi domeniilor din Reşiţa S. A. — Str. Răspântiilor, 17. Bucureşti 3.
92	1939, Dec. 7	GHERMANI DIONISIE. Inginer. Profesor. — Decan al Facultăţii de Construcţii din Politehnica „Regele Carol II". — Preşedintele Comitetului de Direcţie P. C. A. Adm. Delegat la Soc. Edilitatea şi la Soc. Govora-Călimăneşti. — Str. Paris, 45. Bucureşti.
93	1931, Mart. 11	GHIŢESCU VIRGIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Dr. Ioan Meşotă" din Braşov. — Str. Dorobanţilor, 5. Braşov.
94	1910, Iunie 21	GRIGORESCU C. Inginer. — Antreprenor de lucrări publice. — Str. Plantelor, 40. Bucureşti 4.
95	1936, Febr. 27	GUŢU I. AL. Inginer. — Inginer la Societatea Petroşani. Asistent la Politehnica „Regele Carol II". — Str. Sevastopol, 11 C. Bucureşti 2.
96	1920, Ian. 10	GUTZU VICTOR. Inginer — Parcul Filipescu. Manufactura de tutun Belvedere Bucureşti.
97	1927, Ian. 28	HANGANU D. M. Doctor-Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti şi al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris. — Director la C. A. M. Profesor la Politehnica „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Logofătul Nestor, 2. Bucureşti 6.
98	1924, Ian. 30	IANCULESCU ROMULUS. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Şeful serviciului M. II Mărfuri din Direcţia Mişcării C. F. R. — Str. Petre Poni, 7. Bucureşti 2.
99	1922, Mai 10	ILIESCU GH. Inginer-Şef. — Directorul Fabricei de Chibrituri-Filaret. — Fabrica de Chibrituri-Filaret. Bucureşti 6.
100	1895, Sept. 15 (fondator)	IOACHIMESCU GH. ANDREI. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Profesor onorar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Buzeşti, 76. Bucureşti 2.
101	1926, Iunie 28	IOACHIMESCU A. GH. Inginer. — Directorul Fabricei de Timbre. — Str. Fabrica de Chibrituri, 28. Bucureşti 6.
102	1920, Ian. 10	IOANOVICI AUREL. Inginer. — Antreprenor. — Str. Paris, 28. Bucureşti 3.
103	1922, Noem. 1	IONESCU V. D. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Cluj.
104	1936, Febr. 27	IONESCU P. HARALAMBIE. Licenţiat în Matematici. — Str. Agricultori, 15. Ap. 13. Bucureşti.
105	1895, Sept. 15 (fondator)	IONESCU ION. Inginer Inspector general în retragere. — Profesor onorar al Şcoalei Politehnice „Regele Carol II" din Bucureşti. Decanul Colegiului Inginerilor. — Str. Răsuri, 25. Bucureşti 3.
106	1939, Febr. 23	IONESCU TIBERIU. Licenţiat în Matematici. — Inspector şcolar. — Str. Sandu Aldea, 35. Bucureşti 2.

107	1933, Febr. 22	IONESCU-BUJOR CONSTANTIN. Licenţiat în Matematici. — Profesor Liceul Internat Buftea. — Str. Precupeţii Vechi, 40. Bucureşti 3.
108	1936, Febr. 27	IONESCU-ŢIU D. C. Lt. din Geniu. Licenţiat în Matematici. — Profesor de matematici la Şcoalele pregătitoare de ofiţeri de geniu. — Casa Gazeta Matematică, Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2.
109	1932, Apr. 20	IONESCU ZANE D. GH. Inginer de Mine. Subdirector Moneteria Naţională. — Str. Fabrica de Chibrituri, 32. Bucureşti.
110	1936, Febr. 27	ISTRATI CONSTANTIN. Lt.-Comandor-Inginer, Diplomat al Şcoalei Superioare de Aeronautică din Paris. — Preşedintele Comisiei Militare M. Aerului şi Marinei în Uzinele I. A. R. din Braşov. — Bd. Pache, 107. Bucureşti.
111	1924, Ian. 30	KAUFMAN NORBERT. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Inginer-Consilier în Direcţiunea Generală C. F. R. — Str. G-ral Manu, 26. Bucureşti 2.
112	1936, Febr. 27	LAMOTH PETRU. Licenţiat în Fizico-Matematici. — Profesor la Liceul „Banaţia". — Piaţa Tebec, 2. Timişoara.
113	1939, Febr. 23	LASCU BAL. Licenţiat în Matematici. — Str. Avram Iancu, 17. Cluj.
114	1931, Aug. 28	LAZU CONST. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Inginer-Şef. — Director în Administraţia C. A. M. Asistent la Şcoala Politehnică. — Str. Sf. Elefterie, 19. Bucureşti 6.
115	1934, Dec. 19	LEONIDA D-TRIE. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara. — Str. Salcâmilor, 9. Bucureşti 3.
116	1919, Sept. 12	LINTEŞ ION. Comandor. Doctor-Inginer. — Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". Membru al Institutului de Ştiinţe Sociale. Director în Ministerul Aerului şi Marinei. — Str. Zoe Râmniceanu, 10 B. Bucureşti.
117	1921, Mai 4	LITEANU I. GH. General. — Comandantul Brigăzii de Artilerie de Gardă. — Str. Spătarului, 54. Telefon 2-0940. Bucureşti 1.
118	1935, Aug. 22	LIVADA F. GRIGORE. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — Liceul Militar „D. A. Sturdza". Craiova.
119	1934, Dec. 19	MALAXA C. ELENA. Licenţiată în Matematici. — Profesoară de Matematici şi Directoarea Şcoalei Centrale de fete din Bucureşti. — Str. General Lahovary, 3 Bucureşti.
120	1934, Dec. 19	MALAXA N. Inginer. — Industriaş. — Aleea Alexandru, 38. (Parcul Filipescu). Bucureşti 3.
121	1913, Aug. 30	MALCOCI C. Inginer Inspector General. — Str. Pia Brătianu, 4. Bucureşti 3.
122	1934, Febr. 21	MANAFU VALERIU. Inginer. Diplomat al Şcoalei Centrale de Arte şi Manufacturi din Paris. — Str. I. G. Duca, 60. Bucureşti.
123	1926, Iunie 28	MANOILESCU MIHAIL. Ministrul Afacerilor Străine. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Str. Mussolini, 27. Bucureşti 3.
124	1932, Apr. 20	MĂRĂCINE B. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul Imprimeriei Naţionale. — Str. Lânăriei, 80. Vila 26. Bucureşti 6.
125	1921, Febr. 5	MAREŞ T. Inginer-Şef. — Direcţia Generală a Drumurilor. — Reziденţa Regală Olt. Craiova.

126	1922, Mai 10	MATEESCU CR. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Subdirector la Soc. „Electrica" Bucureşti. — Calea Dorobanţilor, 1. Vila B. Bucureşti 3.
127	1939, Aug. 31	MEREUŢĂ EM. Licenţiat în Matematici. — Str. Vatra Luminoasă, 89. Bucureşti.
128	1927, Mai 11	MEREUŢĂ V. Inginer. — Subdirector Direcţiunea de Intreţinere C. F. R. — Str. Dan Vodă, 3. Bucureşti 2.
129	1939, Dec. 7	MICLESCU ANDREI. Căpitan de Artilerie. Licenţiat în Fizico-chimice, brevetat al Şcoalei de Războiu din Paris. Profesor de matematici la diferite şcoli militare. — Str. Delea Veche, 15 bis. Bucureşti.
130	1935, Noem. 5	MIHĂILEANU N. N. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Seminarul Monahal Cernica. — Str. Vulturilor, 63. Bucureşti.
131	1921, Febr. 5	MIHALOPOL C. Inginer Inspector General. — Splaiul Independenţei, 63. Bucureşti 6.
132	1939, Dec. 7	MIHOC GHEORGHE. Doctor în Matematici. Asistent la Facultatea de Ştiinţe Bucureşti. Director în Casa Centrală a Asigurărilor Sociale. — Str. Agricultori, 83. Bucureşti.
133	1939, Aug. 31	MIHU CERCHEZ. Licenţiat în Matematici. — Str. Rozelor 9. Bucureşti.
134	1925, Febr. 11	MIRCEA M. E. Inginer. — Inginer-Şef la Societatea „Concordia". — Gura Ocniţei. Jud. Dâmboviţa.
135	1934, Dec. 19	MIRESCU PETRE. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „N. Bălcescu" din Brăila. — Str. Galaţi, 71. Brăila.
136	1929, Aug. 28	MITESCU CAMIL. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul Serviciului Exploatării Fabricelor la Casa Autonomă a Monopolurilor. — Piaţa Lahovary, 1 A. Bucureşti 3.
137	1920, Ian. 10	MITITELU C. CLAUDIU. Inginer-Inspector general. Licenţiat în Matematici. — Director Tehnic Casa Autonomă a Monopolurilor. — Piaţa Lahovary, 1 A. Bucureşti 3.
138	1920, Ian. 10	MITITELU C. I. Inginer. — Intreprinzător de lucrări publice. — Str. Ciprian Porumbescu, 11. Bucureşti.
139	1940, Febr. 8	MIU M. ION. Inginer Constructor. — Licenţiat în Matematici. Inginer la Direcţia Poduri C. F. R. — Gara de Nord. Bucureşti 2.
140	1939, Febr. 23	MORŢUN EMIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „I. C. Brătianu", Piteşti.
141	1932, Febr. 21	NEAMŢU PETRE Inginer. — Director General S. T. B. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Roma, 59. Bucureşti 3.
142	1928, Aug. 29	NEGURĂ GR. ST. Licenţiat în Matematici dela Universitatea din Bucureşti. — Profesor. Director al Liceului „Codreanu" din Bârlad. — Str. Dobranici, 16. Bârlad.
143	1939, Aug. 25	NESTOR D-TRU. Inginer. — Str. V. Stoenescu, 10. Bucureşti
144	1910, Mai 21	NICHIFOR A. GHEORGHE. Doctor în Ştiinţele Matematice (Specialitatea Geometria Descriptivă). — Profesor la Politehnica „Regele Carol II". Facultatea de Arhitectură. — Str. Sfinţilor, 8. Bucureşti.

145	1934, Dec. 19	NICOLAU AL. Inginer. — Profesor. — Şcoala Politehnică Timişoara.
146	1929, Aug. 28	NICOLAU H. CONSTANTIN. Inginer-Industrial, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti 1923. — Directorul tehnic al Societăţii „Letea". — Fabrica de hârtie „Letea". Bacău.
147	1921, Noem. 4	NICOLAU T. M. Inginer Inspector General. — Director al Direcţiunii Tehnice din Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. Profesor la Şcoala de Conductori de Lucrări Publice din Bucureşti. — Str. Ecoului, 85. Bucureşti 6.
148	1934, Dec. 19	NICOLESCU IOAN RADU. Comandor (r) de Marină. Funcţionar Superior Uzinele Malaxa. — Piaţa Washington, 2. Etaj III. Bucureşti.
149	1931, Mart. 11	NICULESCU V. ALEX. Licenţiat în Matematici — Profesor la Liceul „Mihail Eminescu" din Bucureşti. — Str. Sabinelor, 119. Bucureşti 6.
150	1920, Oct. 28	NICULESCU CRISTEA. Inginer-Şef. — Preşedintele Comisiei de control C. F. R. — Str. Londra, 35. Bucureşti 2.
151	1929, Ian. 31	NICULESCU MIRON. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Ştiinţele Matematice dela Sorbona. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Cernăuţi. — Str. Paris, 14. Bucureşti 3.
152	1922, Mart. 1	ONICESCU O. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. Director al Institutului Superior de Educaţie Fizică. Director al Şcoalei de Statistică. — Str. Rozelor, 9. Bucureşti 6.
153	1927, Ian. 28	ORĂNESCU OCTAVIAN. Inginer-Şef. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti, Secţia Electro-Mecanică. — Sub Director la Navigaţiunea Fluvială Română, Galaţi. — Str. Bolintineanu, 2. Galaţi.
154	1913, Oct. 7	ORĂŞANU D. CEZAR. Inginer. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Inginer Cadastral Şcoala Politehnică. Inginer Hotarnic şi Operator Topometru. Licenţiat în Matematici. Conferenţiar titular la Politehnica „Regele Carol II" din Bucureşti la cursul de Construcţii Generale. Profesor suplinitor la cursul de Topografie şi Geodezie. — Str. Sfiinţii Voievozi, 9. Bucureşti 2.
155	1910, Mai 21	ORĂŞEANU GR. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Gh. Lazăr" din Bucureşti. — Str. Popa Nan, 19. Bucureşti 4.
156	1929, Ian. 31	PANTAZI ALEXANDRU. Doctor în Matematici. Actuar-expert. Statistician-expert. — Profesor la Şcoala de Statistică. Asistent Universitar. Inspector actuar la Ministerul Economiei Naţionale. — Str. Brezoianu, 38 bis. Bucureşti. (Telefon 3-4305).
157	1932, Aug. 24	PÂRVU AUREL. Inginer Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat în Matematici. — Inginer C. F. R. — Str. Edgar Quinet, 5. Bucureşti 1. (Telefon 4-6329).
158	1939, Aug. 31	PĂSĂRICĂ FL. Licenţiat în Matematici. — Profesor particular. Şef de Serviciu în Direcţia Generală a Monitorului Oficial. — B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti.
159	1939, Dec. 7	PAVEL DORIN. Doctor-Inginer. Profesor Suplinitor la Politehnica „Regele Carol II". Director Tehnic U. C. B. — Str. Dr. Severeanu, 36. Bucureşti 6.

160	1939, Dec. 7	PERSU AUREL. Inginer.— Conferenţiar la Politehnica Bucureşti. Director General I. A.R. Braşov.— Calea Victoriei, 159. Bucureşti.
161	1939, Dec. 7	PETRESCU S. GHEORGHE. Doctor în Matematici. Asistent la Observatorul din Bucureşti. — Str. Tutunari, 28. Bucureşti 6.
162	1940, Aug. 28	PETRESCU PETRE. Lt.-Col. rez. din Artilerie. Director General al Armamentului din Soc. „Astra". — Str. Roma (Intrarea Roma, 6). Bucureşti.
163	1920, Oct. 28	PHILIPIDE M. Inginer. — Director General al Societăţii Anonime Române de Navigaţie pe Dunăre S. R. D. — Str. Radu-Vodă, 25 Bucureşti 5.
164	1939, Dec. 7	POPESCU M. IOAN. Căpitan de Artilerie. Licenţiat în Matematici. — Str. Dr. Severeanu, 23. Bucureşti.
165	1935, Apr. 10	POPESCU VICTOR. Inginer Soc. Comunală a Tramvaelor Bucureşti. Asistent Politehnica „Regele Carol II". — Str. Argentina, 44. Bucureşti 3.
166	1934, Dec. 19	POPESCU-BOTOŞANI G. Inginer la Subsecretariatul de Stat al Aerului. Uzinele I. A. R. Braşov. — Str. General Berthelot, 65. Bucureşti 1.
167	1928, Mai 9	POPOVICIU TIBERIU. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitar.
168	1931, Mart. 11	POPP N. Lt.-Comandor. Inginer.— Subsecretariatul de Stat al Aerului — Str. Alecu Russo, 7. Bucureşti.
169	1927, Mai 11	POPP TRAIAN. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Seminarul Pedagogic Universitar şi la Colegiul Naţional „Sf. Sava". — Str. Clucerului 10. Bucureşti.
170	1929, Ian. 31	PORTOCALĂ MIHAI. Inginer-Antreprenor.— B-dul Basarab (Alee), 9. Bucureşti 2.
171	1930, Aug. 31	POTOPEANU GHEORGHE. General de Artilerie. — Str. Dr. Lister, 5. Bucureşti 6.
172	1935, Apr. 10	PRAPORGESCU N. Licenţiat în Matematici. — Consilier Controlor la Inalta Curte de Conturi.— Str. Aviator Sănătescu, 28. Bucureşti 2.
173	1925, Febr. 11	PROTOPOPESCU GRIGORE. General de Artilerie/r. — Str. Ana Davila, 25. Bucureşti 6.
174	1920, Aug. 15	REVICI TEOFIL. Inginer S. N. P. S. — Inginer-Şef în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. Gr. Cantacuzino, 59. Bucureşti.
175	1933, Febr. 22	ROŞU AL. AL. Licenţiat în Matematici. Doctor în Drept. Ştiinţele Politico-Economice. — Şef Controlor în Serviciul de Inspecţie al Ministerului de Finanţe. — Str. Inginer B. Giulini, 9. Bucureşti 6.
176	1914, Dec. 20	ROŞU V. Inginer, Inspector General. — Directorul Serviciului Hidraulic. — Calea Victoriei, 2. Bucureşti 1.
177	1929, Aug. 28	SĂLĂGEANU AUREL. Inginer. — Director tehnic la Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului. — Str. I. D. Teodoru, 8 — Bucureşti 6.
178	1904, Sept. 1	SALIGNY M. Inginer Inspector General. — Subdirectorul Serviciului Hidraulic, Ministerul Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor.— B-dul Elisabeta, 27. Bucureşti 2.

179	1920, Ian. 10	SĂPUNARU S. GH. Inginer constructor. — Director General al Societăţii „Clădirea Românească". — Str. Pia Brătianu, 5. (Parcul Ioanid). Bucureşti 3.
180	1929, Aug. 28	SARIAN MIHAI. Inginer. — Direcţia de Studii a Căilor Ferate Române. Asistent la Politehnica „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Columb, 7. Bucureşti 3.
181	1938, Aug. 31	SAVIN C. I. Locotenent. Licenţiat în Matematici. — Str. Cotroceni, 13. Bucureşti 6.
182	1935, Aug. 22	SCHILERU-DILI C. ION. Inginer-Mecanic-Electrician. — Conferenţiar la Politehnica din Timişoara. Director P. T. T. — Str. Ştirbey-Vodă, 65. Bucureşti.
183	1920, Aug. 15	ŞERBĂNESCU GH. VICTOR. Inginer. — Inginer la Consiliul tehnic Superior. — Str. Eftimie Murgu, 6. Bucureşti 4.
184	1928, Aug. 29	SERGESCU BARBU. Inginer de mine. Licenţiat în matematici şi drept. — Director tehnic la Societatea „Steaua Română". — Steaua Română-Câmpina.
185	1919, Sept. 12	SERGESCU PETRE. Doctor în Matematici. Licenţiat în Filosofie. — Membru corespondent al Academiei Române. Vice-preşedinte al Academiei Internaţionale de Istoria Ştiinţei. Profesor la Universitatea din Cluj.
186	1921, Febr. 5	SFINŢESCU I. CINCINAT. Inginer Inspector General. — Profesor la Academia de Arhitectură. Director General Tehnic la Municipiul Bucureşti. — Str. Barbu Delavrancea, 43. Bucureşti 2.
187	1934, Mai 2	SIMIONESCU D. GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul de aplicaţie al Şcoalei Normale Superioare din Bucureşti. — B-dul Pache, 99. Corp VI. Bucureşti.
188	1940, Aug. 28	SIMIONESCU MIRCEA. Inginer Constructor, Asistent la Politehnica din Bucureşti. Inginer la S. T. B. — Str. Varşovia, 2. Bucureşti.
189	1910, Aug. 3	SMĂNTÂNESCU AUREL. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Inginer Inspector General în Corpul Tehnic al Ministerului de Lucrări Publice şi Comunicaţii. Subdirector General la Direcţia Generală a Drumurilor. — Str. Sf. Ştefan, 23. Bucureşti 4.
190	1933, Aug. 31	STAMATESCU I. GH. Inginer-Şef. — Sudbirector Direcţia de Studii C. F. R. — Str. G-ral Lahovary, 87. Bucureşti 3.
191	1923, Iulie 4	STAMATESCU I. Profesor la Liceul Mateiu Basarab şi Seminarul Pedagogic Universitar. — Str. Toamnei, 47. Bucureşti 3.
192	1938, Febr. 17	STAN AURELIAN. Căpitan de Artilerie. Licenţiat în Matematici. Absolvent al Şcoalei de Aplicaţie a Artileriei dela Fontainebleau (Franţa). — Str. Dr. Leonte, 8. Bucureşti 6.
193	1920, Ian. 10	STAN D. Inginer. — Profesor suplinitor la Politehnica „Regele Carol II" din Bucureşti. Inginer la Soc. Anonimă Română de Telefoane. — Aleea Mântuleasa, 1. Bucureşti 4.
194	1939, Febr. 23	STOENESCU I. ALEXANDRU. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice Bucureşti. — Inginer în C. F. R. Direcţia Podurilor — Str. Caragea Vodă. 21. Bucureşti 3.

195	1934, Mai 2	STOICA V. DUMITRU. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Directorul Societăţii de locuinţe ieftine Bucureşti. — Str. Veronica Micle, 2. Bucureşti 2.
196	1936, Aug. 25	STOICESCU T. T. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul din Dorohoi. — Dorohoi.
197	1927, Mai 11	TĂNĂSESCU A. General de rezervă. — Str. Gr. Cantacuzino, 54. Bucureşti 2.
198	1928, Mai 9	TĂNĂSESCU A. TUDOR. Licenţiat în Matematici. Inginer electromecanic. — Conferenţiar de Radio-Comunicaţii la Polithenica „Regele Carol II". — Director tehnic P. T. T. — Calea Victoriei, 68. Bucureşti.
199	1900, Noem. 1	TEODOREANU VASILE. Pensionar. — Str. Zlataust, 7. Iaşi.
200	1934, Mai 2	TEODORESCU C. C. Inginer-Şef. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Arh. Blanc, 8. Bucureşti,
201	1911, Mai 18	TEODORESCU V. N. Inginer Inspector General — Fost Ministru.— Str. Paris, 53. Bucureşti 1.
202	1937, Ian. 28	THEODORU HENRI. Inginer. — Profesor la Şcoala de Sub Ingineri. Conferenţiar la Politehnica. Antreprenor. — Str. Alex. Donici, 27. Bucureşti.
203	1910, Mai 21	THIERRIN H. G. Licenţiat în Matematici. — Directorul Institutului „Schewitz-Thierrin". — Str. Basarabia, 12. Bucureşti 1.
204	1940, Aug. 28	TULLEA C. GH. Inginer la Ministerul Economiei Naţionale. — Str. Aviator Theodor Iliescu, 69. Bucureşti.
205	1921, Aug. 31	ŢINO O. Doctor în Matematici. — Profesor la Politehnica din Timişoara. — Str. Ismail, 16. Bucureşti 4.
206	1939, Dec. 7	ŢINTEA M. ION. Inginer la M. A. M. Profesor la Şcoala de Ofiţeri de Aviaţie. — Str. Leova, 42. Bucureşti.
207	1929, Oct. 30	ŢIŢEICA GABRIELA. Licenţiată în Matematici. Inginer. — Asistentă la Politehnica din Bucureşti. — Str. Dionisie, 80. Bucureşti 3.
208	1929, Aug. 31	ŢIŢEICA RADU. Doctor în fizică. Licenţiat în Matematici. Inginer.— Asistent la labor. Optică, Facultatea de ştiinţe. — Str. Dionisie Lupu, 80. Bucureşti.
209	1836, Febr. 27	TOMESCU ST. IOAN. Inginer. — Intrarea Geneva, 4. Bucureşti.
210	1919, Sept. 12	ULESCU AL. Inginer. — Directorul Uzinelor I. A. R. — Str. Dr. Lister, 65. Bucureşti 6.
211	1935, Noem. 5	VÂLCOVICI VICTOR. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Profesor la Universitatea din Bucureşti. Membru corespondent al Academiei Române. Conducătorul Institutului de Cercetări Ştiinţifice „Regele Carol II". — Str. Londra, 44. Bucureşti 3.
212	1914, Dec. 20	VARDALA ION. Diplomat al Şcoalei Centrale de Arte şi Manufacturi din Paris.— Director General al Soc. A. R. „Banloc" pentru fabricaţiunea şi comercializarea cauciucului. — Str. Wilson, 13. Bucureşti 1.
213	1927, Mai 11	VASILACHE I. Inginer Inspector General.— Profesor şi Subdirector al Liceului Industrial „Regele Carol II". — Str. Polizu, 5—7. Bucureşti 2.

214	1932, Mart. 26	VASILESCU GR. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti (1919). Doctor al Academiei de Inalte Studii Comerciale şi Industriale din Bucureşti. — Profesor Politehnica din Bucureşti. Subdirector în Direcţia Generală a Porturilor şi a Căilor de Comunicaţie pe Apă. — B-dul Pache, 120. Bucureşti.
215	1920, Ian. 10	VASILESCU C. I. Inginer-Şef — Str. Aviator Ştefan Protopopescu, 36. Bucureşti 2.
216	1931, Apr. 20	VASILIU GH. DAN. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Subdirector tehnic la Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului. — B-dul Tache Ionescu, 27. Bucureşti
217	1940, Febr. 8	VASILESCU I. TEODOR. Inginer Constructor. — Str. Cobălcescu, 6. Bucureşti.
218	1933, Febr. 22	VASILIU GH. Inginer de mine şi geodez. — Antreprenor autorizat de Direcţia Cadastrului pentru Geodezie, Cadastru şi Comasare. Asistent supl. la Politehnica „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str Transilvania, 35. Bucureşti 2.
219	1925, Aug. 26	VASILIU M. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Director în Ministerul Industriei şi Comerţului. — Str. Vaselor, 70. Bucureşti 4.
220	1938, Febr. 17	VESCAN T. TEOFIL. Doctor în Ştiinţe fizice. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — Institutul de Fizică teoretică şi aplicată al Universităţii din Cluj.
221	1936, Febr. 27	VICIU A. A. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Militar din Tg.-Mureş.
222	1940, Dec. 7	VICTOR MARIAN. Doctor în Fizică. Licenţiat în Fizico-Matematici. Asistent la Facultatea de Ştiinţe din Cluj.
223	1933, Febr. 22	WOINAROVSKY R. Licenţiat în Matematici. — Str. Manu Cavafu, 16. Bucureşti 6.
224	1924, Ian. 30	ZAMFIRESCU C. GRIGORE. Inginer, Diplomat S. N. P. S. 1920. Bucureşti şi E. S. A. Paris. — Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Administrator unic al fabricei de avioane Set. Industria naţională aeronautică. — Str. Popa Lazăr 9—15. Bucureşti. Tel. 2-5074.
225	1929, Sept. 28	ZAPAN GH. Doctor în Filosofie dela Universitatea din Berlin. — Conferenţiar la Facultatea de Litere şi Filosofie din Bucureşti. — Str. Demostene, 33. Bucureşti 6.
226	1921, Mai 4	ZAPAN GRIGORE. Comandor. Inginer de Construcţii Aeronautice şi Mecanice (E. N. S. A. Paris). — Str. Pasteur, 44. Bucureşti 6. (Telefon 4-3929).
227	1925, Aug. 26	ZLATCU ST. C. Inginer-mecanic dela Şcoala Politehnică din Zürich.— Antreprenor. — Bulevardul Elisabeta, 57. Bucureşti 2.

†

MEMBRII DECEDAŢI *)

	Data admiterii	Data morţii
1. ANGELESCU A.	1919 Septemvrie 12	1938 Apr. 6
2. BOTEA N.	1932 Aprilie 20	1937 Dec. 18
3. BUNGEŢIANU D. PREDUŢA.	1938 Februarie 27	1940 August 21
4. FILIPESCU E. G.	1909 Iulie 1	1937 Noembrie 24
5. PANAITESCU SC.	1914 Decemvrie 20	1938 Martie 22
6. PATRICIU G. TITUS	1911 Decemvrie 17	1937 Ian. 5
7. POPESCU I.	1922 August 31	1936 Sept. 20
8. ŢIŢEICA GH.	1895 Noemvrie 1	1939 Februarie 5

*) Aci sunt trecuţi în ordinea alfabetică numai redactorii şi membrii decedaţi în ultimii 7 ani şi cari au stat la „*Gazeta Matematică*“ până la sfârşitul vieţii lor.

† PREDUȚA BUNGEȚIANU

Familia *Gazeta Matematică* a suferit una din cele mai dureroase pierderi prin moartea năprasnică, într'un accident stupid la munte, la 21 August 1940, a tânărului ei vlăstar PREDUȚA BUNGEȚIANU.

Fiică a neuitatului nostru profesor D. BUNGEȚIANU, născută la 30 August 1915, PREDUȚA a moștenit dela părinți unul din sufletele cele mai curate și mai nobile ce am întâlnit vreodată.

A trecut printre noi ca o scântee, vibrând pentru tot ce e frumos, bun și drept, cu surâsul vecinic pe buze, gata de luptă cu oricine pentru triumful ideilor ei. Nimic nu o oprea: nici greutatea sforțărilor, nici tăria puterilor ce i se opuneau. O adevărată sete de a se cheltui ca o flacără, putem a da lumină în jurul ei. Dar această fire luptătoare, nu avea nimic din asprimea obicinuită războinicilor ; din potrivă, cea mai desăvârșită gingășie sufletească împodobia orice gest. Căci lupta ei nu a fost nici odată pentru a doborî un adversar, ci pentru a-l ridica spre culmile senine ale iubirii de neam, de știință, de datorie.

Încă elevă de liceu, PREDUȚA aduna cu greutate micile ei economii, fără să spună nimic nimănui, pentru a dona ani de-arândul, câte o mie de lei anual *Gazetei Matematice* ca să facă un premiu întru amintirea scumpului ei tată. Studentă excelentă la Universitatea din București, primul ei act după luarea licenței a fost să ceară înscrierea ca membră a *Gazetei*. Puțin timp după aceea, aleasă secretară a *Societății Române de Matematici*, a desfășurat acolo o muncă necontenită și necunoscută, de albină

harnică şi devotată, îngrijind de expediţia Buletinului, de punerea la punct a bibliotecii şi a arhivei. Fără jertfe voioase ca ale PREDUŢII BUNGEŢIANU, multe manifestări ştiinţifice dela noi ar fi înăbuşite. După ce şi-a trecut examenul de capacitate de profesoară secundară, PREDUŢA a fost numită la Arad, unde şi-a cheltuit tot prisosul sufletesc ca să unifice, în sufletele elevelor dela graniţa de vest, aspiraţiile naţionale cu ale tuturor Românilor. Intr'un an ajunsese „răsfăţata" mult iubită a elevelor ei. Dar studiile ce făcea în vederea doctoratului în matematici o chemau mai aproape de Bucureşti. Pe ziua de 1 Septemvrie 1940 ea fusese transferată la Buzău. Destinul a vrut ca ea să nu mai poată vedea noul său post de luptă şi abnegaţie. Floare tăiată în mod brutal încă de pe când era în mugur, ea ne lasă amarnica durere de a plânge nu numai pierderea unui suflet rar ca al ei, dar şi nedesvoltarea calităţilor ei intelectuale, care ne dedeau dreptul s'o socotim ca pe o viitoare ostaşe harnice şi preţuite în armata pacifică a matematicii româneşti.

Ne mângâiam cu gândul că atunci când noi vom trece de pe pământ, suflete curate, vibrante şi devotate românismului şi ştiinţii, ca acela al PREDUŢII BUNGEŢIANU, vor păstra după dispariţia noastră amintirea sforţărilor ce am depus. Dumnezeu a hotărît altfel, luându-ne această mângâiere şi încercând inimile noastre cu durerea acestei pierderi grozave. In colţul cel mai tainic al sufletului, vom păstra icoana surâzătoare a PREDUŢII BUNGEŢIANU, şi ea ne va da imbold la muncă în clipe de descurajare, căci un popor care dă exemplare de elită ca ea, are destule mijloace ca să înfrângă toate vitregiile soartei şi să-şi îndeplinească rostul în lume.

PETRE SERGESCU.

PROPRIETĂȚI ALE CONICELOR OSCULATOARE LA O CURBĂ PLANĂ

Résumé. On établie des relations entre la conique osculatrice en un point M d'une courbe plane et les points caractéristiques situés sur la tangente en M à la courbe; de même, entre des droites spéciales qui passent par le point M et qui sont en liaison avec la forme de la courbe dans le voisinage du point M.

1. *Normală afină.* $M(x, y)$ fiind un punct al curbei $y = f(x)$, să considerăm o coardă M_1M_2 infinit vecină și paralelă cu tangenta în M la curbă. Fie $x_1 = x - h_1$ și $x_2 = x + h_2$, $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, abscisele punctelor M_1 și M_2. Ordonatele lor sunt $y_1 = f(x - h_1)$, $y_2 = f(x + h_2)$ și desvoltând, avem

$$y_1 = f(x) - \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) - \dots$$

$$(1) \qquad y_1 = y - \frac{h_1}{1} y' + \frac{h_1^2}{2} y'' - \frac{h_1^3}{6} y''' + \dots,$$

$$y_2 = y + \frac{h_2}{1} y' + \frac{h_2^2}{2} y'' + \frac{h_2^3}{6} y''' + \dots,$$

$y', y'', \dots$ fiind derivatele lui $y = f(x)$.

Scriind că M_1M_2 este paralelă cu tangenta în M, obținem:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = y' \quad , \quad y_2 - y_1 = y'(h_1 + h_2).$$

Inlocuind y_1 și y_2 cu valorile lor (1), apoi simplificând cu $h_2 + h_1$, avem

$$(2) \quad (h_2 - h_1) y'' + \frac{1}{3}(h_2^2 - h_2 h_1 + h_1^2) y''' + \dots = 0,$$

care dă pe h_2 în funcție de h_1, când M_1M_2 este paralelă cu tangenta în M. Presupunând $h_2 = ph_1 + qh_1^2 + \dots$, avem $h_2^2 = p^2h_1^2 + 2pqh_1^3 + \dots$ și înlocuind în (2), obținem

$$[(p-1) h_1 + qh_1^2 + \dots] y'' + \frac{1}{3}[(p^2 - p + 1) h_1^2 + \dots] y''' + \dots = 0.$$

Egalând cu zero coeficienții lui h_1, $h_1^2, \dots$, avem

$$p = 1 \quad , \quad q = -\frac{y'''}{3y''}, \dots$$

și deci

$$(3) \qquad h_2 = h_1 - \frac{y'''}{3y''} h_1^2 + \dots \quad , \quad y'' \neq 0.$$

Normala afină [1]) în punctul M al curbei este limita dreptei care unește punctul M cu mijlocul coardei M_1M_2. Coeficientul unghiular al normalei afine este limita expresiei

$$\frac{\frac{y_1+y_2}{2}-y}{\frac{x_1+x_2}{2}-x}=\frac{y_1+y_2-2y}{h_2-h_1}$$

când h_1 și h_2 tind către zero, ținând seamă de relația (3).

Inlocuind pe y_1 și y_2 din (1), avem

$$y'+\frac{h_2^2+h_1^2}{2(h_2-h_1)}y''+\dots$$

Punând în locul lui h_2 valoarea sa din (3), obținem

$$y'+\frac{2h_1^2+\dots}{2\left(-\frac{y'''}{3y''}h_1^2+\dots\right)}y''+\dots$$

Simplificând cu h_1^2 și apoi făcând $h_1\to 0$, găsim coeficientul unghiular al normalei afine [2])

$$y'-\frac{3y''^2}{y'''}\cdot$$

Ecuația normalei afine în M (x, y) este

$$(4)\qquad Y-y=m(X-x)\quad,\quad m=y'-\frac{3y''^2}{y'''}\cdot$$

2. *Conica osculatoare* într'un punct M al unei curbe are cu curba un contact de ordinul al patrulea, adică are cinci puncte confundate în M, deci este complet determinată. In cazul unei conice, normala afină este diametrul ce trece prin M. Deci, centrele conicelor care au în M cu curba un contact de ordinul al treilea sunt situate pe normala afină în M. De aci urmează că normala afină în M și aceea din punctul infinit vecin se taie în centrul conicei osculatoare, care are în M un contact de ordinul al patrulea.

Ecuația normalei afine în M fiind (4), coordonatele centrului

---

1) Considerată de acum o sută de ani de A. TRANSON, *Recherches sur la courbure des lignes et des surfaces (Journal de Math. pures et appliquées*, t. VI, 1841, pp. 191—208). Pentru desvoltări, se recomandă E. CARTAN, *Théorie des groupes finis et continus et la Géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*, 1937, p. 156; E. CARTAN, *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*, 1937; FUBINI et CECH, *Introduction à la Géométrie projective différentielle des surfaces*, 1931.

2) F. TISSERAND, *Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal*, 2e éd., p. 68 și 77.

C_a al conicei osculatoare în M (x, y) sunt date de (4) şi derivata sa în raport cu x,

$$-y' = m'(X - x) - m,$$

şi sunt

$$X = \frac{m'x + m - y'}{m'}, \quad Y = \frac{m'y + m^2 - my'}{m'},$$

$$m = y' - \frac{3y''^2}{y'''}, \quad m' = \frac{dm}{dx},$$

de unde

$$X = x + \frac{3y''\,y'''}{5y'''^2 - 3y''\,y^{IV}},$$

$$Y = y + \left(y' - \frac{3y''^2}{y'''}\right)\frac{3y''\,y'''}{5y'''^2 - 3y''\,y^{IV}}.$$

Să luăm originea în M şi ca axe Ox şi Oy tangenta şi normala în M la curbă. Ecuaţia conicei (C_a) osculatoare în M la curba M are forma

$$(5) \qquad (C_a) \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 - 2dy = 0.$$

Vom scrie că valorile lui y, y', y'', y''', y^{IV} deduse din această ecuaţie sunt aceleaşi ca pentru curbă. Luând primele patru derivate şi făcând $x = 0$, $y = 0$, $y_0' = 0$, avem [1])

$$a - dy_0'' = 0,\ 3by_0'' - dy_0''' = 0,\ 3cy_0''^2 + 4by_0''' - dy_0^{IV} = 0,$$

$$(6) \quad a = 9y_0''^4,\ b = 3y_0''^2 y_0''',\ c = 3y_0'' y_0^{IV} - 4y_0'''^2,\ d = 9y_0''^3.$$

Se află uşor valorile acestor coeficienţi în funcţie de razele de curbură ale curbei şi a primelor două desfăşurate, înţelegând prin desfăşurata unei curbe înfăşurătoarea normalelor acelei curbe. Să presupunem că ecuaţia curbei este dată sub forma $\rho = F(\alpha)$, ρ fiind raza de curbură într'un punct M, iar α unghiul făcut de tangenta în M la curbă cu o dreaptă fixă. Curba este complet determinată, căci însemnând cu s arcul, ştim că dacă dreapta fixă este axa Ox, avem

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}, \quad \frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha,$$

---

1) F. TISSERAND. *Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal*, 2e éd., p. 68 şi 77.

şi deci ecuaţiile parametrice ale curbei se obţin din

$$dx = ds\cos\alpha = \rho d\alpha\cos\alpha = F(\alpha)\cos\alpha\, d\alpha,$$

şi sunt

$$x = x_0 + \int F(\alpha)\cos\alpha\, d\alpha \quad , \quad y = y_0 + \int F(\alpha)\sin\alpha\, d\alpha,$$

x_0 şi y_0 fiind constante care definesc poziţia şi nu forma curbei faţă de axele alese.

Avem $y' = \operatorname{tg}\alpha$,

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\operatorname{tg}\alpha}{\rho\cos\alpha\, d\alpha} = \frac{1}{\rho\cos^3\alpha},$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{\rho\cos^3\alpha}\right)}{\rho\cos\alpha\, d\alpha} = \frac{3\sin\alpha}{\rho^2\cos^5\alpha} - \frac{\frac{d\rho}{d\alpha}}{\rho^3\cos^4\alpha},$$

$$y^{IV} = \frac{1}{\rho\cos\alpha}\frac{dy'''}{d\alpha}.$$

După ce am efectuat calculele, pentru a găsi valorile acestor derivate în originea M (unde am considerat conica osculatoare), facem $\alpha = 0$. Găsim

$$y_0'' = \frac{1}{\rho} \quad , \quad y_0''' = -\frac{1}{\rho^3}\frac{d\rho}{d\alpha},$$

(7)

$$y_0^{IV} = \frac{3}{\rho^3} + \frac{3}{\rho^5}\left(\frac{d\rho}{d\alpha}\right)^2 - \frac{1}{\rho^4}\frac{d^2\rho}{d\alpha^2},$$

unde ρ este raza de curbură în M (origine), iar $\frac{d\rho}{d\alpha} = \rho_1$ şi $\frac{d^2\rho}{d\alpha^2} = \frac{d\rho_1}{d\alpha}$ sunt razele de curbură ale primelor două desfăşurate ale curbei.

Coeficienţii (6) au valorile

$$(8)\quad a = 9\rho^2 \ , \ b = -3\rho\frac{d\rho}{d\alpha} \ , \ c = 9\rho^2 + 5\left(\frac{d\rho}{d\alpha}\right)^2 - 3\rho\frac{d^2\rho}{d\alpha^2},$$

$$d = 9\rho^3 \ , \ \rho_1 = \frac{d\rho}{d\alpha}.$$

Coordonatele centrului conicei osculatoare în M (origine) sunt

$$X_0 = \frac{3\rho^2\rho'}{4\rho'^2 + 9\rho^2 - 3\rho\rho''} \quad , \quad Y_0 = \frac{3\rho}{\rho'}\frac{3\rho^2\rho'}{4\rho'^2 + 9\rho^2 - 3\rho\rho''},$$

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\alpha} \quad , \quad \rho'' = \frac{d^2\rho}{d\alpha^2}.$$

Normala afină în M (origine) este dreapta care unește M cu centrul C_a al conicei osculatoare (5). Are ecuația

$$ax + by = 0 \quad , \quad y = 3\frac{\rho}{\rho_1}x,$$

face cu tangenta MT (Ox) unghiul β, și coeficientul său unghiular $m = \operatorname{tg}\beta$ este dat de $\operatorname{tg}\beta = m = -\frac{a}{b} = 3\frac{\rho}{\rho_1}$, ρ_1 fiind raza de curbură a desfășuratei, C și C_1 fiind centrele de curbură în M la curba (M) (CC_1 perpendiculară pe MC) și la desfășurată, $MC = \rho$, $CC_1 = \rho_1$. Fie F punctul pe $\overline{C_1C}$ astfel că $\overline{CF} = \frac{1}{3}\overline{C_1C}$. Normala afină este dreapta MF.

(Va urma)

N. ABRAMESCU.

PREMII, BURSE ȘI PUBLICAȚII DIN VENITURILE SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ"

In cursul anului XLV de apariție a *Gazetei Matematice* (1 Sept. 1939—31 August 1940), situația a fost următoarea în ce privește premiile și bursele acordate și publicațiile făcute din veniturile fondurilor de care dispune Societatea noastră:

I. **Premii.**

1. *Premiul anual de aritmetică,* în valoare de 5.000 lei, a fost acordat elevului MIRCEA AL. VASILESCU-STABU, după cum s'a arătat în Vol. XLV, pag. 346.

2. *Premiul anual de geometrie elementară* „GH. ȚIȚEICA", în valoare de 5.000 lei a fost acordat elevului FLORESCU L. VICTOR, după cum s'a arătat în Vol. XLV, pag. 573.

3. *Premiul anual de algebră*, în valoare de 5.000 lei, a fost acordat elevului POPA D. MIRCEA, după cum s'a arătat în Vol. XLV, pag. 467.

4. *Premiul anual de trigonometrie* „VASILE CRISTESCU", în valoare de 5.000 lei, n'a fost acordat din lipsă de lucrări, după cum s'a arătat în Vol. XLV, pag. 523. Suma de 5.000 lei se va adăoga la premiile anilor viitori, conf. regulamentului.

5. *Premiul anual de mecanică sau astronomie* „SP. HARET", în valoare de 5.000 lei, de asemenea nu s'a acordat din lipsă de lucrări, după cum s'a arătat în Vol. XLV, pag. 638. Valoarea acestui premiu se va adăoga la premiile viitoare.

6. *Premiul anual de filosofia matematicilor* „VASILE CONTA", în valoare de 4.000 lei, nu s'a acordat din lipsă de lucrări aduse la cunoştinţa Societăţii, după cum s'a arătat în Vol. XLV, pag. 133. Valoarea acestui premiu se va adăoga la premiile viitoare.

7. *Premiul de matematici superioare pure sau aplicate* „ING. H. CAPRIEL", în valoare de 1.000 lei, urmează să se acorde la împlinirea perioadei de 5 ani.

In Vol. XLV, pag. 461, s'a publicat subiectul propus (1-ul an din perioada de 5 ani).

8. *Premiul pentru lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare* „GENERAL SCARLAT PANAITESCU", urmează să se acorde la împlinirea perioadei de 5 ani.

9. *Premiul anual* „LT.-COLONEL GH. A. TĂNĂSESCU", nu s'a acordat întrucât concursul anual n'a mai avut loc. Venitul fondului se adaogă la fond, pentru a-l mări.

10. *Premiul anual de geometria triunghiului şi a tetraedrului* „NICOLAE G. BOTEA", a fost acordat D-lui FLORESCU L. VICTOR. Raportul comisiunii speciale pentru acest premiu s'a publicat în Nr. 5 din Vol. XLV, al *Gazetei Matematice*, pag. 238.

11. *Premiul anual* „ING. AL. ROŞU", care se acordă celui mai harnic corespondent al *Gazetei Matematice*, elev de liceu, a fost acordat D-lui POPA D. MIRCEA, elev Liceul Militar din Iaşi, după cum s'a arătat în Vol. XLV, pag. 409.

II. Burse.

Din venitul fondului de burse „PROFESOR ION IONESCU", s'au acordat, pentru anul şcolar 1939—1940 două burse de câte 3.000 lei lunar, D-lor: LT. C. AVRAM şi RADU MARTAC, studenţi în anul IV, construcţii, Politecnica „REGELE CAROL II" din Bucureşti.

III. **Publicaţii.**

In Biblioteca Technică a *Gazetei Matematice*, tipărită din venitul fondului „ANGHEL SALIGNY“, nu s'a făcut nici o publicaţie în cursul anului XLIV.

Din celelalte fonduri ale *Gazetei Matematice* de asemenea nu s'a mai tipărit nimic. In schimb s'a dat la tipărit Vol. II, din *Elementele lui* EUCLIDE şi s'a pregătit manuscrisul, urmând a se da în curând la tipărit o broşură specială cu enunţurile problemelor nerezolvate.

COMISIUNEA ÎNSĂRCINATĂ CU ADMINISTRAREA FONDURILOR SPECIALE ALE „GAZETEI MATEMATICE“

Ing. I. BUŞILĂ şi Ing. D. A. STAN.

NOTE MATEMATICE

1. *Asupra formelor hermitiene.* Vom nota ca de obiceiu cu $\bar{\alpha}$ conjugatul numărului α. Dacă în *forma biliniară*

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_r y_s$$

luăm

$$y_r = \bar{x}_r, \quad a_{rs} = \bar{a}_{sr} \text{ (în particular } a_{rr} = \bar{a}_{rr}, \text{ deci e real)}$$

obţinem

$$H(x) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_r \bar{x}_s$$

care se numeşte o *formă hermitiană* în raport cu variabilele complexe $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

se numeşte determinantul formei $H(x)$. Acest determinant e simetric

generalizat (a_{rr} reali, $a_{rs} = \overline{a_{sr}}$) şi ca atare are totdeauna o valoare reală. De altfel o formă hermitiană oarecare nu poate lua decât valori reale.

Dacă punem $x_r = x'_r + ix''_r$, atunci forma $H(x)$ poate fi considerată ca o formă patratică $F(x', x'')$ de $2n$ variabile reale $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \ldots, x'_n, x''_n$. Coeficienţii acestei forme sunt de altfel toţi reali. Să notăm cu D determinantul formei $F(x', x'')$.

D-l G. RADOS a demonstrat [1]), printr'un calcul direct (explicitat numai pentru cazul $n = 3$), că avem

$$D = \Delta^2.$$

In cele ce urmează vom da o demonstraţie simplă acestei proprietăţi.

Forma $H(x)$ poate fi privită ca o formă patratică $G(x, \overline{x})$ $2n$ variabile $x_1, \overline{x}_1, x_2, \overline{x}_2, \ldots, x_n, \overline{x}_n$. Fie D_1 determinantul acestei forme.

Forma $F(x', x'')$ se obţine din $G(x, \overline{x})$ făcând transformarea liniară

$$x_r = x'_r + ix''_r \quad , \quad \overline{x}_r = x'_r - ix''_r \quad , \quad r = 1, 2, \ldots, n$$

de modul

$$\mu = \begin{vmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & i \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{vmatrix}^n = (-2i)^n$$

deci

$$D = \mu^2 D_1 = (-1)^n 2^{2n} D_1.$$

---

1) RADOS Gusztáv „*Semidefinit Hermite-alakokról*" Mathematikai és Természettudományi Ertesitö, **58**, 288—296 (1939).

Pe de altă parte determinantul formei $2G(x, \bar{x})$ este evident egal cu

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ a_{11} & 0 & a_{21} & 0 & a_{31} & \dots & a_{n1} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 & a_{2n} \\ a_{12} & 0 & a_{22} & 0 & a_{32} & \dots & a_{n2} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1} & 0 & a_{n2} & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \\ a_{1n} & 0 & a_{2n} & 0 & a_{3n} & \dots & a_{nn} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \Delta^2$$

după regula lui LAPLACE.

Determinantul formei $G(x, \bar{x})$, adică D_1, va fi

$$D = (-1)^n \frac{\Delta^2}{2^{2n}} \cdot$$

Rezultă că $D = \Delta^2$,

tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

TIBERIU POPOVICIU.

2. *Asupra problemei Nr. 2735.* S'a dat o soluţie a acestei probleme în Volumul XLV, pag. 365. In această Notă vrem să dăm o nouă soluţie. Enunţul problemei era:

Fie J *punctul de întâlnire al diagonalelor patrulaterului* ABCD; O *intersecţia dreptelor* BC, AD; J' *simetricul lui* J *în raport cu mijlocul lui* AB. *Dreptele* OJ, OJ' *intersectează dreptele* DC, AB *în* M *şi* N, *iar dreapta* MN *intersectează pe* AC *în* P. *Fie* Q *intersecţia lui* DP *cu paralela dusă prin* B *la* MN. *Să se găsească locul lui* Q *când* A, C, D *sunt fixe, iar* B *descrie dreapta* OC.

Să arătăm întâi că avem

$$(1) \qquad \frac{MD}{MC} = \frac{NB}{NA} \cdot$$

Pentru aceasta este suficient să se observe că în triunghiurile OAB şi OCD, dreptele ON, AJ', BJ' pe de o parte, iar OJ, DJ, CJ pe de altă parte, fiind concurente, avem

$$\frac{NB}{NA} \cdot \frac{bA}{bO} \cdot \frac{aO}{aB} = -1 \ , \quad \frac{MD}{MC} \cdot \frac{BC}{BO} \cdot \frac{AO}{AD} = -1,$$

unde a şi b sunt intersecţiile lui AJ' cu OB şi a lui BJ' cu OA.

Dreptele Bb, CA fiind paralele, ca şi dreptele Aa, DB, rezultă că

$$\frac{bA}{bO} = \frac{BC}{BO} \quad , \quad \frac{aO}{aB} = \frac{AO}{AD}$$

şi deci avem relaţia (1).

Să notăm cu I intersecţia lui AQ cu MN. Dreptele BQ, IN fiind paralele, vom avea ţinând seamă şi de relaţia (1).

$$(2) \qquad \frac{MC}{MD} = \frac{IA}{IQ} \cdot$$

Să notăm în fine cu R intersecţia lui MN cu AD.

Triunghiurile QAD, CAD tăiate de secanta MN ne vor da relaţiile :

$$\frac{PA}{PC} \cdot \frac{MC}{MD} \cdot \frac{RD}{RA} = 1$$

$$\frac{PQ}{PD} \cdot \frac{RD}{RA} \cdot \frac{IA}{IQ} = 1.$$

Dacă ţinem seama de relaţia (2), aceste două relaţii ne arată că

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PQ}{PD}$$

şi prin urmare dreptele AQ, CD sunt paralele.

Locul lui Q este deci paralela dusă din A la CD.

D. V. I.

3. *Asupra unor lanţuri de cercuri ortogonale.* 1°. Fie A_1, A_2, A_3 centrele a trei cercuri C_1, C_2, C_3 astfel încât C_2 este ortogonal cu C_1 şi C_3. Locul geometric al centrului radical al cercurilor când centrele sunt fixe, iar razele variabile este înălţimea triunghiului $A_1A_2A_3$ corespunzătoare vârfului A_2.

In adevăr, notând B_1, B_3 unul din punctele de intersecţie ale cercului C_2 cu C_1, C_3, dreptele A_2B_1, A_2B_3 sunt tangente cercurilor C_1, C_3 şi egale — deci punctul A_2 având puteri egale faţă cu C_1, C_3 se află pe axul radical al cercurilor C_1, C_3. Rezultă că axul radical al acestor cercuri este perpendiculara dusă din A_2 pe A_1A_3, deci centrul radical al cercurilor C_1, C_2, C_3 se află pe această perpendiculară.

2°. Să considerăm un poligon $A_1 A_2 \ldots A_{2n}$ ale cărui laturi satisfac condiția:

$$\overline{A_1 A_2}^2 + \overline{A_3 A_4}^2 + \ldots + \overline{A_{2n-1} A_{2n}}^2 = \overline{A_2 A_3}^2 + \overline{A_4 A_5}^2 + \ldots + \overline{A_{2n} A_1}^2 .$$

In acest caz, s'a arătat [1]) că putem avea o infinitate de lanțuri închise de cercuri ortogonale cu centrele în vârfurile poligonului. Fie $L_j(C_1, C_2, \ldots C_{2n})$ unul din aceste lanțuri — C_{i-1}, C_i, C_{i+1} trei cercuri consecutive ale sale. Centrul lor radical se găsește, după cele expuse, pe perpendiculara Δ_i dusă din A_i pe $A_{i-1} A_{i+1}$. Când j ia toate valorile, centrul radical al cercurilor considerate descrie dreapta Δ_i. Putem deci enunța rezultatul:

Având un poligon $A_1 A_2 \ldots A_{2n}$ *care satisface condiția*

$$\overline{A_1 A_2}^2 + \overline{A_3 A_4}^2 + \ldots + \overline{A_{2n-1} A_{2n}}^2 = \overline{A_2 A_3}^2 + \overline{A_4 A_5}^2 + \ldots + \overline{A_{2n} A_1}^2$$

se pot considera o infinitate de lanțuri închise de cercuri ortogonale cu centrele în $A_1, A_2, \ldots A_{2n}$. *Centrele radicale ale grupelor de trei cercuri consecutive ale unui lanț* L_j *formează un poligon* P_j. *Vârfurile corespunzătoare ale tuturor poligoanelor* P_j *sunt colineare.*

C. IONESCU-BUJOR.

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timișoara. Anul XX. Nr. 6. August 1940. Integrarea funcțiunilor Pseudo-Hiperbolice de EUGEN VIȘA.

Revista Științifică „V. Adamachi". Vol. XXVI. Nr. 1—2. Ianuarie-Iunie 1930. Iași.

MICHEL GHERMĂNESCU. *Équilibre avec frotement sur une surface fixe.* (Extras din „Bulletin Scientifique de l'école polytechnique de Timișoara", Tom. 9. Fasc. 3—4).

GH. D. SIMIONESCU. Asemănare-Ortologie-Omologie. (Extras din Pitagora V: 9).

T. VESCAN. Introduction à l'étude statistique des équations du mouvement des fluides. (Extras din „Bulletin Scientifique de l'école polytechnique de Timișoara". Tom. 9. Fasc. 3—4).

E. VIȘA. Funcțiuni Pseudo-Hiperbolice. Studiu elementar. (Extras din R. M. T. An. XX. Nr. 1, 2, 4, 5). Timișoara 1940.

1) C. IONESCU-BUJOR: *„Asupra cercurilor ortogonale". Gazeta Matematică,* XLII, pag. 455.

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 282. Intrebând la *Muzeul Limbei Române* din Cluj, condus de D-l Prof. SEXTIL PUŞCARIU, membru al Academiei Române, mi s'au dat următoarele informaţiuni.

Poporul român nu are numiri pentru *triunghiu* şi *dreptunghiu*, fiind că îi lipsesc noţiunile acestor abstracţii. *Clinul* e un obiect de formă triunghiulară, fie că e vorba de *clinul cămăşii*, al poalelor (german „*Zwickel*“) sau de *clinul unei moşii* („*intrând*“) în formă triunghiulară. Cuvântul technic „*triunghiu*“ nu poate fi înlocuit prin numirea de obiect: *clin*.

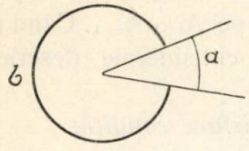


Fig. 1.

Dacă croiala unei haine are un „*Zwickel*“ în formă de romb, tot *clin* i se zice.

Unghiu e cuvânt popular, încât el poate reda întocmai pe „*angle*“ francez. Cu o restricţie totuşi. Pentru o minte românească „*unghiu*“ e numai *a* nu şi *b* (fig. 1), care e „*colţ*“, înţeles firește tot în sens material. Se zice „*m'am lovit în colţul mesei*“, nu în „*unghiul*“ mesei (fig. 2), dar se poate spune de o potrivită „*aşează scaunul în colţul*“ sau „*în unghiul mesei*“. In acest sens se zice şi *ungher*.

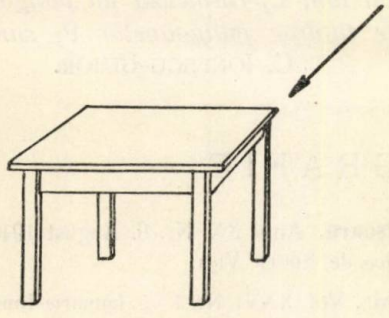


Fig. 2.

Corn se întrebuinţează prin Transilvania (mai de mult se întrebuinţa şi prin alte părţi) cu înţelesul lui „*colţ*“ (exterior sau interior). Şi etimologia e asemănătoare: un obiect care se termină cu un vârf ascuţit; ca un „*par*“ (acesta e sensul originar al lui *colţ*) sau cornul unui animal.

Prin Banat se zice şi *cot*, mai ales pentru colţul din lăuntru, *ungherul* unei încăperi.

G-L GH. B.

DIVERSE

a) Şedinţele Societăţii.

Şedinţa dela 5 Septemvrie 1940. **Inainte de a se intra în ordinea de zi, Adunarea, luând cunoştinţă de hotărîrile care au rupt din trupul ţării şi din sufletele româneşti jumătate din Ardeal, trecând 1.300.000 Români sub stăpânire străină, îşi exprimă îndreptăţita sa revoltă sufletească contra acestei nedreptăţi şi afirmă nădejdea neclintită că vigoarea neamului nostru şi justiţia divină vor reface unitatea românească.**

b) **Sporirea Bibliotecii.**

ANTONIUS MARTONFI. Inceputurile astronomice ale observatorului *Bathyanian* din Alba Iulia în Transilvania. Prefaţa tradusă de Profesor NICODIM LACUSTEANU (†) din limba latină. Alba Carolina 1798.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

RODOLPHO GUIMARAES. Ecuación del circulo de Joachimsthal. Lisabona.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2144. *Să se construiască un triunghiu* ABC, *cunoscând punctele* A, B *şi ştiind că punctul* C *se găseşte pe o curbă* (Γ), *cu condiţia ca, ducând prin* B *o dreaptă de sens* DB, *ce face cu sensul* CA *un unghiu* α [D *fiind punctul de intersecţie al dreptei* AC *şi* BD] *să avem:*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = k.$$

A. GHEOCALESCU.

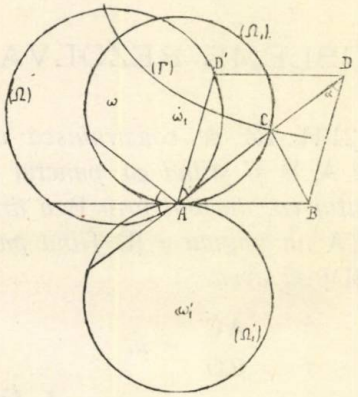
Vom folosi metoda de intersecţie a locurilor geometrice. Pentru aceasta să presupunem punctul C satisfăcând condiţiile problemei, afară de aceea de a se găsi pe curba (Γ), şi să vedem ce loc geometric descrie.

Deoarece punctele A şi B sunt fixe, iar unghiul ADB $=\alpha=$ const. rezultă că punctul D se găseşte pe unul din arcele de cerc — simetrice faţă de AB—de unde segmentul $\overline{AB}$ se vede sub unghiul α. Să construim paralelogramul ABDD' (AD' ∥ BD şi DD' ∥ AB). Când punctul D descrie arcul BDA (sau simetricul său), punctul D' va descrie un arc de cerc (Ω) *egal* cu el (sau simetricul Ω'), obţinut prin translaţia cercului BDA, definită de vectorul $\overrightarrow{BA}$. Să vedem ce descrie punctul C. Pentru aceasta observăm că:

$$\sphericalangle CAD' = \alpha = \text{const.} \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AD'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = k,$$

deci triunghiul CAD' rămâne asemenea cu el însuşi, pivotând în jurul punctului A în timp ce D' descrie arcul (Ω) [sau (Ω')].

Se cunoaşte însă următoarea teoremă [1]): *Dacă o figură plană se roteşte în planul său în jurul unui punct al său* A *şi rămâne asemenea cu ea însăşi, în timp ce un alt punct al său,* B *de ex., alunecă dealungul unei linii date, fiecare din punctele sale* C *descrie o linie asemenea cu cea dată şi pe care o putem face omotetică cu cea descrisă de* B, *rotind-o de unghiul* BAC *format de razele* AB, AC.



Conform acestei teoreme punctul C va descrie tot *un arc de cerc* (Ω_1) [sau simetricul (Ω_1')] ce face cu Ω unghiul α.

Rezultă următoarea construcţie grafică. Se construeşte cercul ADB şi cercul (Ω). Cercul (Ω_1) se va construi ţinând seama ca raportul razelor cercurilor (Ω_1) şi (Ω) este k şi că ele se taie sub unghiul α (Ω_1 va fi deci tangent dreptei AB). Fie C unul din punctele de intersecţie ale curbei (Γ) cu *arcul* (Ω_1) sau (Ω_1'). Triunghiul căutat este ABC.

Numărul de soluţii ale problemei depinde de felul curbei (Γ) şi de aşezarea ei faţă de cele două arce de cerc (Ω_1) şi (Ω_1').

Pe coperta G. M., Vol. XX am găsit următorii rezolvitori ai problemei: I. PĂSĂRICĂ, R. BELIAN, C. ISTRATI, AL. PANTAZI, GR. ZAMFIRESCU, N. NEMŢU, L. TEODORIU.

G. D. S.

---

1) F. G. M. Exercices de géométrie pag. 623, Teorema 424 — I.

PROBLEMA 3167. *Să se demonstreze identitatea*

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & c & 0 & a \\ b & 0 & c & 0 & a & 0 \\ 0 & c & 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b & 0 & c \end{vmatrix} = [a(bc-a^2)+b(ca-b^2)+c(ab-c^2)]^2.$$

E. ABASON.

Soluție dată de D-l M. L. RUSU (Student, Cluj).

Notând cu D determinantul dat, avem succesiv

$$D=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & c & 0 & a \\ 1 & 0 & c & 0 & a & 0 \\ 0 & c & 0 & a & 0 & b \\ 1 & 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b & 0 & c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} b & 0 & c & 0 & a \\ 0 & c-b & 0 & a-c & 0 \\ c & 0 & a & 0 & b \\ 0 & a-b & 0 & b-c & 0 \\ a & 0 & b & 0 & c \end{vmatrix}$$

și dezvoltând după regula lui LAPLACE

$$\frac{D}{a+b+c} = \begin{vmatrix} b & 0 & c \\ 0 & c-b & 0 \\ c & 0 & a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b-c & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c-b & a-c \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} b & 0 & a \\ 0 & c-b & 0 \\ c & 0 & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & b-c \\ b & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & c & 0 \\ c-b & 0 & a-c \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & c \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & c & a \\ c-b & 0 & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & b-c \\ a & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & 0 & a \\ 0 & a-c & 0 \\ a & 0 & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & a-b \\ a & 0 \end{vmatrix}.$$

Determinanţii cu minus înnainte au produsele nule. Dezvoltând pe ceilalţi după regulele cunoscute se găseşte succesiv

$$D = (a+b+c)[c(b-c)(abc-ab^2-c^3+bc^2)$$

$$+b(b-c)(b^2c-b^3-ac^2+abc)$$

$$+a(b-c)(a^2c-a^2b-bc^2+b^2c)+a(a-b)(abc-bc^2-a^3+a^2c)]$$

$$D = (a+b+c)^2(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)^2$$

$$D = (3abc-a^3-b^3-c^3)^2 = [a(bc-a^2)+b(ca-b^2)+c(ab-c^2)]^2$$

adică tocmai identitatea din enunţ.

Pe copertele volumelor XXIX — XXXIII inclusiv, sunt trecuţi următorii rezolvitori ai acestei probleme: M. Blumen, L. Brüll, L. Căldăraru, Gh. Călin, Gh. V. Cazan, C. I. Ciorănescu, V. Coşniţă, I. N. Craiu, T. V. Diaconescu, St. Dinu, V. Dorneanu, Al. C. Florea, B. V. Gataianţu, I. I. Georgescu-Racoviţă, Gh. T. Gheorghiu, Gh. Ghimicescu, F. Goldstein, Gh. Grofşoreanu, T. Hulubei, D. Iliescu, Em. Iliescu, Paul Iliescu, C. I. Istinie-Brezuica, A. Kahane, V. I. Lepadatu, L. Lupaş, V. Manafu, Paul Marin, N. St. Mihăilescu, Gh. Mihoc, I. M. Miu, I. C. Nicolau-Dobridor, A. Novac, E. Pălărieru, M. Pătroianu, Ilie Popa, C. N. Popescu, N. Popescu, Sp. I. Popescu, C. C. Popovici, Dan Popovici, I. Th. Popovici, N. Popovici-Corodeanu, B. Reiss, R. I. Spathy, M. Stamatiu, E. Ştefănescu, A. Stoica, Th. I. Stoicescu, V. Vârlan, I. C. Vasiliu, I. Vlădea, L. Weiss, S. Weiss şi I. O. Zaharia.

PROBLEMA 4279. *Să se calculeze sumele:*

$$\sum_{k=1}^{n} \sec[\alpha+(k-1)h]\sec[\alpha+kh] \text{ şi}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec}[\alpha+(k-1)h]\operatorname{cosec}[\alpha+kh].$$

Gh. Vasiliu.

Să considerăm egalitatea evidentă:

$$(u_0-u_1)+(u_1-u_2)+\ldots+(u_{n-1}-u_n) = u_0-u_n \qquad (1)$$

în care să facem:

$$u_k = \operatorname{tg}(\alpha+kh)\ ,\ k = 0,1\ldots u.$$

Ţinând seama că:

$$\text{tg}a - \text{tg}b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$$

obţinem din (1) prima sumă:

$$\sum_{k=1}^{n} \sec[\alpha + (k-1)h] \sec[\alpha + kh] = \frac{\text{tg}(\alpha + nh) - \text{tg}\alpha}{\sin h} .$$

Făcând în (1) substituţia:

$$u_k = \text{cotg}(a + kh) \ , \ k = 0,1 \ldots n$$

şi ţinând seama că:

$$\text{cotg}a - \text{cotg}b = -\frac{\sin(a-b)}{\sin a \, . \sin b}$$

obţinem a doua sumă:

$$\sum_{k=1}^{n} \text{cosec}[\alpha + (k-1)h] \, \text{cosec}[\alpha + kh] = \frac{\text{cotg}\alpha - \text{cotg}[\alpha + nh]}{\sin h} .$$

Au rezolvat problema D-nii: BUZINCU I. IOAN, CEAUŞESCU VASILE, CETĂŢEANU STELIAN, COJOCARU P. PETRE, IVĂNESCU CEZAR, MARTEŞ GRIGORE, MAVRODIN DIMITRIE, NEGREA A. MIRCEA-LEONTE, PETRESCU OCT. şi STOICESCU TUDOR.

D-nul IVĂNESCU, observă că pentru $\alpha = h$, sumele se găsesc calculate în R. M. T., Anul XI, pag. 114, iar D-nul CETĂŢEANU, arată că aceste sume se găsesc calculate şi în CRISTESCU, Cap. XXIV, ex. 8, pag. 56.

GH. V.

PROBLEMA 4342. *Pe un cont curent al unui fabricant cu un comerciant găsim scris:*

La DEBIT: sold la 1 Ianuarie 3250 lei; la 20 Ianuarie 4000 lei cu scadenţa 17 Martie; la 5 Februarie 2500 lei cu scadenţa 9 Mai; la 17 Februarie 1500 lei cu scadenţa la 1 Iunie; la 5 Martie 5400 lei cu scadenţa 25 Aprilie.

La CREDIT: la 5 Ianuarie 2400 lei cu scadenţa 21 Mai; la 30 Ianuarie 5000 lei cu scadenţa 25 Aprilie; la 10 Februarie 2000 lei cu scadenţa 15 Iunie; la 25 Februarie 1000 lei cu scadenţa 20 Mai; la 1 Martie 1600 lei cu scadenţa 1 Mai; la 25 Martie 6050 lei cu scadenţa 5 Iulie.

Dobânzile au fost de 4% în Ianuarie, de 5% în Februarie şi de 6% dela 1 Martie înainte pentru sumele debitoare, şi respectiv de 3%, 4%, 5% pentru sumele creditoare.

Se cere să se încheie acest cont pe ziua de 1 Iulie.

I. IONESCU.

Pentru ca să ştim cu ce procente să calculăm dobânzile şi sconturile comerciale, trebuie să cunoaştem soldurile debitoare şi creditoare după fiecare din operaţiunile făcute precum şi la epocile când se schimbă procentul dobânzilor. In acest scop încheiem mai întâiu tot pe ziua de 1 Iulie un cont curent provizoriu prin metoda hamburgeză fără dobânzi, întru cât dobânzile nu se capitalizează decât la încheierile de conturi. Insemnăm cu D sumele şi soldurile debitoare şi cu C pe cele creditoare şi alcătuim alăturatul cont :

CONT FĂRĂ DOBÂNZI		
Scadenţele	Sumele	Soldurile
1 Ianuarie	3250 D	3250 D
1 Februarie	—	3250 D
1 Martie	2400 C	850 D
17 Martie	4000 D	4850 D
1 Aprilie	1500 D	6350 D
9 Aprilie	1000 C	5350 D
25 Aprilie	5000 C	350 D
25 Aprilie	5400 D	5750 D
1 Mai	4200 C	1550 D
9 Mai	2500 D	4050 D
21 Mai	3000 C	1050 D
1 Iunie	3200 D	4250 D
15 Iunie	2000 C	2250 D
1 Iulie	—	2250 D
5 Iulie	6080 C	3800 C

In acest cont sumele s'au trecut în ordinea scadenţelor, intercalându-se la timpul lor epocile de schimbarea procentelor şi de încheierea contului. Se constată că nu avem de loc solduri creditoare, şi deci vom calcula dobânzile cu procentul 4 la prima linie, cu procentul 5 la a doua şi cu 6 la toate celelalte, inclusiv ultima care trebuie scontată pe 5 zile. Numai după 5 Iulie soldul de 3800 lei ar intra la calcule cu procentul redus de 5.

Cunoscând procentele ce se aplică diferitelor solduri putem complecta acest cont hamburgez provizoriu cu calculul dobânzilor. Pentru aceasta mai introducem o coloană de *„Zile“*, în care se trec, în dreptul fiecărui sold, numărul zilelor dela scadenţă la scadenţa următoare.

La determinarea numărului de zile, practica variază; unii nu socotesc ziua în care se face operaţia, alţii ziua scadenţei, ceea ce revine la a micşora cu 1 numărul zilelor dela o scadenţă la alta, inclusiv aceasta. Alţii le scad pe amândouă, considerând ca zile de operaţii numai pe cele complecte. Vom adopta aci una din primele două practici, ceea ce revine la a micşora cu 1 numărul de zile dela o scadenţă la alta, inclusiv acestea.

Dobânzile de 6% fiind numeroase le vom calcula prin *numere* (produsul sumelor prin numărul de zile) pe care le vom divide prin *divizorul fix* pentru 6%, aci 6000. Deaceea vom pune o coloană de *numere*. In o ultimă coloană, întitulată *dobânzi* trecem dobânzile, calculate direct la primele două solduri şi cu ajutorul numerelor la celelalte.

Pentru mai multă claritate, vom încheia contul prin metoda directă cu *numere roşii (negative)*, căci ultima scadenţă este posterioară închiderii contului. Dobânzile sunt calculate direct cu 4% şi cu 5% la prima şi a treia sumă dela Debit şi cu 6% toate celelalte.

Dobânzile calculate au fost rotunjite la lei întregi.

Sumele trecute în paranteze nu se adună, ele fiind trecute în cont numai pentru calculul dobânzilor.

Contul se prezintă cum se arată aci alături. Numerele roşii sunt scrise gras.

DEBIT

Data		Operaţii	Data		Suma	Zile	Procente	Numere	Dobânzi
Luna	Ziua		Luna	Ziua					
Ianuarie	1	Sold	Ianuarie	1	(3250)	31	4	—	11
Ianuarie	20	Sumă	Martie	17	4000	106	6	424000	
Februarie	1	Sold	Februarie	1	(3250)	28	5	—	13
Februarie	5	Sumă	Mai	9	2500	53	6	132500	
Februarie	17	Sumă	Aprilie	1	1500	91	6	136500	
Februarie	20	Sumă	Iunie	1	3200	30	6	96000	
Martie	1	Sold	Martie	1	3250	122	6	396500	
Martie	5	Sumă	Aprilie	25	5400	67	6	361800	
					19850			1547300	
		Numere roşii						**30250**	
								1577550	
		Soldul numerelor						455550	76
		Dobânzi			100				100
					19950				
		Sold creditor			3700				
					23650				

CREDIT

Data		Operaţii	Scadenţa		Suma	Zile	Procente	Numere	Dobânzi
Luna	Ziua		Luna	Ziua					
Ianuarie	5	Sumă	Martie	1	2400	122	6	292800	
Ianuarie	10	Sumă	Mai	21	3000	41	6	123000	
Ianuarie	30	Sumă	Aprilie	25	5000	67	6	335000	
Februarie	10	Sumă	Iunie	15	2000	16	6	32000	
Februarie	25	Sumă	Aprilie	9	1000	83	6	83000	
Martie	10	Sumă	Mai	1	4200	61	6	256200	
Martie	25	Sumă	Iulie	5	6050	5	6	**30250**	
					23650			112200	
		Soldul numerelor						455550	
Iulie	1	Sold din nou			3700			1547300	

D-l S. H. HORNSTEIN a întrebuinţat metoda hamburgeză dar a capitalizat dobânzile dela o epocă la alta, ceea ce nu se face nici chiar de marii cămătari. Ca să scape de numerele roşii, a schimbat data închiderii de 1 Iulie în 5 Iulie, ceea ce este contrariu enunţului problemei. Dobânzile s'au calculat pentru a doua zi după scadenţă, admiţând că bancherul îşi rezervă dreptul de a plăti dobânzile a doua zi după scadenţa fixată.

D-l T. STOICESCU a făcut confuzii între date şi scadenţe şi nu a ţinut seama de starea debitului şi creditului în decursul operaţiunilor.

Această eroare a făcut-o şi D-l M. S. CHERŢMAN şi deaceea alegerea procentelor nu este bine făcută. Soluţia D-sale a fost prezentată cu îngrijire. A utilizat bine metoda directă cu numere roşii.

PROBLEMA 4935. *Ştiind că*

$$A_{n+1} = aA_n + bB_n \quad ; \quad B_{n+1} = A_n + aB_n$$

să se arate că determinantul:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} A_1 & -B_1\sqrt{b} & A_2 & -B_2\sqrt{b} \ldots\ldots A_n & -B_n\sqrt{b} \\ A_{n+1} & -B_{n+1}\sqrt{b} & A_{n+2} & -B_{n+2}\sqrt{b} \ldots\ldots A_{2n} & -B_{2n}\sqrt{b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n^2-n+1} & -B_{n^2-n+1}\sqrt{b} & A_{n^2-n+2} & -B_{n^2-n+2}\sqrt{b} \ldots A_{n^2} & -B_{n^2}\sqrt{b} \end{vmatrix}$$

are valoarea zero oricare ar fi a *şi* b.

HAR. P. IONESCU.

Soluţie. Se vede uşor că elementul din linia $(i+1)$ şi coloana a doua este de forma:

$$A_{in+2} - B_{in+2}\sqrt{b}$$

şi care în virtutea relaţiilor date în enunţul problemei se poate transforma în:

$$A_{in+2} - B_{in+2}\sqrt{b} = aA_{in+1} + bB_{in+1} - \sqrt{b}\,(A_{in+1} + aB_{in+1})$$

sau

$$(1) \quad A_{in+2} - B_{in+2}\sqrt{b} = (a - \sqrt{b}) \cdot (A_{ni+1} - \sqrt{b}B_{ni+1}).$$

Relaţie care arată că elementele coloanei a întâia şi a doua sunt proporţionale, deci determinantul dat are valoarea zero. Dacă în relaţia (1) facem $i = 1$ şi apoi succesiv $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, m$

se vede uşor că un termen oarecare al determinantului este de forma:

$$(a - \sqrt{b})^m.$$

Au dat soluţii bune D-rele: MIOARA I. CRĂCIUNESCU, ANA C. GEREANU, MARGARETA I. ROCIU (studente, Bucureşti), GEORGETA ROMAŞCAN (Şcoala Centrală, Bucureşti) şi D-nii: EMIL BOIAN (lic. milit. Cernăuţi), STELIAN CETĂŢEANU (lic. Gh. Şincai, Bucureşti), AUREL I. CORNĂŢEANU (lic. milit. Iaşi), ION D. DIACONESCU (lic. Traian, T.-Severin), GH. B. IONESCU (lic. Sf. Petru şi Pavel, Ploieşti), VITU I. ILIESCU (lic. milit., Cernăuţi), G. KERCIU (lic. milit. Iaşi), E. MODÂLCĂ (lic. Traian, T.-Severin), ANDREI T. NADOLU (lic. milit. Iaşi), NIC. V. NEDELCU (lic. milit. Cernăuţi), M. POPA (lic. milit. Iaşi), ALEX. I. ROHR (lic. milit. Iaşi), I. STREDER (lic. milit. Iaşi), IOAN DUMITRU-DUICĂ (student, Bucureşti).

H. P. I.

PROBLEMA 4936. *Să se găsească, pentru* $x = 1$, *limita expresiunii*

$$E_k = \frac{\sqrt[n]{(a^{nk}+1)x - \sqrt[n]{(a^{nk+1}+1)x - \sqrt[n]{(a^{nk+2}+1)x - \ldots \sqrt[n]{(a^{np-1}+1)x - \sqrt[n]{x}}}}} - \alpha}{x-1},$$

unde α *este* a^{np-i} *sau* 1, i *fiind numărul radicalilor suprapuşi după cum* i *este par sau impar.* (Enunţ generalizat).

M. GHERMĂNESCU.

Numărul radicalilor suprapuşi fiind $p - k + 1$, să presupunem că acesta est *par*, cazul celalt rezultând din cele ce vor urma.

Luând deci $i = p - k + 1$, deci $\alpha = a^{nk-1}$, putem scrie

$$[a^{nk-1} + (x-1)E_k]^n = (a^{nk}+1)x - \sqrt[n]{(a^{nk+1}+1)x - \sqrt[n]{\ldots}}$$

Adăugând şi scăzând 1 în membrul al doilea, căci acolo avem un număr *impar* de radicali, vom obţine uşor

$$na^{(n-1)nk-1} \lim E_k = (a^{nk}+1) - \lim E_{k+1}.$$

In acelaşi mod, deducem succesiv egalităţile

$$(1)\quad \begin{aligned} n \lim E_{k+1} &= (a^{n^{k+1}} + 1) - \lim E_{k+2},\\ na^{(n-1)n^{k+1}} \lim E_{k+2} &= (a^{n^{k+2}} + 1) - \lim E_{k+3},\\ n \lim E_{k+3} &= (a^{n^{k+3}} + 1) - \lim E_{k+4},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ n \lim E_{k+2j-1} &= (a^{n^{k+2j-1}} + 1) - \lim E_{k+2j}, \end{aligned}$$

din care rezultă

$$(2)\quad \lim E_k = \frac{a^{n^k}+1}{na^{(n-1)n^{k-1}}} - \frac{a^{n^{k+1}}+1}{n^2a^{(n-1)n^{k-1}}} + \frac{a^{n^{k+2}}+1}{n^3a^{(n-1)(n^{k-1}+n^{k+1})}}$$

$$- \frac{a^{n^{k+3}}+1}{n^4a^{(n-1)(n^{k-1}+n^{k+1})}} + \ldots + \frac{a^{n^{k+2j-2}}+1}{n^{2j-1}a^{(n-1)(n^{k-1}+n^{k+1}+\ldots+n^{k+2j-1})}}$$

$$- \frac{a^{n^{k+2j-1}}+1}{n^{2j}a^{(n-1)(n^{k-1}+n^{k+1}+\ldots+n^{k+2j-1})}}$$

$$+ \frac{1}{n^{2j}a^{(n-1)(n^{k-1}+n^{k+1}+\ldots+n^{k+2j-1})}} \lim E_{k+2j},$$

pentru cazul $p - k$ *impar*, iar pentru $p - k$ *par*,

$$(3)\quad \lim E_k = \frac{a^{n^k}+1}{n} - \frac{a^{n^{k+1}}+1}{n^2a^{(n-1)n^k}} + \frac{a^{n^{k+2}}+1}{n^3a^{(n-1)n^k}}$$

$$- \frac{a^{n^{k+3}}+1}{n^4a^{(n-1)(n^k+n^{k+2})}} + \frac{a^{n^{k+4}}+1}{n^5a^{(n-1)(n^k+n^{k+2})}}$$

$$+ \ldots - \frac{a^{n^{k+2j-1}}+1}{n^{2j}a^{(n-1)(n^k+n^{k+2}+\ldots+n^{k+2j-2})}} + \frac{a^{n^{k+2j}}+1}{n^{2j+1}a^{(n-1)(n^k+n^{k+2}+\ldots+n^{k+2j-2})}}$$

$$- \frac{1}{n^{2j+1}a^{(n-1)(n^k+n^{k+2}+\ldots+n^{k+2j-2})}} \lim E_{k+2j+1},$$

egalitate care se obţine înlocuind în $\lim E_{k+1}$, dedusă din (1), $k+1$ prin k.

In cazul $p - k + 1 = 2m$, să luăm în (2), $2j = p - k - 1 = 2(m-1)$, iar în cazul $p - k = 2m$ să luăm în (3), $2j = p - k - 2 = 2(m-1)$; suntem conduşi, în ambele cazuri, la calculul limitei

$$\lim_{x=1} \frac{\sqrt[n]{(a^{n^{p-1}}+1)x - \sqrt[n]{x} - a^{n^{p-2}}}}{x-1} = \frac{a^{n^{p-1}} + 1 - \frac{1}{n}}{na^{(n-1)n^{p-2}}}.$$

Notă. 1°. Dacă luăm $k = 1$, regăsim forma particulară propusă.

2°. Pentru $a = k = 1$, se regăseşte problema 26, Cap. XX, din „Culegere de probleme de Algebră", de A. IOACHIMESCU.

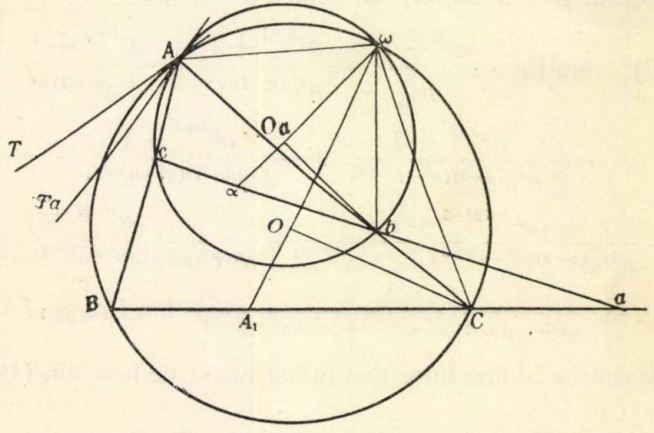
3°. D. MĂRCULESCU ORIGEN a observat că problema propusă este o generalizare a celei din „Culegere", de mai sus, a urmat calea indicată acolo pentru cazul particular tratat, dar n'a observat că la fiecare egalitate succesivă (1), α este altul decât a, anume $\alpha = a^{p^{p-i}}$, i fiind numărul radicalilor suprapuşi şi a ajuns, evident, la un rezultat eronat. M. G.

PROBLEMA 5036. *Fie* $(\Delta) \equiv abc$ *o transversală a triunghiului* $(T) \equiv ABC$ *înscris în cercul* (O), (O_a), (O_b), (O_c) *cercurile circumscrise triunghiurilor* $Abc, \ldots$ *şi* ω *puncul lui* MIQUEL *al sistemului* $(T - \Delta)$. *Se consideră intersecţiile* $(\omega O_a, \Delta) \equiv \alpha, \ldots$ $(\omega O, BC) = A_1, \ldots$ *Cercurile* $a\alpha A_1$ *şi analoagele trec prin* ω.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţia I-a. Unghiul $\alpha\omega A_1 = O_a\omega O$ este unghiul sub care se taie cercurile (O), (O_a); dacă T şi T_a sunt tangentele în A la cele două cercuri, avem

$$\sphericalangle TAB = \sphericalangle ACB \quad , \quad \sphericalangle T_a A_c = \sphericalangle Abc$$



ca subîntinzând coarde egale; deci

$$\sphericalangle TAT_a = \sphericalangle ACB - \sphericalangle Abc = \sphericalangle bac = \sphericalangle \alpha a A_1$$

în concluzie cercurile (O), (O_a) se taie sub unghiul coardelor BC, bc;

$$\sphericalangle \alpha\omega A_1 = \sphericalangle \alpha a A_1$$

şi patrulaterul $\omega\alpha A_1 a$ este inscriptibil.

Soluția II-a. Triunghiurile isoscele ωOC, $\omega O_a b$ sunt asemenea având unghiurile O, O_a egale (cu dublul unghiului $\omega A bC$); deci și unghiurile $O_a \omega b$, $O\omega C$ sunt egale sau scoțând unghiul comun $O\omega b$, rămâne

$$\sphericalangle O_a \omega O = \sphericalangle b\omega C$$

pe de altă parte, din patrulaterul inscriptibil $bCa\omega$, avem

$$\sphericalangle b\omega C = \sphericalangle baC$$

de unde avem ca mai sus unghiurile egale $\alpha\omega A_1$, $O_a \omega O$, baC, $\alpha a A_1$ și patrulaterului $\omega\alpha A_1 a$ este inscriptibil.

Observare. 1. Soluția a II-a a fost dată de D-l HORIA M. BODNĂRESCU (pe atunci la liceul T. Maiorescu, București).

2. O bună soluție o dă și D-l M. AL. VASILESCU-STABU (liceul Gh. Lazăr, București), observând că ωb, ωC sunt coarde comune ale perechilor de cercuri (O_a), (O_c) și (O), (O_c) deci $O_a O_c$, OO_c sunt perpendiculare pe ωb, ωC; pe de altă parte punctele $\omega OO_a O_c$ sunt pe cercul MIQUEL, deci

$$\sphericalangle \alpha\omega A_1 = \sphericalangle O_a \omega O = \sphericalangle O_a O_c O = \sphericalangle b\omega C = \sphericalangle baC = \sphericalangle \alpha a A_1, \ldots$$

3. Alte soluții date de D-nii: PANTELIMON V. CONSTANTIN (lic. militar Iași), MIRCEA D. POPA (lic. militar Iași) și MIHAIL I. TREFILOV (lic. Brăila).

PROBLEMA 5109. *Se dă triunghiul* ABC *și* A′, B′, C′ *trei puncte pe laturile* BC, CA, AB, Δ *axul radical al cercurilor*

$$ABC,\ A'B'C' — A_1,\ B_1,\ C_1,$$

punctele în care Δ *întâlnește dreptele*

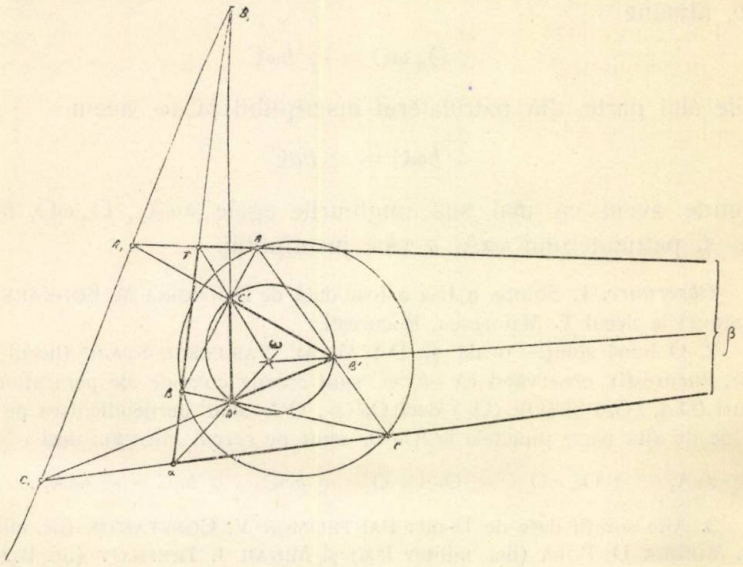
$$B'C',\ C'A',\ A'B' — \alpha\,(BB_1,\ CC_1),\ \beta\,(CC_1,\ AA_1)\ \gamma\,(AA_1,\ BB_1).$$

Să se arate că dreptele $\alpha A'$, $\beta A'$, $\gamma C'$ *sunt concurente.*

C. IONESCU-BUJOR.

Soluție. Considerând figura construită în condițiile enunțului observăm că în triunghiurile A′B′C′ și $\alpha\beta\gamma$ laturile corespunzătoare, $A'B' — \alpha\beta$ $B'C' — \beta\gamma$, $C'A' — \gamma\alpha$, sunt concurente în punctele C_1, A_1, B_1 colineare — pe Δ. După reciproca teoremei lui DESARGUES rezultă că dreptele $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$, cari unesc vârfurile lor corespunzătoare sunt concurente într'un punct ω — centrul lor de omologie.

Au soluţionat problema D-nii: DRĂGHICESCU PAUL, POPA D. MIRCEA şi ROHR I. ALEXANDRU dela Liceul militar Iaşi, VASILESCU-STABU AL. M. (Liceul G. Lazăr, Bucureşti).



D-nii POPA D. MIRCEA şi ROHR I. ALEXANDRU au dovedit proprietatea mai generală considerând dreapta Δ oarecare, iar punctele A', B', C' ori cum în planul triunghiului ABC.

Intr'o notă ce va urma vom stabili o importantă proprietate a punctului ω al problemei.

C. I. B.

PROBLEMA 5232. *Dacă mai mulţi lucrători ar lucra toţi împreună, ar termina o lucrare într'un anumit număr de zile. Ei însă lucrează toţi împreună numai în prima zi. In ziua a doua pleacă un lucrător, în a treia zi încă unul şi plecând astfel în fiecare zi încă unul, când pleacă ultimul lucrător se termină şi lucrarea, încă cu trei zile mai târziu decât dacă ar fi lucrat toţi împreună.*

Să se afle câţi lucrători au fost şi câte zile ar fi lucrat dacă nu pleca nici unul.

EM. MORŢUN.

Soluție dată de D-nii: ST. CETĂȚEANU (Elev inginer, București); C. V. DIACONESCU (Liceul „Ștefan cel Mare", Cernăuți); AL. I. ROHR, MIRCEA D. POPA (Liceul militar, Iași) și D. D. BOIANGIU. (Liceul „Traian", T.-Severin).

Fie x numărul lucrătorilor și a cât lucrează fiecare din ei zilnic, presupunând că toți lucrează la fel. Lucrarea a fost terminată în x zile, conform enunțului. Dacă ar fi lucrat toți lucrătorii ei ar fi terminat lucrarea în $x-3$ zile. Avem deci ecuația

$$ax(x-3) = ax + a(x-1) + \ldots + 2a + a$$

$$\therefore\ x(x-3) = \frac{x(x+1)}{2}\ ,\quad x = 7.$$

Deci au fost 7 lucrători, care ar fi terminat lucrarea în 4 zile, dacă n'ar fi plecat nici unul de la lucru.

Au rezolvat problema pe căi analoage D-nii: I. G. COSTESCU (Liceul „M. Eminescu", București); A. MATEESCU (Liceul militar, Craiova); ADR. POPESCU (S.-locot.); A. N. POPA (Liceul militar, Iași); GR. GR. FILITI (Liceul „Sf. Andrei", București); M. I. TREFILOV (Liceul „N. Bălcescu", Brăila); C. CRISTEA (Liceul militar, Târgoviște).

Au rezolvat problema stabilind ecuații de gradul al doilea D-șoara LYDIA M. TUDORAN (Șc. Centrală de fete, București) și D-nii: C. GH. CRUCEANU (Liceul „Traian", T.-Severin) și C. C. MIHĂILESCU (Liceul Câmpina); V. ALDEA (Liceul militar, Târgoviște).

PROBLEMA 5297. *Să se determine* α, *așa fel ca forma patratică*

$$F \equiv x^2 + 16y^2 + 5z^2 + 12t^2 + 2\alpha xy + 2\alpha zt + 4xz - 6yt$$

să se descompună într'o sumă de trei patrate distincte, care să se determine.

Să se determine apoi valorile lui x, y, z *în funcțiune de* t, *pentru care* $F \equiv 0$.

M. GHERMĂNESCU.

Pentru ca F să se descompună într'o sumă de trei patrate distincte, este necesar și suficient ca descriminantul formei să fie nul, unul din minorii de ordinul al treilea fiind diferit de zero.

Avem deci

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 2 & 0 \\ \alpha & 16 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & \alpha \\ 0 & -3 & \alpha & 12 \end{vmatrix} = 0,$$

sau

$$(1) \qquad \alpha^4 - 64\alpha^2 + 183 = (\alpha^2 - 3)(\alpha^2 - 61) = 0,$$

deci $\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, $\alpha_{3,4} = \pm\sqrt{61}$ şi se constată uşor, cu aceste valori, că cel puţin un minor de ordinul al treilea din determinantul de mai sus este diferit de zero.

Pentru a efectua descompunerea, vom utiliza procedeul lui GAUSS, scriind succesiv

$$\begin{aligned} F &= x^2 + 2(\alpha y + 2z)x + 16y^2 + 5z^2 + 12t^2 + 2\alpha zt - 6yt \\ &= (x + \alpha y + 2z)^2 + (16 - \alpha^2)y^2 + z^2 + 12t^2 - 4\alpha yz + 2\alpha zt - 6yt \\ &= (x + \alpha y + 2z)^2 + z^2 - 2(2\alpha y - \alpha t) + (16 - \alpha^2)y^2 + 12t^2 - 6yt \\ &= (x + \alpha y + 2z)^2 + (z - 2\alpha y + \alpha t)^2 + (16 - 5\alpha^2)y^2 + 2(2\alpha^2 - 3)yt \\ &\quad + (12 - \alpha^2)t^2. \end{aligned}$$

Pentru ca trinomul

$$(16 - 5\alpha^2)y^2 + 2(2\alpha^2 - 3)yt + (12 - \alpha^2)t^2$$

să se reducă la un singur patrat, este necesar şi suficient să avem

$$(2\alpha^2 - 3)^2 - (16 - 5\alpha^2)(12 - \alpha^2) = 0,$$

care conduce la ecuaţia (1). Vom avea deci

$$(2) \quad F \equiv (x + \alpha y + 2z)^2 + (z - 2\alpha y + \alpha t)^2 + \frac{1}{16 - 5\alpha^2}[(16 - 5\alpha^2)y + (2\alpha^2 - 3)t]^2,$$

deci

$$F_{1,2} \equiv (x \pm \sqrt{3}\, y + 2z)^2 + (z \mp 2\sqrt{3}\, y \pm \sqrt{3}\, t)^2 + (y + 3t)^2,$$

$$F_{3,4} \equiv (x \pm \sqrt{61}y + 2z)^2 + (z \mp 2\sqrt{61}y \pm \sqrt{61}t)^2 - \frac{1}{289}(289y + 119t)^2.$$

Formele F_1, F_2 fiind sume de patrate *pozitive*, ele sunt identic nule dacă

$$x \pm \sqrt{3}y + 2z = 0 \quad , \quad z \mp 2\sqrt{3}y \pm \sqrt{3}t = 0 \quad , \quad y + 3t = 0,$$

din care deducem

$$(3) \qquad x = \pm 17\sqrt{3}t \quad , \quad y = -3t \quad , \quad z = \mp 7\sqrt{3}t.$$

Pentru formele $F_{3,4}$, însemnând cu P_1, P_2, P_3 cele trei patrate componente, va trebui să avem

$$P_3^2 = 17^2 P_1^2 + 17^2 P_2^2,$$

ecuație pitagoriană, care ne va da

$$P_3 = k(u^2 + v^2) \quad , \quad 17P_1 = k(u^2 - v^2) \quad , \quad 17P_2 = 2kuv$$

sau

$$P_3 = k(u^2 + v^2) \quad , \quad 17P_1 = 2kuv \quad , \quad 17P_2 = k(u^2 - v^2)$$

k, u, v fiind numere arbitrare. Avem astfel de rezolvat unul din sistemele

$$(a) \qquad \begin{aligned} 17(x \pm \sqrt{3}y + 2z) &= k(u^2 - v^2), \\ 17(z \mp 2\sqrt{3}y \pm \sqrt{3}t) &= 2kuv, \\ y + 3t &= k(u^2 + v^2), \end{aligned}$$

sau

$$(b) \qquad \begin{aligned} 17(x \pm \sqrt{3}y + 2z) &= 2kuv, \\ 17(z \mp 2\sqrt{3}y \pm \sqrt{3}t) &= k(u^2 - v^2), \\ y + 3t &= k(u^2 + v^2), \end{aligned}$$

din care vom deduce x, y, z în funcțiune de k, u, v, t.

Notă. D-nii A. JILETCOVICI, C. PANTELIMON, M. POPA și M. RUSU fără a calcula descriminantul formei patratice F, au aplicat metoda lui GAUSS, obținând ecuația (1) și descompunerea (2). Pentru $\alpha = \pm\sqrt{3}$ au găsit sistemul de soluții (3), dar pentru $\alpha = \pm\sqrt{61}$ n'au observat că F nu mai este o sumă de patrate pozitive și au procedat ca în primul caz, găsind soluțiile ce se obțin din sistemele (*a*) sau (*b*) făcând $k = 0$.

M. G.

EXERCIȚII

1. Notațiile fiind cele obișnuite într'un triunghiu, să se demonstreze relația:

$$\left[\frac{r_b - r_c}{\sin\frac{B-C}{2}}\right]^2 + \left[\frac{r_c - r_a}{\sin\frac{C-A}{2}}\right]^2 - \left[\frac{r_a - r_b}{\sin\frac{A-B}{2}}\right]^2 = 4 \cdot R \cdot r_c .$$

TUDOR STOICESCU.

R. Din relațiile cunoscute:

$$r_a = 2R \sin\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} \ldots \text{ etc.},$$

deduc:

$$r_a - r_b = 2R \cos\frac{C}{2}\left[\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\right] = 2R \cos\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

sau:

$$\frac{r_a - r_b}{\sin\frac{A-B}{2}} = 2R\cos\frac{C}{2} \quad \therefore \quad \left[\frac{r_a - r_b}{\sin\frac{A-B}{2}}\right]^2 = 4 \cdot R^2 \cdot \cos^2\frac{C}{2};$$

permutând circular și ținând seamă de semnele din enunț, avem:

$$\left[\frac{r_b - r_c}{\sin\frac{B-C}{2}}\right]^2 + \left[\frac{r_c - r_a}{\sin\frac{C-A}{2}}\right]^2 - \left[\frac{r_a - r_b}{\sin\frac{A-B}{2}}\right]^2 = 4 \cdot R^2\left[\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} - \cos^2\frac{C}{2}\right];$$

ori $$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} - \cos^2\frac{C}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(ex. 6 (*d*) pag. 20, Culegere de Probleme de Trigonometrie partea I-a, V. CRISTESCU, rev. și ad. de D-l GH. TH. GHEORGHIU).

Deci

$$\left[\frac{r_b - r_c}{\sin\frac{B-C}{2}}\right]^2 + \left[\frac{r_c - r_a}{\sin\frac{C-A}{2}}\right]^2 - \left[\frac{r_a - r_b}{\sin\frac{A-B}{2}}\right]^2$$

$$= 4 \cdot R^2 \cdot 2 \cdot \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 4 \cdot R^2 \cdot \frac{r_c}{R} = 4 \cdot R \cdot r_c;$$

rotativ deducem încă 2 relații de felul celei din enunț, egale cu $4Rr_a$ și $4Rr_b$.

PROBLEME PROPUSE

3920 *). Să se găsească ecuaţia conicilor care au un vârf în originea O şi care trec prin punctul dat A $(0,2a)$.

2°. Să se scrie ecuaţia parabolelor, care au aceste proprietăţi.

3°. Să se scrie ecuaţia focală a acestor parabole şi să se afle coordonatele focarului şi ecuaţia directoarei.

4°. Să se găsească locul focarelor.

5°. Să se afle înfăşurătoarea directoarelor.

6°. Să se determine locul intersecţiei directoarei, cu axa parabolei.

7°. Să se afle locul polului dreptei OA în raport cu aceste parabole.

N. ABRAMESCU.

4602 **) Doi gimnastici de aceeaşi greutate G se atârnă de capetele unei funii trecute peste un scripete vertical de rază r, mobil în jurul centrului său. La un moment dat, ei încep să se urce respectiv cu iuţelile v_1 şi v_2 $(v_1 > v_2)$ în raport cu funia.

Să se arate că la această competiţiune, gimnasticii nu se pot întrece unul pe altul dacă greutatea scripetului este neglijabilă. Ce se va întâmpla însă dacă scriptele este considerat disc plin de greutate Q?

Frecarea pe axul scripetelui şi rezistenţa aerului se vor neglija.

ALEXANDRU STOENESCU.

5362. Diferenţa a două numere este 24. Dacă se adună cel mai mare comun divizor al acelor numere cu cel mai mic comun multiplu al lor se găseşte suma 312. Se cer acele numere.

I. IONESCU.

5363. Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 luate o singură dată, să se formeze un patrat perfect şi rădăcina sa.

STELIAN CETĂŢEANU.

5364. Dacă unui număr prim de patru cifre îi suprimăm pe rând câte o cifră, începând din dreapta sau din stânga lui, obţinem respectiv numere prime de trei, două şi o cifră.

Câte numere de patru cifre satisfac acestei condiţiuni?

COMANDOR I. LINTEŞ.

*) In locul problemii *3920* (*Vol. 35*, p. 440), care se anulează.

**) Această problemă înlocuieşte problema cu acelaşi număr (Vol. XLI, pag. 216), care se anulează.

5365. In cercul O să se înscrie coardele AB, BC, CD egale între ele şi aşa încât prima şi ultima să se întâlnească într'un punct P dat în plan.

G-L GH. BUICLIU.

5366. Notând cu D, E, F punctele de contact ale cercului înscris I cu laturile triunghiului ABC; cu D_a, E_a, F_a punctele de contact ale cercului exînscris I_a, etc., cu R raza cercului circumscris, iar cu p semiperimetrul triunghiului ABC, să se demonstreze:

1°. relaţia între arii:

$$(DEF) \cdot p = (D_a E_a F_a) \cdot (p - a) = (D_b E_b F_b)(p - b)$$
$$= (D_c E_c F_c)(p - c) = \frac{(ABC)^2}{2R}.$$

2°. aria triunghiului de referinţă este medie proporţională între ariile (DEF) şi $(I_a I_b I_c)$.

PETRE BOLDESCU.

5367. Se consideră hiperbolele echilatere, cu aceleaşi direcţii asimptotice, circumscrise celor patru triunghiuri formate de laturile unui patrulater.

1°. Hiperbolele considerate au un punct comun P.

2°. Locul lui P, când direcţia asimptotelor variază, este ortocentroidala patrulaterului.

I. I. ŢIŢEICA.

5368. Polara unui punct variabil M în raport cu elipsa (E), de centrul O, o taie în punctele A şi B.

Să se găsească locul punctului M, ştiind că suprafaţa elipsei (E) este egală cu suprafaţa patrulaterului MAOB.

I. C. VASILIU.

5369. Să se determine a şi b astfel, ca între rădăcinile ecuaţiilor

$$(a - b)x^3 + (b^2 - 5)x^2 + (2a + b)x - a = 0$$
$$(a - b)y^2 - 2aby + (a + b) = 0$$

să avem relaţiile

$$y_1 = x_1 \quad , \quad y_2 = x_2 + x_3 .$$

EMILIAN MEREUŢĂ.

5370. Să se calculeze determinantul $\Delta_{p,q}$, care se obține din determinantul

$$D_n = \begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \ldots\ldots & n! \\ 2! & 3! & 4! \ldots\ldots & (n+1)! \\ 3! & 4! & 5! \ldots\ldots & (n+2)! \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ n! & (n+1)! & (n+2)! \ldots & (2n-1)! \end{vmatrix}$$

suprimând linia de rangul p și coloana de rangul q.

G. G. CONSTANTINESCU.

5371. Fie $W(x)$ determinantul lui WRONSKI al polinoamelor $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$, toate de gradul n, deci

$$W(x) = \begin{vmatrix} P_1(x) & P_2(x) \ldots\ldots & P_n(x) \\ P_1'(x) & P_2'(x) \ldots\ldots & P_n'(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ P_1^{(n-1)}(x) & P_2^{(n-1)}(x) \ldots & P_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Să se demonstreze că $[W(x)]^n$ se descompune într'un produs de n factori lineari de forma

$$\alpha_1 P_1(x) + \alpha_2 P_2(x) + \ldots + \alpha_n P_n(x)$$

cu coeficienții α_i constanți.

TIBERIU POPOVICIU.

5372. Să se stabilească inegalitatea

$$(a^2 - bc\cos A)^2 + (b^2 - ca\cos B)^2 + (c^2 - ab\cos C)^2 \geqq 4S^2,$$

notațiile fiind cele obișnuite în triunghiu.

S-LT. M. GRUMĂZESCU.

5373. Să se demonstreze că, dacă într'un triunghiu avem simultan relațiile

$$\cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = \frac{p}{a} + \frac{1}{2}$$

$$a(2b - a)\operatorname{tg} 67^\circ 30' = 2b^2,$$

triunghiul este triunghiu dreptunghiu isoscel.

Să se dea o interpretare relației a doua.

VIRGIL GHIȚESCU.

5374. Intr'un vas cilindric vertical se află lichid până la înălțimea I. Dacă vasul se rotește, suprafața liberă capătă forma unui paraboloid de rotație, a cărui înălțime fie h.

1°. Vârful paraboloidului se află la înălțimea $\frac{h}{2}$ de vechiul nivel.

2°. Iuțeala tangențială periferică a vasului este egală cu iuțeala unui mobil greu căzând liber dela înălțimea h, după ce a parcurs această înălțime.

LOCOT. I. GH. ZAMFIRESCU.

5375. O bilă grea A, prinsă cu un fir inextensibil, de greutate neglijabilă, de un punct O, este lăsată liberă în poziția OA. In mișcarea sa ulterioară bila se izbește de peretele vertical OB și se reîntoarce în poziția extremă OA'. Se dau:

$$\sphericalangle AOB = \alpha \quad , \quad \sphericalangle A'OB = \beta.$$

Să se determine coeficientul k de elasticitate dintre bilă și perete.

Mișcarea bilei se face într'un plan vertical normal peretelui. Aplicație:

$$\alpha = 60^0 \quad ; \quad \beta = 45^0.$$

ALEXANDRU STOENESCU.

5376. Un punct material M se mișcă cu frecare pe suprafața unui con de gradul al doilea, raportat la axele sale, sub acțiunea unei forțe a cărei direcțiune face cu axele unghiuri cu cosinusurile a, b, c date.

Să se determine regiunea de echilibru pe con.

M. GHERMĂNESCU.

ERATĂ. In Vol. XLV, pag. 672 Probl. **5361** se va citi *intervalele de variație* în loc de *laturile*...

BURSE ŞI PREMII DIN FONDURILE SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ“

REGULAMENTUL FONDULUI « ANGHEL SALIGNY »

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“ primind donaţiunea D-lui *I. Ionescu*, constitue — în conformitate cu dorinţa donatorului — un fond denumit fondul „*Anghel Saligny*“ al cărui venit să servească la publicarea de cărţi tehnice conform art. 6 din actul de donaţie şi în consecinţă înfiinţează o „*Bibliotecă tehnică a Gazetei Matematice*“.

Art. 2. — Toate cărţile tipărite din acest fond vor purta pe copertă în frunte următoarea titulatură: „*Biblioteca tehnică a Gazetei Matematice*“ (tipărită din fondul „*Anghel Saligny*“).

Art. 3. — Biblioteca va avea formatul 120×185 sau 175×260 mm., după felul şi întinderea manuscriselor. Dimensiunile se înţeleg pentru cărţile broşate şi tăiate.

Art. 4. — Volumele se vor da în comerţ legate în pânză de culoare cenuşiu închis şi vor avea imprimate în auriu, inscripţiunile ce se vor stabili pentru fiecare publicaţiune în parte.

Art. 5. — Manuscrisele se adresează delegaţiunii, care convoacă o Adunare generală extraordinară pentru a alege o Comisiune de 3 membri, care se completează cu casierul şi care dă în mod definitiv avizul dacă lucrarea poate să fie tipărită din fondul „*Anghel Saligny*“; aceasta atât din punct de vedere financiar cât şi din punct de vedere al valorii ştiinţifice a lucrării.

Art. 6. — Comisiunea nu ia în considerare decât lucrările complete de matematici aplicate sau cuprins tehnic în legătură cu aceste ştiinţe.

Art. 7. — Dacă la prezentarea manuscrisului nu sunt sume disponibile din venitul fondului „*Anghel Saligny*“ pentru tipărire şi dacă Comisiunea însărcinată cu cercetarea lui opinează că e bine să fie tipărit, atunci delegaţiunea Societăţii va putea împrumuta cu dobândă de 5% cu aprobarea unei Adunări generale suma necesară tipăririi, din numerarul disponibil al „*Gazetei Matematice*“.

Art. 8. — Odată cu depunerea manuscrisului, autorul este obligat să declare în scris că se va supune dispoziţiilor acestui regulament şi ale actului de donaţie al fondului şi că nu va tipări

o a doua ediţie înainte de epuizarea ediţiei tipărită în această bibliotecă.

Art. 9. — In regulă generală se preferă lucrările membrilor Societăţii „*Gazeta Matematică*".

Art. 10. — Comisiunea pentru cercetarea lucrării, hotărăşte pentru fiecare ediţiune tipărită conform acestui regulament numărul volumelor, formatul (conform art. 3), inscripţiunile (conform art. 4) şi preţul. Deasemenea Comisia va urmări tipărirea şi va lua la timp dispoziţii speciale necesare.

Art. 11. — (art. 4 din actul de donaţie al fondului „*Anghel Saligny*"). — Sumele ce se încasează din vânzarea cărţilor după ce se scot din ele cheltuelile de cost, comision şi expediţie, se distribue în modul următor:

a) 10% autorului respectiv;

b) 20% Societăţii „*Gazeta Matematică*" pentru sporirea capitalului ei;

c) 20% fondului „*Anghel Saligny*" pentru sporirea lui continuă, şi

d) 50% drept venit al fondului „*Anghel Saligny*", întrebuinţându-se prin urmare pentru noui publicaţiuni.

Art. 12. — Autorul primeşte gratuit câte 10 volume din lucrările lui, la fiecare ediţie.

REGULAMENTUL FONDULUI BURSEI «PROFESOR ION IONESCU»

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*" primeşte să administreze fondul instituit de un grup de foşti elevi ai D-lui Profesor *Ion Ionescu,* reprezentat prin D-nii *Gh. Em. Filipescu, A. Ioanovici, H. Theodoru* şi *D. Stan,* membri ai Societăţii *Gazeta Matematică,* din venitul căruia să se acorde o bursă anuală elevilor Şcoalei Politehnice Regele Carol II.

Bursa va purta numele: *Bursa Profesor Ion Ionescu* şi este menită, în conformitate cu dorinţa donatorilor, să perpetueze tradiţia muncii şi disciplinei introduse de D-nul Prof. *Ion Ionescu* în vechea Şcoală Naţională de Poduri şi Şosele şi continuate în Şcoala Politehnică.

Art. 2. — Fondul iniţial este constituit din efecte publice 3% (Renta consolidării) în valoare nominală de 1.000.000 lei.

Art. 3. — Venitul acestui fond, micşorat cu cotele prevăzute la art. 7 din Regulamentul general al Administrării Fondurilor *Gazetei Matematice*, se acordă sub formă de bursă, plătită lunar, în rate egale, timp de 9 luni, unuia din elevii cei mai merituoşi ai Secţiei de Construcţii dela Şcoala Politehnică „Regele Carol II", care satisface următoarele condiţii:

a) Să fie român.

b) Să fi fost cel puţin 2 ani corespondent al *Gazetei Matematice.*

c) Să fie elev în anul III sau IV al Şcoalei.

d) Să fi promovat anii anteriori în timpul minim regulamentar.

Art. 4. — Bursa este unică şi indivizibilă.

Art. 5. — Dacă într'un an nu se poate acorda bursa, ea se va acorda în anii următori elevilor care urmează în îndeplinirea condiţiilor dela art. 3. In nici un caz venitul fondului nu se capitalizează.

Art. 6. — In cazul când elevul care a avut bursa în anul III, termină toate îndatoririle din programul Şcoalei înainte de începerea cursurilor anului IV, el va continua să primească bursa, în mod automat, şi în anul IV.

Bursa poate fi suprimată în cursul anului, dacă elevul căruia i s'a atribuit, dă vădite dovezi că nu-şi mai îndeplineşte toate îndatoririle şcolare. In acest caz bursa poate fi acordată altui elev pentru restul anului.

Art. 7. — Bursa se acordă de o Comisiune, compusă din: 2 membri ai *Gazetei Matematice* dintre care unul trebue să facă parte din Delegaţie, desemnaţi de prima Adunare generală anuală; toţi profesorii şi conferenţiarii Şcoalei Politehnice dela Secţia Construcţiilor, activi şi onorari, care sunt membri ai *Gazetei Matematice.*

Aceeaşi Comisiune va hotărî şi asupra cazurilor de retragere a bursei, prevăzute la art. 6.

Art. 8. — Bursa se achită de Casierul *Gazetei Matematice* direct elevului, la 15 a fiecărei luni, începând cu 15 Octomvrie şi terminând cu 15 Iunie.

Art. 9. — Fondul iniţial poate fi mărit prin donaţiuni ulterioare, acceptate de Societatea *Gazeta Matematică*, conform cu prevederile ei statutare. Veniturile produse de aceste sporiri, se vor capitaliza

până ce vor permite acordarea unei burse de valoare egală, în condiţiunile acestui Regulament.

Art. 10. — In caz de disolvare a Societăţii *Gazeta Matematică*, fondul se va trece în Administrarea Şcolii Politehnice „Regele Carol II", din Bucureşti, cu acelaşi regulament.

REGULAMENTUL PREMIULUI DE ARITMETICĂ

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*" acordă un premiu anual de aritmetică în valoare de 5.000 (cinci mii) lei, din venitul fondului său general de premii.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unor lucrări referitoare la aritmetică dintre cele publicate în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu din ţară.

Art. 4. — In cazul neacordării premiului într'un an, sau mai mulţi ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăoga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor, raportul indicând lucrările ce se propun spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiunii se publică în Nr. 7 al „*Gazetei Matematice*", care apare în luna Martie.

REGULAMENTUL PREMIULUI GHEORGHE ŢIŢEICA

Art. 1. — Pentru a cinsti memoria marelui „*Profesor Gheorghe Ţiţeica*", Societatea „*Gazeta Matematică*" acordă un premiu anual de geometrie elementară în valoare de 5.000 (cinci mii) lei, din venitul fondului său general de premii.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unor lucrări referitoare la geometrie elementară, dintre cele publicate în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu din ţară.

Art. 4. — In cazul neacordării premiului într'un an, sau mai mulţi ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăuga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor, raportul indicând lucrările ce se propun spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiunii se publică în Nr. 11 al „*Gazetei Matematice*“, care apare în luna Iulie.

REGULAMENTUL PREMIULUI DE ALGEBRĂ

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“ acordă un premiu anual de algebră în valoare de 5.000 (cinci mii) lei, din venitul fondului său general de premii.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unor lucrări referitoare la algebră, dintre cele publicate în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu din ţară.

Art. 4. — In cazul neacordării premiului într'un an, sau mai mulţi ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăoga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor, raportul indicând lucrările ce se propun spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiunii se publică în Nr. 9 al „*Gazetei Matematice*“, care apare în luna Mai.

REGULAMENTUL PREMIULUI « VASILE CONTA »

Art. 1. — In dorinţa de a permanetiza acordarea unui premiu anual pentru lucrări de filosofia matematicilor, în memoria ilustrului

filosof român *Vasile Conta*, premiu instituit de către *Ana Conta Kernbach*, sora ilustrului filosof, în timpul vieţii ei, prin o contribuţie viageră anuală la Societatea „*Gazeta Matematică*“, aceasta va acorda în continuare, în fiecare an, un premiu denumit „*Vasile Conta*“ în valoare de 4.000 (patru mii) lei.

Art. 2. — Premiul se acordă pentru a recompensa cea mai bună lucrare originală de filosofia matematicilor, adusă la cunoştinţa Societăţii în cursul fiecărui an până la 1 Iulie.

Dacă până la acea dată nu se prezintă nicio lucrare, se va aştepta data de 1 Iulie a primului an când se va prezenta o asemenea lucrare.

Art. 3. — Prima Adunare generală anuală alege o Comisiune compusă din doi membri şi un delegat, care examinează lucrările; mandatul acestei Comisiuni este limitat la un an, chiar dacă nu se acordă premiul.

Art. 4. — Comisiunea prezintă celei de-a doua Adunări generale din acel an, un raport prin care propune spre premiere una din lucrările prezentate, justificând alegerea.

Art. 5. — In cazul neacordării premiului într'un an sau în mai mulţi ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăuga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se, după propunerea Comisiunii şi aprobarea Adunării generale, unul sau mai multe premii de valoare minimă dela art. 1.

Art. 6. — Autorii lucrărilor trebue să fie români şi să-şi fi făcut studiile secundare în ţară.

Art. 7. — Raportul Comisiunii se publică în numărul din Noemvrie al „*Gazetei Matematice*“.

REGULAMENTUL PREMIULUI « SPIRU HARET »

Art. 1. — Pentru a cinsti memoria marelui profesor şi reformator al învăţământului, *Spiru Haret*, primul român doctor în ştiinţele matematice, Societatea „*Gazeta Matematică*“ acordă în fiecare an un premiu denumit „*Spiru Haret*“, în valoare de 5.000 (cinci mii) lei.

Acest premiu va fi constituit din venitul sumelor adunate pentru fondul „*Spiru Haret*“, completat eventual de noi donaţii sau de Societatea „*Gazeta Matematică*“ din venitul fondului său general de premii, până la suma de mai sus.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unei lucrări de mecanică sau astronomie, dintre cele publicate în „*Gazeta Matematică*“, în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu, de Şcoală Militară, de Şcoală Politehnică sau student la o Facultate de ştiinţe din ţară.

Art. 4. — In cazul când într'unul sau mai mulţi ani de-a-rândul premiul n'ar putea fi decernat, valoarea lui pe acel an sau pe acei ani, se va adăuga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisiune, compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor, raportul indicând lucrările ce se propun spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiei se publică în Nr. 12 al „*Gazetei Matematice*“, care apare în luna August.

REGULAMENTUL PREMIULUI «V. CRISTESCU»

Art. 1. — Pentru a cinsti memoria Inginerului *V. Cristescu*, membru fondator al „*Gazetei Matematice*“, în jurul căreia a animat şi activat intens şi neîntrerupt peste 33 ani, Societatea „*Gazeta Matematică*“ acordă un premiu anual denumit „*Vasile Cristescu*“ în valoare de 5.000 (cinci mii) lei.

Acest premiu va fi constituit din venitul sumelor donate de D-nii: *Gheorghe, Miron* şi *Alexandru Niculescu* şi din venitul altor eventuale donaţiuni, completate până la suma de mai sus, din venitul fondului general de premii al Societăţii „*Gazeta Matematică*“.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unei lucrări referitoare la trigonometrie dintre cele publicate în „*Gazeta Matematică*“ în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu, de Şcoală Militară, de Şcoală Politehnică, sau student la o Facultate de ştiinţe din ţară.

Art. 4. — In cazul neacordării premiului într'un an, sau mai mulţi ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăoga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor raportul indicând lucrarea ce se propune spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiei se publică în Nr. 10 al „*Gazetei Matematice*“ care apare în luna naşterii Inginerului *V. Cristescu.*

Art. 7. — In cazul când Societatea nu şi-ar mai putea îndeplini obligaţiunea acordării premiului de mai sus, atunci sumele donate de D-nii *Alexandru, Miron* şi *Gheorghe Niculescu* şi alţi eventuali donatori, se vor remite Liceului Naţional din Iaşi, care a avut pe *V. Cristescu* ca elev, iar dacă acest liceu n'ar mai exista, Liceului cel mai vechi din Iaşi, în funcţiune. In acest caz, din venitul sumelor acestea se va acorda un premiu anual, celui mai bun elev la matematici al liceului.

REGULAMENTUL PREMIULUI « INGINER H. CAPRIEL »

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“ acordă un premiu în valoare de 1000 lei, din venitul fondului „*Inginer H. Capriel*“, adunat în urma propunerii dela 2 Iunie 1912 a *Inginerului Ştefan Mirea* şi din venitul fondului general de premii.

Art. 2. — Premiul se acordă din 5 în 5 ani celei mai bune lucrări de matematici superioare, pure sau aplicate, ce se va prezenta Societăţii de către studenţii Universităţilor, de către elevii Şcolilor Politehnice, sau de către elevii Şcolilor Militare pregătitoare şi de aplicaţie din ţară.

Art. 3. — Lucrarea se propune de o Comisiune aleasă în acest scop şi va consta dintr'o chestiune de matematici pure sau de matematici aplicate, din programele Facultăţilor de Ştiinţe şi Şcolilor speciale de Ingineri şi Ofiţeri.

Art. 4. — Comisiunea se compune din doi membri şi un delegat şi se alege de către prima Adunare generală din anul în care începe o perioadă de 5 ani. Această Comisiune pregăteşte chestiunile până în luna Mai a anului următor când se vor publica în „*Gazeta Matematică*“.

Aceleaşi chestiuni se vor publica în fiecare an în numărul „*Gazetei Matematice*“ din luna Mai, până la expirarea anului al 4-lea din perioada de 5 ani pentru care au fost propuse.

Art. 5. — Lucrările — semnate de autor — se trimit Societăţii cel mai târziu până la 1 Mai al anului care precede decernarea premiului. Decernarea se face de a doua Adunare generală a celui al 5-lea an, în urma raportului Comisiunii dela art. 4, publicându-se rezultatul în numărul din Octomvrie următor.

Art. 6. — Premiul este indivizibil, iar în cazul când nu se acordă, valoarea lui se adaugă la premiul perioadei sau perioadelor următoare de 5 ani, până la decernare.

REGULAMENTUL
FONDULUI «GENERAL SC. PANAITESCU»

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“ primind donaţiunea *Generalului Scarlat Panaitescu*, înfiinţează un fond denumit fondul „*General Scarlat Panaitescu*“, din venitul căruia, şi în conformitate cu dorinţa donatorului, să se acorde un premiu celei mai bune lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare, publicată *în decurs de 5 ani.*

Art. 2. — Studiile în manuscris care se aduc la cunoştiinţa Societăţii pe orice cale, se iau şi ele în consideraţie la acordarea premiului.

Art. 3. — Premiul poartă numele: „*Premiu pentru lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare*“.

Art. 4. — Autorii publicaţiilor prezentate trebue să fie români şi să-şi fi făcut cultura matematică în ţară.

Art. 5. — Premiul este indivizibil şi se acordă neapărat la fiecare 5 ani. In cazul când nu se găseşte nicio lucrare de premiat sau în cazul când autorul lucrării premiate nu voieşte a primi suma fixată, ea se dă uneia din revistele militare în care se publică şi chestiuni de matematică aplicată la ştiinţele militare.

Art. 6. — Prima Adunare generală din fiecare an alege o Comisiune compusă dintr'un delegat al Societăţii şi doi membri, între care cel puţin un ofiţer, Comisiune care examinează lucrările apărute în cursul anului. Mandatul acestei Comisiuni este limitat la un an chiar când premiul nu se decerne.

Art. 7. — Comisiunea prezintă celei de a doua Adunări generale un raport asupra lucrărilor publicate în cursul anului expirat sau asupra manuscriselor aduse la cunoştinţa Societăţii în acelaşi

timp. Comisiunea anului în care se face decernarea premiului, trebue să propună în raportul său, spre premiare, lucrarea cea mai meritoasă ajunsă la cunoştinţa Societăţii în cursul ultimilor 5 ani; această Comisiune va avea deci să ţină seamă de cele patru rapoarte anterioare.

Art. 8. — Raportul Comisiunii din anul în care se face decernarea premiului, se publică în numărul *„Gazetei Matematice“* din Septemvrie următor Adunării generale care a aprobat decernarea.

REGULAMENTUL
FONDULUI « LT.-COLONEL GH. A. TĂNĂSESCU »

Art. 1. — Societatea *„Gazeta Matematică“* primind legatul decedatului *Al. Tănăsescu*, înfiinţează un fond denumit fondul *„Lt.-Colonel G. A. Tănăsescu“*, în memoria fiului său.

Art. 2. — Din venitul acestui fond se vor da cărţi de matematici celui clasificat întâiul la concursurile anuale ale *Gazetei Matematice.*

Art. 3. — In anii când aceste concursuri nu au loc, veniturile vor mări fondul.

REGULAMENTUL PREMIULUI « NICOLAE G. BOTEA »

Art. 1. — Societatea *„Gazeta Matematică“* primind donaţiunea D-lui Profesor *G. Botea,* pentru a cinsti memoria fiului său *Nicolae G. Botea,* fost distins corespondent al *Gazetei* şi membru al Societăţii, constitue un fond denumit fondul *„Nicolae G. Botea“*, din al cărui venit să se acorde un premiu anual, constând din cărţi de ştiinţă, autorului celei mai bune lucrări (articol, notă, problemă rezolvată) de *geometria triunghiului şi a tetraedrului,* dintre cele publicate în *„Gazeta Matematică“*, în ultimul volum apărut.

Art. 2. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu, de şcoală militară, de Politehnică sau student de Facultate din ţară.

Art. 3. — Fondul se poate mări atât de donator cât şi de alte persoane. Toate sumele atribuite fondului se transformă în rente de Stat sau efecte garantate de Stat.

Art. 4. — Premiul se va acorda în orice caz în fiecare an.

Art. 5. — Prima Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă celei de-a doua Adunări generale din acelaşi an raportul indicând autorul şi lucrarea ce se propune spre premiare. In acelaşi raport se vor specifica şi cărţile ce vor constitui premiul.

Art. 6. — Raportul Comisiei, aprobat de Adunarea generală se publică în Nr. 5 al *Gazetei Matematice,* care apare în luna Ianuarie.

Art. 7. — In cazul când Societatea nu s'ar mai putea obliga cu realizarea dorinţei donatorului, atunci fondul adunat până în acel moment, va fi trecut Comitetului şcolar al Colegiului Naţional Sft. Sava din Bucureşti, pentru ca din venit să se dea la finele fiecărui an şcolar, cărţi de ştiinţă, celui mai silitor elev din clasa III-a A a acelui colegiu.

REGULAMENTUL PREMIULUI «INGINER ALEXANDRU ROŞU»

Art. 1. — Societatea *„Gazeta Matematică"*, primind donaţiunea D-lui *Alexandru A. Roşu,* pentru a cinsti memoria tatălui său Inginer *Alexandru Roşu,* fost corespondent neobosit şi fost membru activ al *Gazetei Matematice,* constitue un fond denumit fondul *„Inginer Al. Roşu"* din al cărui venit să se acorde un premiu anual, în numerar.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne *celui mai harnic corespondent* al *Gazetei Matematice,* elev de liceu, pentru activitatea depusă în cursul ultimului volum apărut.

Art. 3. — Premiul se va acorda în orice caz în fiecare an

Art. 4. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisiune compusă din 2 membri şi un delegat care prezintă primei Adunări generale a anului următor raportul indicând elevul premiat.

Art. 5. — Raportul Comisiunei se publică în Nr. 8 al *Gazetei Matematice,* care apare în luna decesului Inginerului *Alexandru Roşu.*

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Bodnărescu M. Horia (5252, 60, 305, 28, 29); *Câmpan Florica* (A); *Cetăţeanu St.* (5198, 332); *Costescu Gh. I.* (5022, 145); *Drăghicescu P. Paul* (5334, 38, 40, 41, 43); *Eckstein Virgil* (4698, 5097, 278); *Moscovici E. N.* (5328); *Rusu L. Mircea* (5244, 52, 88, 319, 24, 25, R); *Sbârnea D. Gh.* (5185, 231, 44, 60, 324, 29); *Stoenescu D. Mirel* (5153, 85, 244, 80, 329).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale,* Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa :

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon : 3-9803).

C. 66.294

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVI

NUMĂRUL 2. — OCTOMVRIE 1940

BIBLIOTECA CENTRALĂ
SIBIU

SUMARUL

1. † Ion Banciu . . . . . *D. Barbilian.*
2. Proprietăţi ale conicelor osculatoare la o curbă plană . . . . . *N. Abramescu.*
3. Asupra problemei 4385 . . . . . *M. Ghermănescu.*
4. Despre curbele sincrone în legătură cu o lucrare a lui E. Bacaloglu . . . . . *Florica Câmpan.*
5. Note Matematice: 4 — 9.
6. Bibliografie.
7. Cereri.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 1146, 1188, 2960, 4605, 4896, 5070, 5131, 5153, 5154, 5190, 5222, 5229, 5244, 5265, 5282, 5285.
10. Exerciţii: 2 — 5.
11. Probleme propuse: 5377 — 5391.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1940

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **D. Stoica**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1940 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: **53**62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale,* Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLVI. Nr. 2 *SUPLIMENT* OCTOMVRIE 1940

RECREAŢIUNI

1. **La un curs de educaţie.** „Câţi ştiţi din matematici că două lucruri egale între ele sunt egale cu al treilea" ?

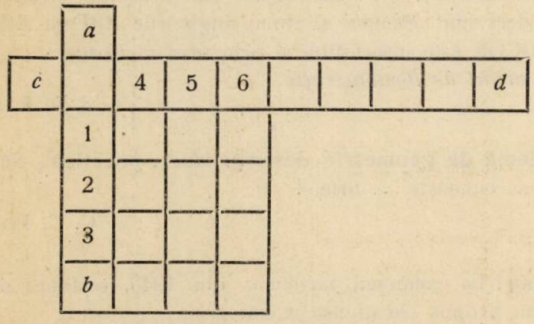
— Nu am auzit de aşa ceva în matematică !

A. A.

*

2. **Cuvinte încrucişate pentru „Gazeta Matematică".**

Orizontal: 1. Locul depărtat şi albastru către care se îndreaptă privirea corespondenţilor când problemele sunt prea grele.



2. Zeu grec specialist în balistica tragerii cu arcul.

3. Departe, peste ... şi mări.

B. Continent.

Vertical. 4. (Invers) ... şi piperat.

5. Ceea ce nu ar trebui să se strecoare în soluţiile corespondenţilor *Gazetei Matematice.*

6. Iisus.

Liniile *ab* şi *cd* dau numele unei reviste.

AL. ST.

*

3. **Argumentare cu cifre.** NIETZSCHE vorbind de amici în *«Aşa vorbea Zarathoustra»* spune ce gândeşte cel ce trăieşte în singurătate:

„Un singur este totdeauna prea mult în jurul meu. Totdeauna o dată UNU sfârşeşte prin a face DOI:" EU şi cu MINE sunt totdeauna în convorbire foarte asiduă: cum s'ar putea concepe aceasta dacă nu ar exista un amic? Pentru cel izolat, amicul este totdeauna al treilea ... ".

I. I.

*

4. **Elogii Geometriei.** Ceea ce întrece Geometria, ne întrece. (PASCAL).

Geometria ascute inteligenţa (QUINTILLIEN).

Geometria este cheia tuturor porţilor şi eu voiu munci pentru a o dobândi. (MARCHIZA DE CHÂTELLET).

I. I.

*

5. **Geometria în Poeziile lui** VASILE ALEXANDRI.

Linia dreaptă. Şi stau în linii drepte şi armele prezintă.

Triunghiul. Şi dusu-o-au pe aripi în locuri depărtate | Cucoarele 'n triunghiuri prin aer înşirate.

Patratul. Puternica armată cu-ale sale lungi scadroane în larg cuadrat formată.

Cercul. Orizontul ne încinge | Ca un cerc nemărginit.

Sfera. Se înalţă Te-Deumul la sfera ideală.

I. I.

*

6. **Paradox geometric.** *Toate trapezele sunt isoscele.*

Fie A intersecţia laturilor neparalele BE, CD ale trapezului BCDE. Paralelismul dreptelor BC, ED dă:

$$AB/AC = AE/AD.$$

Triunghiurile BAD, CAE au unghiul din A comun, şi laturile adiacente proporţionale, deci sunt asemeni şi atunci unghiurile ABD şi ACE sunt egale. Deci trapezul BCDE este inscriptibil şi prin urmare isoscel.

Se cere viciul de demonstraţie.

† A. RÂŞCANU.

*

7. **Problemă de geometrie descriptivă... practică.** Să se găsească un hoţ când i se cunoaşte... urma!

C. C. POPESCU.

*

8. **Minune!** La examenul particular din 1940, sesiunea din Februarie, la clasa VI-a am propus chestiunea următoare:

„Să se aducă la forma cea mai simplă numărul

$$N = (\sqrt{2-\sqrt{2}}) / (\sqrt{\sqrt{2}-1}).$$

Iată soluţia unui candidat:

$$N = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2^2-2}}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{1}} = \sqrt[4]{2}.$$

Dar minune! Rezultatul dat este exact!

G. D. S.

*

9. **Halal problemă.** In *Ziarul matematic,* Anul I No. 3, pag. 45, anul 1926, găsesc următoarea problemă:

« Pe cer sunt n *stele şi faţă de fiecare din ele vedem* $(n-1)$ *stele. Se întreabă câte stele sunt pe cer? »*

Iată şi soluţia luată din aceeaşi revistă:

« Pe cer sunt n *stele, faţă de fiecare sunt* $(n-1)$ *stele, adică celelalte, deci pe cer sunt* n *stele ».*

Aşa problemă putea să compună şi să rezolve *Ziarul Matematic* şi aici pe pământ. Nu avea nevoie să profaneze cerul cu ea!

GH. B.

*

10. **Progresiune constantă.** In manualul de *Logică* de PETROVICI şi BURICESCU la pag. 57 găsim :

« Constatăm deci o progresiune constantă a numărului notelor din conţinut dacă mergem dela noţiunea de poligon la cea de patrat ».

C. V. PANTELIMON.

*

11. **Alte sinusuri naturale!** In No. 11 din Volumul XLIV al *Gazetei Matematice* s'a semnalat un sinus de broască. Mai există însă şi alte sinusuri ca de exemplu un sinus arterial şi unul venos la peşti. Propun să se calculeze celelalte linii trigonometrice ale acelor funcţiuni organice.

N. I. MĂRGĂRIT.

*

12. **Un paradox algebric.** Să ne propunem a calcula valoarea lui $E = \sqrt{(-1)^2}$. Am putea scrie că $E = (-1)^{2/2} = (-1)^1$. Dar, am putea efectua operaţia de sub radical şi scrie $E = \sqrt{1} = 1$. Deci $(-1) = +1$. Unde-i viciul?

† O. POPEA.

*

13. **Geometria analitică şi croitoria.** Fără ca să cunoască coordonatele carteziene, croitorii scriu detalii pentru tăerea tiparelor de rochii în modul următor :

Figura I. Desemnează un dreptunghiu ABCD de 45 cm înălţime şi de 48 cm lăţime. Dela A către C, la 3 cm, aşează pe E ; dela B către A la 6 cm aşează pe F şi uneşte E cu F printr'o dreaptă ; dela D către C, la 23 cm, aşează un punct. Ridică acest punct cu 4 cm şi pune pe I ; uneşte I cu F printr'o linie convexă tangentă la CD şi BD, etc.

GH. B.

*

14. **Infinitul mijlociu!** Matematicianii inventaseră de mult *infinitul mare* şi mai în urmă *infinitul mic.* Nu le-ar fi trăznit prin cap nici o dată de *infiniţi intermediari.* Meritul acesta revine poeţilor. In adevăr în bucata *„Curtea cu găini"* a D-lui TUDOR ARGHEZI găsim :

„Moartea găinii a bântuit-o o lună. Acuzarea cade asupra infinitului mic şi mijlociu".

MIRCEA L. RUSU.

*

15. **Intregire infinită!** Ecuaţia :

$$y = +\sqrt{r^2 - x^2},$$

reprezintă un semicerc cu centrul în origină, cu diametrul aşezat pe axa OX şi cu raza r, în regiunea y-ilor pozitivi.

Ecuaţia :

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2},$$

reprezintă un semicerc cu centrul în origină, cu diametrul aşezat pe axa OX şi cu raza r, în regiunea y-ilor negativi.

Cele două semicercuri complectează un cerc cu centrul în origină şi cu raza r. Ca să-i găsim ecuaţia adunăm ecuaţiile celor două semicercuri şi găsim $2y = 0$ sau $y = 0$. Dar această ecuaţie reprezintă o *dreaptă infinită,* şi anume toată axa OX dela $-\infty$ la $+\infty$! Unde e cercul? Cum a eşit infinitul din suma a două mărimi finite ?

I. I.

*

16. **Din ce se compune „Gazeta Matematică“ ?** (Reţetă).

De vrei să fabrici un cocktail || C'un rezultat fără pereche || Adaugi atent unui lampant || O literă grecească veche || Furi dela şah un rezultat || Şi-apoi alături discret || Un nume femenin cochet || Un gest nervos şi tremurat || Şi-o literă din alfabet.

AL. ST.

*

17. **O demonstraţie a existenţei lui Dumnezeu.** In cartea „*Contrapunct*“ a lui ALDOUS HUXLEY, găsim la pag. 267 din Vol. I următoarea demonstraţie matematică a Dumnezeirii:

„*Cunoşti formula:* M *frânt cu zero este egal cu infinitul,* M *fiind orice număr pozitiv* ($M/0 = \infty$). *Ei bine, de ce să nu simplificăm această ecuaţie înmulţind fiecare parte cu zero* ($M = 0\,\infty$). M *este egal cu infinitul înmulţit cu zero, adică numărul pozitiv este rezultatul infinitului şi al lui zero. Ne demonstrează aceasta că Universul a fost creat din nimica de către o putere infinită?*“

M. M. M.

*

18. **Interpretarea lui** $M/0 = \infty$ **în religie.** Abatele MOREUX în „*Pour comprendre l'Algèbre*“ scrie:

„Deoarece $M/0 = \infty$, trebue să avem şi $M = \infty \times 0$, ceea ce înseamnează că *infinitul* înmulţit cu *zero* egalează o cantitate oarecare. Cu alte cuvinte că *Dumnezeu exercitând acţiunea sa asupra neantului poate avea totdeauna ceva*“.

V. GH. DRĂGUŢ.

*

19. **Cugetări.** Iată câteva cugetări, culese din scrierea „*Louis Lambert*“ a lui H. DE BALZAC.

1. „*Totul nu există decât prin* **mişcare** *şi prin* **număr**“.

2. **Mişcarea** *este* **produsul** *unei* **forţe** *născută din cuvânt şi dintr'o* **rezistenţă** *care este* **matema.** *Fără* **rezistenţă mişcarea** *ar fi fost fără* **rezultat, acţiunea** *sa ar fi fost* **infinită**“.

3. „*Nicăeri,* **mişcarea** *nu e stearpă, peste tot ea naşte* **numărul**“.

4. „**Numărul** *care produce toate* **varietăţile,** *dă naştere şi* **armoniei,** *care în cel mai înalt sens este* **raportul** *dintre* **părţi** *şi* **unitate**“.

5. „**Numărul** *este un martor intelectual care nu aparţine decât omului*“.

6. „**Universul** *e* **unitate. Mişcarea** *e mijlocul.* **Numărul** *e* **rezultatul.** *Sfârşitul este întoarcerea tutulor lucrurilor la* **unitate**“.

A. N. ANAGNOSTE.

*

20. **Pacea !** Iată aci o cugetare a Matematicianei AGNESI:

„*Algebra şi geometria sunt singurele provincii ale cugetării unde domneşte pacea*“.

I. I.

† ION BANCIU

In seara de 16 Septemvrie, profesorul ION BANCIU, membru al *Gazetei Matematice* şi-a dat sfârşitul în faţa mesei lui de lucru, doborît de un anevrism.

ION BANCIU s'a născut la Blaj, în Martie, 12, 1881. Acolo a terminat clasele primare. Liceul îl urmează şi absolvă la Ploeşti. Licenţiat al Facultăţii de Ştiinţe din Bucureşti, predă între 1909 şi 1916 matematicele întâiu la Tulcea apoi la diverse licee din Bucureşti: Gh. Lazăr, Mihai Viteazu, Matei Basarab şi Spiru Haret. După războiu ocupă pe rând locurile de inspector general şcolar, director general al ministerului instrucţiunii publice, director general al contabilităţii statului, director general al casei de depuneri. A ieşit la pensie acum doi ani. Totuşi contribuţia lui continua să fie cerută şi preţuită. In ultimul timp împlinea funcţiunea de controlor pe lângă ministerul apărării naţionale (cu gradul de locot.-colonel în rezervă).

Gazeta Matematică îi datoreşte, pe lângă serii întregi de corespondenţi pregătiţi şi îndrumaţi de el, subvenţii însemnate, obţinute în diversele lui dregătorii pentru revista care îi era aşa de scumpă.

In aceste rânduri, pe care emoţia le face stângace, aşi vrea să evoc nu figura biurocratului, ci pe aceea a pedagogului de mare clasă, care a fost ION BANCIU.

In Septemvrie 1910, — tânăr provincial, atunci înscris în cl. V-a a Liceului Lazăr, — am cunoscut în ION BANCIU profesorul prin excelenţă, acela care avea să hotărască de soarta intelectuală nu numai a mea, dar a multora din această neuitată serie.

Fruntaşii acestei clase, — „clasa lui BANCIU“ — cum o numim, căci numele lui BANCIU a devenit de mult pentru noi un cuvânt de raliere, erau: AL. TOMESCU (†), GH. CREŢIANU (actualul ministru de finanţe); inginerii: VICTOR DUMITRESCU, MIRCEA ELEFTERIE,

D. LEFTER (†), C. FILIPESCU; coloneii: FURTUNESCU, NESTORESCU, AL. GAVRILESCU, comandorul CRISTESCU, ministrul plenipotenţiar AL. CREŢIANU. Anii 1910—14 ai *Gazetei Matematice* mărturisesc de o activitate fără precedent desfăşurată de seria noastră. BANCIU însuşi predica prin exemplu, propunând probleme, exerciţii, publicând articole şi note.

M'am întrebat deseori care era secretul învăţământului lui ION BANCIU. Secretul sta, fără îndoială, în puterea lecţiilor sale de a obseda spiritele noastre, în patima şi energia pe care o punea în desfăşurarea lor. Intr'un asemenea mediu matematic, pregătit de profesorul nostru, nu se putea să nu închiegi matematic. Observaţii adânci însemnau aceste lecţii. Astfel el nu obosea să atragă atenţia asupra unei deosebiri hotărîtoare între Analiză şi Algebră. — „Analiza, spunea el, se întemeiază mai mult pe neegalităţi, pe când Algebra, pe egalităţi". — Nu e aici, afirmat sub formă elementară, dar isbitoare, substratul topologic al Analizei?

In ziua în care ION BANCIU a îmbrăţişat biurocraţia, Şcoala a înregistrat o mare pierdere. Cei care l-au iubit ar dori cel puţin să ştie că un asemenea schimb l-a făcut mai fericit. Dar această încredinţare lipseşte.

In 1934, când seria noastră a sărbătorit 20 de ani dela absolvire s'a născut ideea întemeierii unei *burse* BANCIU, acordată celui mai destoinic elev în matematice din cursul superior al Liceului Lazăr, continuată dealungul studiilor universitare ale acestuia. Gândul nostru a fost însă torpilat în felul cel mai meschin de nişte foarte mărunţi politicieni care aveau pe atunci conducerea liceului Lazăr. Aş vrea ca rândurile de faţă să ajungă sub ochii aceluia dintre elevii „clasei BANCIU" care constitue gloria noastră şi a lui: ministrul GH. CREŢIANU. Pe atunci a luptat, împreună cu VICTOR DUMITRESCU şi cu mine, pentru adunarea fondului bursei proiectate. Curând însă a trebuit să ne dăm bătuţi, parte din vina împrejurărilor, parte din vina noastră. In calitate de vistiernic al Ţării Româneşti, GH. CREŢIANU ar putea să încerce să înfăptuiască astăzi ceea ce n'am isbutit acum şase ani.

In definitiv, acei ani 1910—14 de juvenilă ardoare matematică sunt cei mai buni ai noştri şi ei se desfăşoară sub semnul scumpului nostru dascăl.

D. BARBILIAN.

PROPRIETĂȚI ALE CONICELOR OSCULATOARE LA O CURBĂ PLANĂ

(Urmare dela pag. 27)

3. *Normala unghiulară.* Fie M un punct al curbei plane

$$y = lx + nx^2 + rx^3 + \dots$$

şi să luăm ca axe Ox şi Oy tangenta MT şi normala MN. Luând derivatele, avem

$$y' = l + 2nx + 3rx^2 + \dots,$$

$$y'' = 2n + 6rx + \dots, \quad y''' = 6r + \dots$$

In originea M, $x = 0$; deci

$$y'_0 = l \ , \ y''_0 = 2n \ , \ y'''_0 = 6r.$$

Dar, din formulele (7) am văzut că

$$y'_0 = 0 \ , \ y''_0 = \frac{1}{\rho} \ , \ y'''_0 = -\frac{1}{\rho^3}\frac{d\rho}{d\alpha} = -\frac{\rho_1}{\rho^3},$$

ρ şi ρ_1 fiind razele de curbură a curbei şi desfăşuratei în origine.

Deci $$l = 0 \ , \ n = \frac{1}{2\rho} \ , \ r = -\frac{\rho_1}{6\rho^3},$$

ecuaţia curbei $y = f(x)$ este

$$y = \frac{x^2}{2\rho} - \frac{\rho_1}{6\rho^3}x^3 + \dots, \quad \rho \neq 0,$$

şi M nu este punct de inflexiune.

Să considerăm pe curbă două puncte M_1 şi M_2 vecine de M. Insemnând cu x_1, x_2 ($x_1 > 0$, $x_2 < 0$) abscisele acestor puncte; ordonatele lor sunt

$$(9) \qquad y_1 = \frac{x_1^2}{2\rho} - \frac{\rho_1}{6\rho^3}x_1^3 + \dots, \quad y_2 = \frac{x_2^2}{2\rho} - \frac{\rho_1}{6\rho^3}x_2^3 + \dots$$

Să luăm punctele M_1 şi M_2, astfel ca MM_1 şi MM_2 să separe armonic tangenta MT şi normala MN, adică MM_1 şi MM_2 egal înclinate pe normala MN. Insemnând cu

$$m_1 = \frac{y_1}{x_1} \ , \ m_2 = \frac{y_2}{x_2} \ , \ m_3 = 0 \ , \ m_4 \to \infty$$

coeficienţii unghiulari ai dreptelor MM_1, MM_2, MT, MN şi fasciculul (MT, MM_1, MN, MM_2) fiind armonic, urmează

$$\frac{m_1 - m_3}{m_2 - m_3} : \frac{m_1 - m_4}{m_2 - m_4} = -1$$

şi înlocuind pe m_i cu valorile lor, avem

$$m_1 + m_2 = 0 \quad , \quad x_2 y_1 + x_1 y_2 = 0.$$

Punând în locul lui y_1 şi y_2 valorile lor (9), avem

$$x_1 + x_2 - \frac{\rho_1}{3\rho^2}(x_1^2 + x_2^2) + \ldots = 0.$$

Să înlocuim

$$x_2 = px_1 + qx_1^2 + \ldots, \quad x_2^2 = p^2 x_1^2 + \ldots,$$

şi egalând cu zero coeficienţii lui x_1, $x_1^2, \ldots$, obţinem

$$p = -1 \quad , \quad q = \frac{2\rho_1}{3\rho^2}, \ldots$$

Deci

$$x_2 = -x_1 + \frac{2\rho_1}{3\rho^2} x_1^2 + \ldots, \tag{10}$$

care este relaţia dintre abscisele punctelor M_1 şi M_2 pentru care MM_1 şi MM_2 sunt egal înclinate pe normala MN.

Mijlocul M_a al dreptei M_1M_2 descrie o curbă (M_a) diametrală unghiulară, a cărei tangentă D_a în M este $y = m_a x$,

$$m_a = \lim_{x_1 \to 0} \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \lim \frac{\frac{1}{2\rho}(x_1^2 + x_2^2) + \ldots}{x_1 + x_2}.$$

Inlocuind x_2 cu valoarea sa (10), avem

$$m_a = \lim_{x_1 \to 0} \frac{\frac{1}{2\rho} 2x_1^2 + \ldots}{\frac{2\rho_1}{3\rho^2} x_1^2 + \ldots}, \quad m_a = \frac{3}{2}\frac{\rho}{\rho_1} = -\frac{3}{2}\frac{y_0''^2}{y_0'''}, \quad m_a = -\frac{a}{2b},$$

ρ şi ρ_1 fiind razele de curbură în M la curba (M) şi la desfăşurata sa.

Tangenta D_a în M la curba (M), care se poate numi *normală unghiulară* [1]) are ecuaţia $y = m_a x$, sau $ax + 2by = 0$, face cu

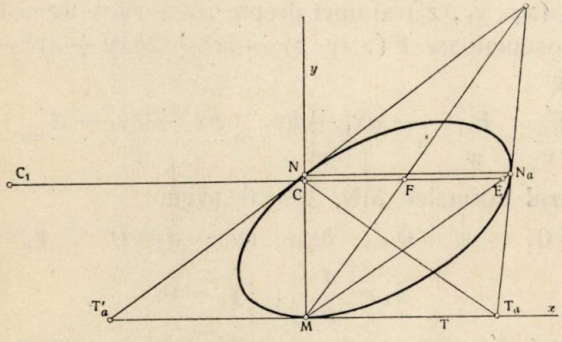
---

1) Propusă de marele nostru geometru G. ŢIŢEICA, în problema 1058 din *Gazeta Matematică* (Vol. IX, 1905, p. 100), pentru a înlocui normala afină.

tangenta MT unghiul γ, astfel ca $\operatorname{tg}\gamma = m_a = \frac{3}{2}\frac{\rho}{\rho_1}$. C şi C_1 fiind centrele de curbură cu M la curba (M) şi desfăşurata sa, fie E punctul pe $\overline{C_1C}$ astfel ca $\overline{CE} = \frac{2}{3}\overline{C_1C}$. Normala unghiulară este dreapta ME. Normala afină trece prin mijlocul F al lui CE.

4. *Puncte caracteristice pe tangenta la o curbă plană.* Să considerăm punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ pe curbă, astfel ca MM_1 şi MM_2 să separe armonic tangenta MT şi normala MN, coordonatele lor fiind legate cu relaţiile (9) şi (10). Dreapta M_1M_2 taie tangenta MT (axa Ox) în punctul cu abscisa

$$X = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1}.$$



Inlocuind pe y_1 şi y_2 din (9) şi x_2 din (10), obţinem

$$X = x_1 x_2 \frac{x_2 - x_1 - \frac{\rho_1}{3\rho^2}(x_2^2 - x_1^2) + \dots}{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - \frac{\rho_1}{3\rho^2}(x_2^3 - x_1^3) + \dots}$$

$$X = x_1 x_2 \frac{1 - \frac{\rho_1}{3\rho^2}(x_2 + x_1) + \dots}{\left(\frac{2\rho_1}{3\rho^2} - \frac{\rho_1}{3\rho^2}\right) x_1^2 + \dots} = \frac{-x_1^2 + \dots}{\frac{\rho_1}{3\rho^2} x_1^2 + \dots} \to -\frac{3\rho^2}{\rho_1}.$$

Deci, dreapta M_1M_2 taie tangenta în M în punctul care tinde către punctul T'_a definit de

$$l_a = MT'_a = -\frac{3\rho^2}{\rho_1}, \quad MT'_a = \frac{3y''_0}{y'''_0}, \quad MT'_a = \frac{d}{b}.$$

Poziția punctului caracteristic T'_a pe tangenta în M dă forma arcelor MM_1 și MM_2 în vecinătatea lui M.

Perpendiculara din centrul de curbură C (0, ρ) pe normala afină, are ecuația $y-\rho=-\frac{\rho_1}{3\rho}x$ și taie tangenta MT (Ox) în punctul T_a, astfel că $MT_a=\frac{3\rho^2}{\rho_1}$. T_a este simetricul lui T'_a în raport cu punctul M.

Conica osculatoare (5) este tăiată de normala MN ($x=0$) și normala unghiulară, $ax+2by=0$, în punctele

$$N\left(0,\frac{2d}{c}\right)\ ,\quad N_a\left(-\frac{4bd}{ac},\frac{2a}{c}\right).$$

Deci dreapta NN_a este paralelă cu tangenta în M la curbă.

Polul (x_1, y_1, z_1) al unei drepte $ux+vy+wz=0$ în raport cu conica osculatoare $F(x, y, z)=ax^2+2bxy+cy^2-2dyz=0$ este dat de

$$\frac{F'_{x_1}}{u}=\frac{F'_{y_1}}{v}=\frac{F'_{z_1}}{w}\ ,\quad \frac{ax_1+by_1}{u}=\frac{bx_1+cy_1-d}{v}=\frac{-dy_1}{w}.$$

In cazul normalei MN, $x=0$, avem

$$v=0\ ,\quad w=0\ ,\quad bx_1+cy_1-d=0\ ,\quad y_1=0;$$

deci

$$x_1=\frac{d}{b}\ ,\quad y_1=0,$$

adică punctul T'_a este polul normalei MN în raport cu conica osculatoare.

Pentru normala unghiulară, $ax+2by=0$, avem $u=a$, $v=2b$, $w=0$, $\frac{ax_1+by_1}{a}=\frac{bx_1+cy_1-d}{2b}$, $y_1=0$; deci $x_1=-\frac{d}{b}$, $y_1=0$, adică punctul T_a este polul normalei unghiulare în raport cu conica osculatoare.

Pentru o conică, orice dreaptă care trece prin polul T'_a al normalei într'un punct dat M, taie conica în două puncte M_1 și M_2, astfel că dreptele MM_1 și MM_2 sunt egal înclinate pe normala în M.

5. *Altă metodă pentru obținerea punctului* T_a. Raportând curba la tangenta MT și normala MN ca axe Ox și Oy, ecuațiile parametrice ale curbei în funcție de arcul s sunt

$$x=s-\frac{s^3}{6\rho^2}+\ldots,\quad y=\frac{s^2}{2\rho}-\frac{s^3}{6\rho^2}\frac{d\rho}{ds}-\ldots$$

Să considerăm pe curbă punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ vecine de M, corespunzătoare arcelor egale s şi $-s$, arc M_2M = arc MM_1.

Avem $$x_1 = s - \frac{s^3}{6\rho^2} + \ldots, \quad y_1 = \frac{s^2}{2\rho} - \frac{s^3}{6\rho^2}\frac{d\rho}{ds} - \ldots$$

$$x_2 = -s + \frac{s^3}{6\rho^2} + \ldots, \quad y_2 = \frac{s^2}{2\rho} + \frac{s^3}{6\rho^2}\frac{d\rho}{ds} + \ldots$$

Dreapta M_1M_2, $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

$$x_1 - x_2 = 2s - \frac{s^3}{3\rho^2} + \ldots, \quad y_1 - y_2 = -\frac{s^3}{3\rho^2}\frac{d\rho}{ds} + \ldots,$$

taie tangenta în M în punctul de coordonate

$$X = \frac{x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2)}{y_1 - y_2} = \frac{-\frac{s^3}{\rho} + \ldots}{-\frac{s^3}{3\rho^2}\frac{d\rho}{ds} + \ldots}, \quad Y = 0,$$

şi limitele lor pentru $s \to 0$ sunt

$$\frac{3\rho}{\left(\frac{d\rho}{ds}\right)} = \frac{3\rho}{\frac{d\rho}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{ds}} = \frac{3\rho}{\rho_1 \frac{1}{\rho}} = \frac{3\rho^2}{\rho_1}, \quad 0.$$

Deci intersecţia dreptei M_1M_2, pentru care arc M_2M_1 = arc MM_1, cu tangenta în M la curbă, tinde către punctul T_a [1]).

6. *Normala armonică.* Se poate generaliza normala unghiulară, luând o dreaptă $MD \equiv y - kx = 0$ în locul normalei MN (M originea şi tangenta MT ca axă Ox) şi considerând pe curbă punctele M_1, M_2, astfel ca dreptele MM_1 şi MM_2 să separe armonic pe MT şi MD. Polul T_a al lui MD în raport cu conica osculatoare (5) este pe tangenta MT şi este definit de

$$l_a = MT_a = \frac{kd}{a + kb} = \frac{3ky_0''}{3y_0''^2 + ky_0'''}.$$

---

1) Acest punct are importanţă la teoria suprafeţelor, căci la o suprafaţă, pentru fiecare secţiune normală într'un punct O, există pe tangenta în O un punct T_a, şi locul acestor puncte în planul tangent în O este cubica $F_2 + \frac{1}{3}F_3 = 0$ formată de primii doi termeni ai ecuaţiei

$$z = \frac{1}{2}F_2(x, y) + \frac{1}{6}F_3(x, y) + \ldots$$

O dreaptă $y = \lambda(x - l_a)$ variabilă, cu λ foarte mic, şi trecând prin T_a, taie conica osculatoare în punctele M_1 şi M_2. Dreapta care uneşte M cu mijlocul lui M_1M_2 tinde către normala armonică

$$D_a \equiv y - m_a x = 0, \quad m_a = \frac{-al_a}{bl_a + d} = -\frac{3ky_0''^2}{3y_0''^2 + 2ky_0'''}.$$

1°. Când $k \to \infty$, MD este normala MN, şi D_a este normala unghiulară $ax + 2by = 0$.

2°. $k = -\frac{a}{b}$, MD este normala afină; $l_a \to \infty$, $m_a = -\frac{a}{b}$, D_a este normala afină.

3°. $k = -\frac{a}{2b}$, MD este normala unghiulară,

$$l_a = MT_a = -\frac{d}{b} = -\frac{3y_0''}{y_0'''}, \quad m_a \to \infty,$$

normala D_a este normala MN.

N. ABRAMESCU.

ASUPRA PROBLEMEI 4385

In această problemă se cereau polinoamele *de gradul al doilea* care satisfac ecuaţiei funcţionale

(1) $$P^2(x) - P(x-1)\,P(x+1) = 2P(x).$$

In nota 51 (G. M. XLIV, pag. 640) am arătat că enunţul are o formă particulară şi că, în general, singurele *polinoame* care satisfac ecuaţiei funcţionale (1) sunt

$$P(x) = (x - a)(x - a - 1),$$

unde a este o constantă arbitrară.

Imi propun, în cele ce urmează, să integrez complect ecuaţia funcţională (1), adică să găsesc *toate* funcţiunile $P(x)$ ce satisfac acestei ecuaţii.

Pentru aceasta, voi considera ecuaţia mai generală

(2) $$P^2(x) - P(x-a)\,P(x+a) = kP(x),$$

ce am propus de altfel în Nota amintită. Deduc

$$P^2(x+a) - P(x)\,P(x+2a) = kP(x+a).$$

Inmulţind ecuaţia (2) cu $P(x+a)$, pe ultima cu $P(x)$ şi apoi scăzând membru cu membru, se obţine, grupând convenabil,

$$P^2(x)\,[P(x+a)+P(x+2a)] = P^2(x+a)\,[P(x-a)+P(x)]$$

sau încă, înmulţind ambii membrii cu $P(x)+P(x+a)\neq 0$,

$$\frac{[P(x-a)+P(x)]\,[P(x)+P(x+a)]}{P^2(x)} = \frac{[P(x)+P(x+a)]\,[P(x+a)+P(x+2a)]}{P^2(x+a)} = \varphi(x),$$

care arată că primul membru este o funcţiune periodică, de perioadă a. Egalându-l cu o funcţiune periodică arbitrară $\varphi(x)$, vom avea de rezolvat ecuaţia funcţională

(3) $$[P(x-a)+P(x)]\,[P(x)+P(x+a)] = \varphi P^2(x).$$

Desvoltând şi înlocuind $P(x-a)\,P(x+a)$ prin expresiunea dată de (2), obţinem, după ce simplificăm cu $P(x)\not\equiv 0$,

(4) $$P(x+a)-(\varphi-2)\,P(x)+P(x-a)=k.$$

Deducem

$$P(x+2a)-(\varphi-2)\,P(x+a)+P(x)=k,$$

din care, scăzând precedenta şi punând

(5) $$P(x)-P(x-a)=Q(x),$$

găsim

(6) $$Q(x+2a)-(\varphi-2)\,Q(x+a)+Q(x)=0,$$

ecuaţie funcţională lineară şi omogenă, cu coeficienţi constanţi sau periodici, a cărei soluţie generală am dat-o în altă parte [1]) şi pe care o reproduc pe scurt pentru cazul particular al ecuaţiei (6). Fie t_1, t_2 rădăcinile ecuaţiei *caracteristice*, corespunzătoare ecuaţiei (6),

(7) $$t^2-(\varphi-2)\,t+1=0.$$

Dacă această ecuaţie are rădăcinile distincte, soluţia cea mai generală a ecuaţiei funcţionale (6) va fi dată de

(8) $$Q(x)=\Phi_1 t_1^{\frac{x}{a}}+\Phi_2 t_2^{\frac{x}{a}},$$

unde $\Phi_1(x)$ şi $\Phi_2(x)$ sunt două funcţiuni periodice arbitrare, de perioadă a.

---

1) Bull. Math. de la Soc. Roum. des Sc. t. 33, 1933, p. 121—128.

Dacă ecuația caracteristică (7) are rădăcinile egale, ceea ce se întâmplă pentru $\varphi = 0$, $\varphi = 4$, soluția cea mai generală a ecuației funcționale (6) va fi dată de

$$(9) \qquad Q(x) = [x\Phi_1(x) + \Phi_2(x)]\, t^{\frac{x}{a}},$$

unde t este rădăcina dublă a ecuației (7), iar Φ_1, Φ_2 sunt deasemenea două funcțiuni periodice arbitrare, de perioadă a.

Observăm că $\varphi \neq 0$, de oarece am presupus

$$P(x) + P(x+a) \neq 0$$

căci $P(x+a) = -P(x)$ nu verifică ecuația (2); rămâne $\varphi = 4$, singura posibilitate, în care caz $t = 1$, iar (9) devine

$$(10) \qquad Q(x) = x\Phi_1(x) + \Phi_2(x).$$

Odată determinată funcțiunea $Q(x)$, rezolvarea ecuației funcționale (5) ne va da pe $P(x)$. Această rezolvare este însă dificilă așa că vom ocoli-o, observând că $P(x)$ trebue să satisfacă și (2) și (4).

Din (5) deducem

$$(11) \quad P(x-a) = P(x) - Q(x) \;,\; P(x+a) = P(x) + Q(x+a)$$

care, introduse în (4), dau, pentru $\varphi \neq 4$,

$$(12) \qquad P(x) = \frac{Q(x+a) - Q(x) - k}{\varphi(x) - 4},$$

care verifică și ecuația (2) dacă

$$(13) \qquad Q^2(x) - Q(x-a)\; Q(x+a) = k^2,$$

ceea ce conduce la

$$(14) \qquad \varphi(4-\varphi)\; \Phi_1 \Phi_2 = k^2,$$

din care scoatem, de exemplu, pe Φ_2.

Dacă $\varphi = 4$, $Q(x)$ este dat de (10), iar (4) devine, cu (11),

$$Q(x+a) - Q(x) = k$$

adică, după (10),

$$a\Phi_1(x) = k,$$

iar (10) devine

$$Q(x) = \frac{kx}{a} + \Phi_2(x).$$

Observăm însă, că pentru $\varphi = 4$, (6) este echivalentă cu

$$P(x+2a) - 3P(x+a) + 3P(x) - P(x-a) = 0,$$

ecuaţie de genul (6), a cărei soluţie generală este

$$P(x) = x^2 \Phi_1(x) + x \Phi_2(x) + \Phi_3(x),$$

unde Φ_1, Φ_2, Φ_3 sunt funcţiuni periodice arbitrare, de perioadă a. $P(x)$, dat de expresiunea de mai sus satisface ecuaţia (4) dacă

$$2a^2 \Phi_1 = k$$

deci

$$P(x) = \frac{k}{2a^2} x^2 + x \Phi_2(x) + \Phi_3(x).$$

In fine, această expresiune satisface ecuaţia (2) dacă

$$8k \Phi_3 = 4a^2 \Phi_2^2 - k^2,$$

aşa că expresiunea definitivă a funcţiunii $P(x)$ este, când $\varphi = 4$,

$$(15) \quad P(x) = \frac{k}{2a^2} x^2 + x \Phi(x) + \frac{1}{8k}(4a^2 \Phi^2 - k^2),$$

unde $\Phi(x)$ este o funcţiune arbitrară, de perioadă a.

Observăm că $P(x)$ se mai poate scrie

$$P(x) = \frac{k}{2a^2}\left(x + \frac{2a^2 \Phi + ak}{2k}\right)\left(x + \frac{2a^2 \Phi + ak}{2k} - a\right)$$

şi că pentru $\Phi(x) = \text{const.}$, obţinem ca un caz foarte particular polinoamele de gradul al doilea

$$P(x) = \frac{k}{2a^2}(x + A)(x + A - a)$$

ce se reduc, pentru $a = 1$, $k = 2$ la cele găsite în Nota citată mai sus.

M. GHERMĂNESCU.

DESPRE CURBELE SINCRONE IN LEGĂTURĂ CU O LUCRARE A LUI E. BACALOGLU

In prima lucrare a lui BACALOGLU „*Ueber eine Aufgabe aus der analytischen Mechanik*“ Zeitsch. f. Math. 4, 1859, găsim tratată o problemă în legătură cu curbele sincrone.

Prin curbă sincronă a unei familii de curbe (C), care trec printr'un punct comun O, se înţelege locul poziţiunilor la un moment dat, al unor mobile de masă egală, care ar porni deodată cu aceeaşi viteză din O ca să descrie curbele date sub acţiunea unui anumit câmp de forţe. Numirea de curbă sincronă a fost folosită pentru prima oară de JOH. BERNOULI (Acta Erud. 1697) pentru locul poziţiunilor simultane a punctelor materiale grele, de masă egală, care ar porni deodată fără viteză iniţială din acelaşi punct al unei familii de cicloide asemenea, situate într'un plan vertical.

Această problemă a fost tratată şi de EULER (Mechanica, sive motus scientia analytice exposita, 1736) care citează lucrarea lui BERNOULI. EULER caută încă şi curba din planul vertical pe care trebue să se mişte un punct material greu ca să parcurgă în acelaşi timp arcul ca şi coarda corespunzătoare. SALADINI (1804) şi FUSS (1815) arată, pe căi diferite, că lemniscata are proprietatea cerută de EULER. In 1844 O. BONNET găseşte că lemniscata păstrează proprietatea de a fi parcursă sincron pe arc şi pe coardă, nu numai de un punct material greu ci şi de un mobil supus unei forţe centrale proporţionale cu distanţa.

Această frumoasă proprietate a lemniscatei l-a interesat şi pe BACALOGLU. In lucrarea amintită, el stabileşte în mod geometric că sincroanele unei familii de lemniscate cu centrul într'un punct O şi cu axele înclinate cu 45^0 faţă de OX, sunt cercurile tangente la OX care trec prin O. Pe lângă acest interesant rezultat, regăsit mai târziu şi de alţi matematicieni, BACALOGLU caută să determine o forţă centrală de o natură mai generală, care să păstreze sincronismul în mişcarea pe arc şi coardă a unui punct de pe lemniscată. Dar dintr'o nebăgare de seamă în raţionamentul pe care îl face — şi care dealtfel a trecut atunci neobservată atâtor cititori ai revistei *Zeitsch. f. Math.*, — BACALOGLU ajunge la concluzia că

proprietatea de sincronism a lemniscatei ar fi independentă de forţa centrală care ar acţiona asupra mobilului [1]).

Aproape peste vreo 30 de ani, FOURET [2]), care tratează într'un mod mai general problema curbelor sincrone, rezolvă, fără să fi cunoscut lucrarea lui BACALOGLU, problema pusă de el. FOURET caută sistemul de curbe plane homotetice care trec printr'un punct O, pe care să le descrie mobilele care pleacă din O cu o viteză dată, sub acţiunea unei forţe derivate dintr'un potenţial, parcurgând în acelaşi timp arcul ca şi coarda corespunzătoare. Şi invers, care este forţa derivată dintr'un potenţial, care trebue să se exercite asupra unor puncte materiale de masă egală, pentru ca ele să se mişte pe un sistem anumit de curbe în acelaşi timp pe arc ca şi pe coarda corespunzătoare. Aplicând rezultatele găsite la cazul deplasării punctului pe lemniscată, FOURET arată că pe lângă gravitate şi forţa centrală proporţională cu distanţa lemniscata poate fi descrisă în mod sincron, de un mobil supus acţiunei unei forţe de o natură cu mult mai generală. Forma potenţialului din care derivă această forţă este:

$$V = f\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)\cos^2\theta.$$

Considerând numai cazul forţelor centrale, BACALOGLU nu a putut ajunge la acest rezultat. Insă din faptul că el afirmă că forţa centrală proporţională cu distanţa şi gravitatea nu sunt singurele forţe care acţionând asupra unui punct material fac ca mişcarea pe arcul şi coarda lemniscatei să fie sincronă, rezultă că BACALOGLU, care avea un deosebit talent matematic, a avut intuiţia acestei generalizări, găsită în urmă de FOURET.

---

1) Asupra acestei concluzii greşite a lui BACALOGLU, mi-a atras atenţia D-l Conf. I. POPA, îndemnându-mă să cercetez mai îndeaproape această problemă. Căutând literatura am dat peste o coincidenţă frumoasă, anume că problema care l-a preocupat pe BACALOGLU a fost tratată într'un mod cu totul general de un alt matematician român D-l Prof. V. VĂLCOVICI.

2) G. FOURET: Sur certains problèmes d'isochronisme. Comptes rendus, 103, 1886, p. 1174 şi p. 1175.

G. FOURET: Mémoire sur certains mouvements . . . J. de l'éc. Pol. Cah. 56, 1886, p. 171.

Dealtfel problema curbelor sincrone nu se mărgineşte numai aici. Pe lângă lucrările care stabilesc diferitele proprietăţi ale sincronelor unor anumite familii de curbe [1]) sau generalizează noţiunea lor [2]), se definesc curbele sincrone pe o suprafaţă [3]) şi se cercetează suprafeţele sincrone determinate de o congruenţă de curbe strâmbe [4]).

FLORICA CÂMPAN.

NOTE MATEMATICE

4. *Asupra medii aritmetice şi geometrice.* Se ştie din Aritmetică, că *dacă avem două numere neegale media lor aritmetică este mai mare ca media lor geometrică. (Culegere de Probleme de Aritmetică de* I. IONESCU. Capitolul XLII problema 8).

In noua Revistă matematică *„Pozitiva"*, D-l C. IONESCU-BUJOR dă acestei proprietăţi a numerelor o demonstraţie trigonometrică, (pag. 22). Demonstraţia are însă numai o îmbrăcăminte trigonometrică, de gogoriţă pentru a speria pe elevii cursului inferior al liceului. Fondul demonstraţiei este cu totul aritmetic şi pare a fi nou; eu care am răscolit multe aritmetici, nu l'am întâlnit nicăeri.

Iată cum se poate aritmetiza acea demonstraţie. Fie $a > b$ două numere. In acest caz este evident că $(a - b)$ este inferior lui $(a + b)$ şi prin urmare fracţia $(a - b)/(a + b)$ este subunitară. Patratul ei $(a - b)^2/(a + b)^2$ este *a fortiori* subunitar, căci prin ridicarea la puteri o fracţie subunitară îşi micşorează valoarea.

---

1) DURRANDE: Sur une problème de méc. Comptes-rendus 78, 1874. p. 1150,
H. RÉSAL: Sur la courbe synchrone. Nouv. Ann. (3) I, 1882, p. 289 şi p. 481.
E. COLLIGNON: Note sur les courbes synch. Ass. Fr. Paris, 18, 1889.
2) SAINT-GERMAIN: Sur les courbes synch. Bull. sc. Math. II, 13, 1889, p. 257.
3) A. LEGOUX: Sur les cóurbes synch. Ann. Toulouse, VI B, 1892, p.1.
3—4) V. VÂLCOVICI: Sur les courbes et les surfaces synch. Bull. Soc. Roumanie, XVIII, 1909, p. 13.

Diferența dintre 1 și această fracție este evident subunitară. Această diferență este:

$$1 - \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a+b)^2}$$

$$= \frac{(a^2+b^2+2ab) - (a^2+b^2-2ab)}{(a-b)^2} = \frac{4ab}{(a+b)^2} = \frac{ab}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}.$$

Această fracție subunitară are rădăcina sa patrată subunitară și deci $\sqrt{ab}$ este mai mic de cât $\frac{1}{2}(a+b)$, c. c. e. d. d.

I. IONESCU.

5. *Acum o sută de ani în lumea matematică.* Date culese în biblioteca Seminarului Matematic din publicațiile timpului.

In revistele de specialitate ale timpului publică articole de matematici: BESSEL, BINET, BIOT, BLANCHET, BROCH, CATALAN, CAUCHY, CHASLES, CLAUSEN, CRELLE, DELAUNAY, DUHAMEL, GERLING, GUDERMANN, HAEDENKAMP, HESSE, KUMMER, JACOBI, JÜRGENSEN, LAMÉ, LEJEUNE-DIRICHLET, LIBRI, LIOUVILLE, MINDING, MÖBIUS, MOIGNO, PLANA, RAABE, RAMUS, SCHLÄFLI, STAUDT, STEINER, STERN, TERQUEM, ARAGO, GAUSS, LEVERRIER, SCHUMACHER, ș. a., se ocupă de matematici aplicate și de astronomie. Sunt în viață și: BELLAVITIS, BERTRAND, CAYLEY, GRASSMANN, HAMILTON, LOBACEVSCHI, PLÜCKER, PONCELET, STURM, RODRIGUES,..., moare POISSON, în vârstă numai de 49 ani, „tocmai când se prepara să dăruiască patriei un tratat complet de fizica matematică".

Dacă scurtele note ale lui LIOUVILLE asupra naturii numărului *e* (*Sur l'irrationalité du nombre* $e = 2{,}718\ldots$, Journal de Mathématiques, v. V, 1840, pp. 192 și 193—194) și memoriul lui LAMÉ „*Mémoire d'analyse indéterminé, démontrant que l'équation* $x^7 + y^7 = z^7$ *est impossible en nombres entiers*" (Ibid. pp. 195—211), trezesc interesul deoarece ating chestiuni restrânse dar celebre: transcendența numărului *e* și teorema lui FERMAT; dacă se urmărește cu cuvenita atenție cel de al doilea memoriu al lui DIRICHLET în care se aplică teoria seriilor care-i poartă numele la teoria numerelor, anul matematic 1840 se caracterizează printr'o recoltă bogată mai ales în domeniul teoriei funcțiilor de o variabilă complexă și este legat aproape în întregime de activitatea prodigioasă a lui CAUCHY.

Reîntors la Paris în 1838, după opt ani de absenţă din Franţa din motive politice, CAUCHY îşi reia activitatea ştiinţifică în cadrul mai ales al monumentalelor *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Urmându-şi cu o fidelitate de admirat scopul ce şi l-a fixat din tinereţe, de a face o revizuire sistematică a întregei matematice, de a da eventual o simplificare demonstraţiunilor pe atunci existente şi de a descoperi teoreme noui, CAUCHY publică numai în volumele 10 şi 11 din *Comptes rendus* ale anului 35 de articole în care aplică teoremele sale la teoria ecuaţiilor algebrice, la convergenţa seriilor, etc., şi începe totodată prelucrarea bazelor pentru o teorie sistematică a funcţiunilor de o variabilă complexă, teoria pe care o va încheia în 1851.

Tot atunci, dacă nu se ţine socoteală de unele publicaţii litografiate la Praha şi la Torino şi răspândite în prea puţine exemplare, se pun bazele metodei limitelor şi metodei numită astăzi a lui CAUCHY-LIPSCHITZ din teoria existenţei soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale. Pe lângă acestea CAUCHY dă la iveală vol. I dintr'o nouă serie a Exerciţiilor întitulată „*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*“ (Prima serie a Exerciţiilor sub titlul de „*Exercices de Mathématiques*“ a început să apară în 1826). Original şi profund, CAUCHY tratează în cele 8 volume de Exerciţii subiecte dintre cele mai dificile şi mai variate, rivalizând cu cele mai vestite publicaţiuni periodice de matematici. Aşteptate cu nerăbdare graţie noutăţii lor, aceste volume sunt astăzi clasice. Când CAUCHY voia să se citeze, el îşi zicea bucuros „autorul exerciţiilor“. Acest titlu era preţuit îndeajuns. Dacă-spune JOSEPH BERTRAND în elogiul lui CAUCHY (*Eloges Académiques*, nouvelle série, Paris, Hachette, 1902) — vre-un geometru ar cuteza astăzi să publice exerciţii de matematici în sensul conceput de CAUCHY, lumea s'ar mira de o asemenea îndrăzneală.

In 1840, F. MOIGNO — un elev al lui CAUCHY — publică vol. I din opera „*Lecons de calcul différentiel et de calcul intégral rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de* A. L. CAUCHY“, Paris, Bachelier, pregătind terenul pentru opere similare moderne.

Un alt domeniu în care se înregistrează în acelaşi an contribuţii importante graţie lucrărilor lui BROCH, JÜRGENSEN, MINDING, LIOUVILLE, ş. a., e acel al funcţiunilor particulare numite abeliene.

Menţionăm, însfârşit, că la Paris se reeditează pentru a 6-a oară *„Essai philosophique sur les probabilités“* a lui LAPLACE şi la Berlin se publică într'o broşură *„Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien“* de LOBACEVSCHI.

D. I. M.
(Seminarul Matematic
al Universităţii din Iaşi).

6. *Problemă diofantiană.* Să se găsească o soluţie întreagă, cu 5 parametri, a ecuaţiei

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = my^2.$$

Punând

$$f = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

avem

$$x_1 = \rho_1\rho_2^2 - f + 3\alpha_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_2\alpha_3 - \alpha_3\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2)$$

$$x_2 = \rho_1\rho_2^2 - f + 3\alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_2\alpha_3 - \alpha_3\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2)$$

$$x_3 = \rho_1\rho_2^3 - f + 3\alpha_3(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_2\alpha_3 - \alpha_3\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2)$$

$$y = 3\rho_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_2\alpha_3 - \alpha_3\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2)$$

$$m = 3\rho_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_2\alpha_3 - \alpha_3\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2)$$

α_1, α_2, α_3, ρ_1 şi ρ_2 fiind întregi arbitrari.

Exemplu numeric. Dacă luăm

$$\alpha_1 = 1;\ \alpha_2 = 2;\ \alpha_3 = 3;\ \rho_1 = 4;\ \rho_2 = 5$$

găsim

$$23^3 + 32^3 + 41^3 - 3 \cdot 23 \cdot 32 \cdot 41 = 18 \cdot 36^2 = 18^3 \cdot 2^2 = \ldots = 23328.$$

A. GLODEN.

7. *Asupra problemei 3167.* Această problemă a fost rezolvată în Nr. 1, Vol. XLVI. Iată o rezolvare care pune în evidenţă modul de formare al determinantului.

Schimbând liniile şi coloanele în mod convenabil, se capătă:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & c & 0 & a \\ b & 0 & c & 0 & a & 0 \\ 0 & c & 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ b & c & a & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & b & c & a \\ 0 & 0 & 0 & c & a & b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = [a(bc - a^2) + b(ac - b^2) + (ab - c^2)].$$

OTILIA GEORGESCU ROEGEN.

8. *Asupra Culegerei de probleme de Algebră, p. I, ed. IV.*

1. La problema 2, Cap. XII, punctul *b)* se cere condiţia ca ecuaţia: $x^2 - (c-1)x + c^2 = 0$ să aibă rădăcini egale în valoare absolută şi de semne contrarii. Această parte a problemei trebue suprimată deoarece condiţia pusă cere $c = 1$, în care caz ecuaţia are rădăcini imaginare şi deci nu mai poate fi vorba de semnul lor.

2. Soluţia problemei 19, Cap. XIII este incomplectă. Se cere aci să se găsească valorile lui x pentru cari avem $x > \frac{1}{2a - x}$. Iată care este soluţia acestei probleme. Inecuaţia dată este identică cu $(x - 2a)(x^2 - 2ax + 1) > 0$. Dacă: $-1 \leqslant a \leqslant 1$ rădăcinile trinomului sunt imaginare sau confundate şi deci trebue ca $x > 2a$. In caz contrar, cum rădăcinile trinomului sunt $x = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$, pentruca inecuaţia să fie satisfăcută trebue ca: dacă $a > 1$, $a - \sqrt{a^2 - 1} < x < a + \sqrt{a^2 - 1}$ sau $x > 2a$; dacă $a < -1$, $2a < x < a - \sqrt{a^2 - 1}$ sau $x > a + \sqrt{a^2 - 1}$.

GH. TH. GH.

9. *Asupra articolului „Extinderi în legătură cu indicatorii".* (G. M. XLV). D-l profesor P. SERGESCU îmi atrage atenţia, în legătură cu articolul de mai sus că: „Nesiguranţa relevată la pag. 22 provine dintr'o *notaţie neprecisă*".

In adevăr, dacă $I_x(n)$ şi $I_y(n)$ reprezintă numărul numerilor prime cu n respectiv din şirurile $1, 2, \ldots, x$ şi $1, 2, \ldots, y$, atunci

$I_{y-x}(n)$ reprezintă numărul numerilor prime cu n din şirul $1, 2, \ldots, (y-x)$ şi *nici de cum* din şirul $(x+1), (x+2), \ldots, y$, unde am presupus $y > x$.

D-l profesor P. SERGESCU mă sfătue, cu drept cuvânt deci, să întrebuinţez o *altă notaţie*, pentru a ridica confuzia.

Voiu nota deci prin

$$I_{x\to y}(n) \quad ; \quad S_{x\to y}(n) \quad \text{şi} \quad P_{x\to y}(n)$$

numărul numerilor prime cu n din şirul $(x+1), (x+2) \ldots y$; suma acelor numere şi produsul lor. In acest mod confuzia şi îndoiala ce, mărturisesc că m'a oprit încă de multă vreme să dau publicităţii aceste extinderi, s'a limpezit.

Astfel, servindu-mă de exemplele numerice date în acel articol, avem:

$$I_{7\to 30}(30) = I_{30}(30) - I_7(30),$$

iar cum dela *7* la *30* avem *şase* numere prime cu 30, adică:

$$11, 13, 17, 19, 23, 29$$

şi cum:

$$I_{30}(30) = 8 \quad \text{şi} \quad I_7(30) = 2$$

urmează că relaţia este exactă.

Voiu cita şi exemplul numeric dat de D-l prof. P. SERGESCU:

$$I_{7\to 10}(16) = I_{10}(16) - I_7(16)$$

unde:

$$I_{7\to 10}(16) = 1 \text{ (numai numărul } 9)$$

$$I_{10}(16) = 5 \quad \text{şi} \quad I_7(16) = 4.$$

Mulţumesc deci cu toată recunoştinţa D-lui profesor P. SERGESCU.

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul „I. R. E.“. Institutul Român de Energie. Anul VIII. Nr. 2. Iunie 1940. Bucureşti.

Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences. Tom. 41 (2). 1939. Bucureşti. Les fonctions régulières à l'infini et leurs invariants de prolongement, de G. CALUGAREANO. Sur les singularités réelles et imaginaires dans le problème des trois corps, de CONSTANTIN DRÂMBA. Généralisation d'une équation fonctionelle rencontrée par G. DARBOUX, de D. V. IONESCU. La géométrie de l'équation des ondes (I), de N. THÉODORESCO.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 46. Nr. 5 Mai 1940. Menasha, Wis., New-York.

Idem. Vol. 46. Nr. 6. Iunie 1940. Menasha, Wis., New-York.

„Pozitiva". Acesta este titlul unui nou organ matematic român, întemeiat de 40 licenţiaţi în matematici în scopul de a se mai pune noi spaţii la dispoziţiunea celor ce au de publicat lucrări matematice originale şi de a îndruma elevii de Liceu la rezolvarea problemelor de matematică. Ea este binevenită, de oarece actualele reviste matematice române nu mai sunt suficiente pentru publicarea la zi a producţii noastre matematice.

De unde a eşit numele de *„Pozitiva"* dat acestei reviste de matematici? Nu ştim! In prefaţă nu ni se spune nimic! O alungare a mărimilor negative din această revistă nu există; chiar dela prima pagină cu matematică se văd semnele — (minus) ale mărimilor *negative!* Şi de altfel azi nu se poate concepe o revistă matematică care să excludă cantităţile negative. *„Pozitiva"* nu le exclude de asemenea. Numai la pag. 22 rândul 10 de jos a plecat un — de sub un radical! Dar ce mai încoace, încolo; mie nu-mi place acest titlu, şi tare aşi dori să-l văd schimbat! E chestiune de gust şi gustul nu se discută!

Revista e binevenită şi constituie o manifestare lăudabilă a licenţiaţilor noştri în matematici, care acum 45 ani, la întemeiarea *Gazetei Matematice* nu voiau să audă de aşa ceva!

Revista este folositoare, merită să fie încurajată şi îi urăm succes. Numărul 1 din Anul I apărut la 10 Septemvrie are următorul cuprins:

Cuvânt înainte. Lista membrilor. Asupra împărţirii polinoamelor de G. G. CONSTANTINESCU. Funcţiuni poligonale, de O. ENULESCU. Asupra curbelor plane, de C. IONESCU-BUJOR. Geometria cinematică, de N. N. MIHĂILEANU. Note matematici. Bibliografii. Diverse. Exerţicii propuse, clasa I — VIII. Probleme propuse.

I. IONESCU.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XX. Nr. 7. Septemvrie 1940. Octogone bordé de carrés, de V. THÉBAULT.

Universidad Nacional de La Plata. Nr. 128. Publicaciones de la Facultad de Ciencias Fisico matematicas. Serie Segunda. Revista. Aprilie 1940. La Plata (Argentina).

Idem. Nr. 129. Serie tercera. Publicaciones especiales. Iulie 1940. La Plata.

GH. TH. GHEORGHIU. *Probleme de analiză Matematică.* Partea a II-a. Conţine: integrale nedefinite, integrale definite, integrale duble şi triple, integrale curbilinii, ecuaţii diferenţiale, ecuaţii cu derivate parţiale. Litografiat. Bucureşti 1940.

N. PRAPORGESCU. *Sur une classe d'équations integrales et leurs applications à la statistique.* (Extras). Bucureşti 1940.

CERERI

Răspuns la Cererea No. 295. Anul XLV, pag. 584.

Posed o broşură scrisă în limba română cu un istoric al cifrelor, care poartă titlul „*Cifrele*". Autorul este GEORGE MICHAIL G. LĂZĂRESCU. Ea este tipărită la „*Cartea Românească*" în colecţia de cărţi „*Cunoştinţe Folositoare*", Seria A, No. 32.

Conţinutul acestei lucrări se găseşte tratat mai pe scurt de către autor în „*Ziarul Ştiinţelor şi Călătoriilor*", Anul XXIX, No. 12—15.

IONEL I. STAMATE.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

C. BURALI FORTI. Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. GRASSMANN. Paris 1897.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

H. FEHR. Le troisième Congrès international des mathématiciens. Heidelberg 1904. Genève 1904.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1146. *Care este cea mai mică înălţime la care ar trebui să ne ridicăm, aşa ca să putem vedea oraşele Bucureşti, Iaşi şi Craiova?*

Se va presupune că vederea se poate întinde la orice distanţă. (Elementele necesare calculului se vor cere dela corespondenţii Gazetei Matematice *din oraşele citate).*

G. VASILE.

Soluţie. Presupunem cele trei oraşe reduse la centrele lor sau la punctele cărora li se cunosc coordonatele geografice.

Fie A, B, C punctele la cari reducem cele trei oraşe.

Pentru a putea vedea un punct de pe Pământ, trebue să fim aşezaţi deasupra sau cel puţin pe orizontul locului acelui punct. Ori orizontul unui loc este determinat de planul tangent

la Pământ în locul considerat; urmează deci că observatorul se va afla față de orizontul locului de partea opusă centrului Pământului.

Cum cele trei plane tangente la Pământ în punctele A, B, C formează un triedru circumscris Pământului, rezultă că observatorul care vede în același timp orașele A, B, C trebue să fie așezat undeva în triedrul cu același vârf O, obținut prelungind fețele primului în partea opusă vârfului.

Rămâne acum de văzut ce a înțeles autorul problemei prin *cea mai mică înălțime*, care se poate lua în două sensuri principale: este vorba de cea mai mică înălțime deasupra orizonturilor locurilor A, B, C sau de înălțimea măsurată pe verticala poziției observatorului?

In primul caz, soluția este evidentă și unică: este chiar vârful triedrului considerat mai sus, care se găsește pe orizonturile locurilor A, B, C.

In al doilea caz, trebue determinat punctul din triedrul prelungit, situat la cea mai mică distanță de centrul Pământului. Ori, acest triedru fiind îndreptat în partea opusă Pământului, față de vârful O, este evident că cel mai apropiat punct de centrul Pământului va fi tot O.

Evident presupunem că planele tangente la Pământ în A, B, C au un singur punct comun. Cum însă pozițiile punctelor A, B, C sunt arbitrare pe suprafața Pământului, se știe, din studiul intersecției a trei plane că sunt mai multe cazuri de deosebit, în afară de cel de mai sus. Aceste cazuri trebuesc însă excluse căci dau, fie pe O aruncat la infinit, fie o dreaptă comună, ceea ce este exclus, dat fiindcă A, B, C sunt pe Pământ, etc., afară de cazul când sunt toate trei pe Ecuator.

Pentru a determina poziția punctului O prin calcul, luăm un sistem de axe cu centrul în centrul Pământului, planul xOy fiind planul *Ecuatorului*, iar axa Ox fiind, de exemplu, intersecția planului Ecuatorului cu meridianul Parisului.

Dacă însemnăm cu x_i, y_i, z_i coordonatele carteziene ale punctelor A, B, C, cu R raza Pământului, ecuațiile planelor tangente la Pământ în A, B, C vor fi

$$x_i\, x + y_i\, y + z_i\, z = R^2, \qquad i = 1, 2, 3$$

dacă Pământul este sferic sau

$$\frac{x_i\, x}{a^2} + \frac{y_i\, y}{b^2} + \frac{z_i\, z}{c^2} = 1,$$

dacă Pământul este elipsoidal.

Rezolvind unul oricare din aceste sisteme, obţinem coordonatele x, y, z, ale punctului de intersecţie O în funcţiune de R, x_i , y_i , z_i . Cum însă noi posedăm coordonatele *geografice* ale punctelor A, B, C adică *latitudinea* λ_i şi *longitudinea* φ_i , va trebui să exprimăm x_i , y_i , z_i în funcţiune de λ_i , φ_i .

Ori, acestea, împreună cu R care este constant la sferă şi variabil la elipsoid, sunt strâns legate de coordonatele *sferice*, φ şi θ, date de relaţiunile

$$(1) \quad x = \rho \sin\theta \cos\varphi \ , \ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \ , \ z = \rho \cos\varphi,$$

unde φ este longitudinea, iar θ este *colatitudinea*, adică complementul latitudinei.

In cazul Pământului *sferic*, vom avea deci

$$x_i = R \cos\lambda_i \cos\varphi_i \ , \ y_i = R \cos\lambda_i \sin\varphi_i \ , \ z_i = R \cos\varphi_i \ ,$$

cari introduse în expresiunile lui x, y, z, ne vor da coordonatele carteziene ale lui O în funcţie de elementele cunoscute R, λ_i , φ_i .

Pentru a obţine coordonatele geografice ale lui O, vom folosi formulele (1), după ce vom fi determinat pe ρ astfel încât

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Avem apoi $i = \rho - R$, care este înălţimea măsurată pe verticală, la care se găseşte punctul O.

Propunem corespondenţilor actuali să efectueze calculele indicate mai sus, coordonatele geografice ale oraşelor Bucureşti, Craiova, Iaşi putându-le obţine, fie dela corespondenţii locali (?), fie dela Observatorul astronomic din Bucureşti.

Se vede din discuţia de mai sus că dacă s'ar fi cerut înălţimea minimă la care să ne ridicăm *într'un anumit punct* de pe Pământ pentru a vedea oraşele Bucureşti, Iaşi, Craiova, problema n'ar fi fost totdeauna posibilă. Condiţia este ca verticala locului dat să întâlnească triedrul opus în O triedrului circumscris Pământului. Înălţimea cea mai mică corespunde în acest caz punctului de intersecţie al verticalei locului dat cu prima faţă întâlnită a triedrului opus.

In cazul când toate acele puncte A, B, C sunt situate pe Ecuator, ele sunt vizibile în acelaşi timp din orice punct al intersecţiei orizonturilor locurilor extreme. Punctul cel mai apropiat de Pământ va fi atunci intersecţia acestor două orizonturi cu planul *Ecuatorului.*

M. G.

PROBLEMA 1188. *O jumătate de triunghiu echilateral* BCA' *se aşează într'un plan vertical, rezemat pe mijlocul* O *al laturii* BC. *De* A' *se leagă un fir ce trece peste un scripete* S *pus pe orizontala lui* O *la distanţa* $\frac{2}{3}\overline{BC}$ *de acest punct. Să se găsească cu ce greutate pusă la capătul firului, putem ţine în echilibru triunghiul aşa ca baza lui să rămână orizontală?*

D. GEORGESCU.

Soluţie dată de D-nul ION C. VASILIU:

Fie G greutatea triunghiului şi P greutatea suspendată de fir. Aplicând teorema momentelor în raport cu O obţinem:

$$G \times \overline{OD}\cos 60^0 = P \times a \sin\varphi \; ; \; OD = \frac{a}{3}$$

$$P = \frac{G}{6\sin\varphi} \cdot$$

Dar din triunghiul SOA':

$$\frac{SO}{\sin\varphi} = \frac{OA'}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)}$$

$$SO = \frac{2}{3} \times 2a = \frac{4}{3}a \qquad OA' = a.$$

Rezultă:

$$3a\sin\varphi = 4a\sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)$$

$$3\sin\varphi = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi\right) \cdot$$

De unde:

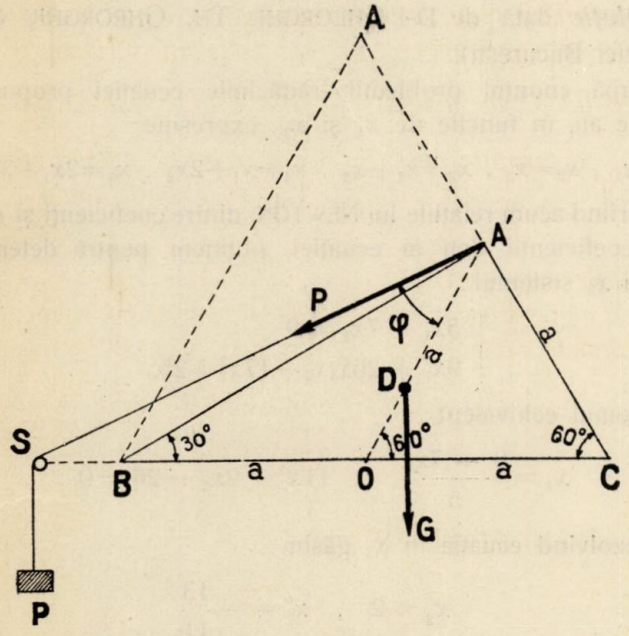
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{5} \qquad \sin\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{37}} \cdot \qquad (1)$$

Deci : $$P = \frac{\sqrt{37}}{12\sqrt{3}} \cdot G. \qquad (2)$$

Observaţiune. Pentruca echilibrul să fie posibil, rezemarea din O trebueşte să fie făcută cu *frecare.*

In adevăr, notând cu X şi Y respectiv componenta orizontală şi verticală a reacţiunii din O, obţinem prin proecţiuni:

$$X = P \sin(\varphi + 30^0) \quad ; \quad Y = G + P \cos(\varphi + 30^0).$$



Ţinând seama de (1):

$$\sin(\varphi + 30^0) = \frac{11}{24\sqrt{37}} \quad ; \quad \cos(\varphi + 30^0) = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{37}} \cdot$$

Rezultă: $$X = \frac{11}{24\sqrt{3}} . G \qquad Y = \frac{9}{8} . G.$$

Notând cu f *coeficientul de frecare,* frecarea maximă a triunghiului în O este fY, iar condiţia de echilibru:

$$fY \geqslant X.$$

De unde: $$f \geqslant \frac{11}{27\sqrt{3}} \cong 0{,}236.$$

AL. ST.

PROBLEMA 2960. *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^5 - 9x^4 + 25x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

ştiind că x_1 *şi* x_2 *fiind două din rădăcinile ei, celelalte rădăcini se formează din aceste două după regula şirului lui* FIBONACCI. *Se vor determina şi cantităţile* a, b, c.

Să se generalizeze pentru o ecuaţie de un grad oarecare.

M. BERCEVICI.

Soluţie dată de D-l GHEORGHE TH. GHEORGHIU (Student Matematici Bucureşti).

După enunţul problemii, rădăcinile ecuaţiei propusă spre rezolvare au, în funcţie de x_1 şi x_2, expresiile:

$$x_1=x_1\ ,\ x_2=x_2\ ,\ x_3=x_1+x_2\ ,\ x_4=x_1+2x_2\ ,\ x_5=2x_1+3x_2. \quad (1)$$

Scriind acum relaţiile lui NEWTON, dintre coeficienţi şi rădăcini, pentru coeficienţii daţi ai ecuaţiei, obţinem pentru determinarea lui x_1 şi x_2 sistemul:

$$\left|\begin{array}{l} 5x_1 + 7x_2 = 9 \\ 9x_1^2 + 26x_1x_2 + 17x_2^2 = 25, \end{array}\right. \quad (2')$$

sau sistemul echivalent:

$$x_1 = \frac{9 - 7x_2}{5} \quad ; \quad 11x_2^2 - 9x_2 - 26 = 0. \quad (2)$$

Rezolvind ecuaţia în x_2 găsim:

$$x_2' = 2 \quad , \quad x_2'' = -\frac{13}{11}$$

şi introducând în prima, avem respectiv:

$$x_1' = -1 \quad ; \quad x_1'' = \frac{38}{11}.$$

Prin urmare, vom avea două ecuaţii determinate deduse din ecuaţia enunţului, după cum luăm ca rădăcini:

$$x_1' = -1\ ,\ x_2' = 2\ ,\ x_3' = 1\ ,\ x_4' = 3\ ,\ x_5' = 4 \quad (3)$$

sau

$$x_1'' = \frac{38}{11}\ ,\ x_2'' = -\frac{13}{11}\ ,\ x_3'' = \frac{25}{11}\ ,\ x_4'' = \frac{12}{11}\ ,\ x_5'' = \frac{37}{11}. \quad (4)$$

Folosind celelalte relaţii ale lui NEWTON, pentru şirul de rădăcini (3), avem:

$$a = -15 \ , \quad b = -26 \ , \quad c = 24,$$

deci ecuaţia:

$$x^5 - 9x^4 + 25x^3 - 15x^2 - 26x + 24 = 0. \tag{5}$$

Pentru a obţine a doua ecuaţie, vom pune în primul rând:

$$a = \frac{\alpha}{11^3} \ , \quad b = \frac{\beta}{11^4} \ , \quad c = \frac{\gamma}{11^5} \ , \quad 11x = y \tag{6}$$

şi problema revine la a determina coeficienţii α, β, γ ai ecuaţiei:

$$y^5 - 99y^4 + 3025y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0 \tag{7}$$

ştiind că ea are rădăcinile:

$$y_1 = 38 \ , \quad y_2 = -13 \ , \quad y_3 = 25 \ , \quad y_4 = 12 \ , \quad y_5 = 37. \tag{8}$$

Folosind aceleaşi relaţii ale lui NEWTON, ca mai sus şi ordonând convenabil calculul, găsim:

$$\alpha = -11 \times 1479 \ ; \quad \beta = -546986 \ ; \quad \gamma = +5483400 \tag{9}$$

şi ca urmare ecuaţia a doua în x, care satisface enunţul:

$$x^5 - 9x^4 + 25x^3 - \frac{1479}{11^2}x^2 - \frac{546986}{11^4}x + \frac{5483400}{11^5} = 0. \tag{10}$$

Generalizare. Să considerăm ecuaţia de gradul n:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \alpha_3 x^{n-3} + \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0, \tag{11}$$

în care a_1 şi a_2 sunt numere date, iar $\alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ parametri, ce urmează a fi determinaţi astfel ca şirul rădăcinilor ecuaţiei (11) să fie următorul:

$$x_1 = x_1 \ , \quad x_2 = x_2 \ , \quad x_3 = x_1 + x_2, \ldots, \quad x_k = u_{k-3} x_1 + u_{k-2} x_2, \ldots$$

unde x_1 şi x_2 sunt două rădăcini ale ecuaţiei (11), iar u_p al $(p+1)^{lea}$ număr din şirul lui FIBONACCI, luând $u_0 = 1$, $u_1 = 1$.

Pentru determinarea rădăcinilor x_1 şi x_2, vom proceda ca în cazul particular tratat folosind primele două relaţii ale lui NEWTON dintre coeficienţii şi rădăcinile ecuaţiei (11). Având:

$$\sum_1^n x_k = -a_1 \quad \text{şi} \quad \sum_{l \neq k}^n x_k x_l = a_2$$

sau

$$\begin{cases} x_1\left[1+\sum_{k=3}^{n} u_{k-3}\right]+x_2\left[1+\sum_{k=3}^{n} u_{n-2}\right]+a_1=0 \\ \left(\sum_{1}^{n} x_k\right)^2-\sum_{1}^{n} x_k^2-2a_2=0 \end{cases} \tag{12}$$

sau încă:

$$\begin{cases} \left[1+\sum_{k=3}^{n} u_{k-3}\right]x_1+\left[1+\sum_{k=3}^{n} u_{n-2}\right]x_2+a_1=0 \\ \left[1+\sum_{k=3}^{n} u_{k-3}^2\right]x_1^2+2x_1x_2\sum_{k=3}^{n} u_{k-3}\,u_{k-2} \\ \qquad +\left[1+\sum_{k=3}^{n} u_{k-2}^2\right]x_2^2-a_1^2+2a_2=0. \end{cases} \tag{13}$$

Insă, între numerele lui FIBONACCI avem relaţiile (G. M. XXII, p. 253):

$$\sum_{1}^{n} u_k=u_{n+2}-2\ ;\quad \sum_{1}^{n} u_k^2=u_n\,u_{n+1}-1\ ;$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_k\,u_{k+1}=u_n^2-\frac{3+(-1)^n}{2}\ ; \tag{14}$$

ţinând seamă de aceste relaţii sistemul (13) devine:

$$\begin{cases} u_{n-1}x_1+(u_n-1)\,x_2+a_1=0 \\ (u_{n-3}\,u_{n-2}+1)\,x_1^2+2\left(u_{n-2}^2-\frac{1+(-1)^n}{2}\right)x_1x_2 \\ \qquad +u_{n-2}\,u_{n-1}\,x_2^2-a_1^2+2a_2=0. \end{cases} \tag{15}$$

Sistemul (15) fiind de gradul al doilea, rădăcinile x_1 şi x_2 pot fi calculate exact şi deci celelalte rădăcini ale ecuaţiei de gradul n.

Relaţiile lui NEWTON vor da pentru cele două şiruri de rădăcini valorile parametrilor $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$.

Făcând $n=5$ şi şirul lui FIBONACCI corespunzător:

$u_0=1\ ,\ u_1=1\ ,\ u_2=2\ ,\ u_3=3\ ,\ u_4=5\ ,\ u_5=8,$

sistemul (15) devine:

$$5x_1+7x_2+a_1=0\ ,\ 7x_1^2+18x_1x_2+15x_2^2-a_1^2+2a_2=0 \tag{16}$$

echivalent pentru $a_1 = -9$, $a_2 = 25$ cu sistemul obținut, (2'), din cazul ecuației particulare date.

Evident că, în cazul general putem determina pe a_2 astfel ca sistemul (15) să aibă rădăcini reale.

O. N. Ț.

PROBLEMA 4605. *Să se formeze un patrat de opt cifre întrebuințând de două ori cifra 2 și de câte 3 ori pe fiecare din cifrele 4 și 9.*

G-L GH. BUICLIU.

Soluție dată de D-l O. SACTER.

Fie $N^2 = abcdefgh$

patratul căutat. Deoarece

$$a+b+c+d+e+f+g+h = 2\times 2+3\times 4+3\times 9 = M9+7$$

se găsește că față de divizorul 9 avem

$$N^2 = 9m+7 \quad \text{și} \quad N = 9m \pm 4. \qquad (1)$$

Examinând tabloul ultimelor 3 cifre ale patratelor pefecte, dat în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVII, pag. 368, se găsește că grupa de cifre *fgh* a lui N^2 poate avea una din valorile

224; 244; 249; 424; 444; 449; 924; 929; 944.

Examinăm fiecare caz în parte. Fie $fgh = 224$. In acest caz N^2 este cuprins între limitele

$$44999224 < N^2 < 99944224$$

$$\therefore \quad 6708 < N < 9997. \qquad (2)$$

Ținând seamă de tabloul citat al terminațiunilor patratelor perfecte, mai avem

$$N = 500n \pm 168. \qquad (3)$$

Dăm lui *n* din (3) diferite valori numerice și considerăm pentru N numai pe acelea care satisfac neegalitățile (2). Din aceste valori, reținem numai pe acelea care sunt de forma (1) și ajungem la concluzia că pentru $fgh = 224$ numărul N s'ar putea găsi printre numerele

$$7168 \; ; \; 8168 \; ; \; 9832. \qquad (4)$$

Observ că prima cifră dela stânga lui N fiind rădăcina patrată a grupei *ab* dela stânga lui N^2, va trebui eliminate din șirul (4) numărul 8168 căci 8 este rădăcina patrată a unui număr cuprins între *64* și *81* deci cu ambele cifre diferite de cifrele date în enunț.

Analizând la fel şi toate celelalte valori pe care le poate avea *fgh* găsim rezultatele înscrise în următorul tabel:

fgh	Limitele şi formele pe care le pot avea numerele N	Valorile pe care le pot avea numerele N
224	$6708 < N = 500n \pm 168 < 9997$	7168, 9832
244	$4999 < N = 500n \pm 162 < 9997$	9338, 9662
249	$4949 < N = 250n \pm 57 < 9969$	6557, 6943, 9193
424	$4999 < N = 500n \pm 132 < 9997$	6368, 9868
444	$4449 < N = 500n \pm 38 < 9996$	6538, 6962
449	$4743 < N = 250n \pm 107 < 9971$	6107, 6143, 9607, 9643
924	$4949 < N = 500n \pm 118 < 9972$	9382
929	$4946 < N = 250n \pm 77 < 9718$	6673, 6827, 9077, 9923
944	$4743 < N = 500n \pm 212 < 9971$	9212

Ridicând la patrat numerele din coloana a treia găsim soluţiunile

$$6557^2 = 42994249 \quad \text{şi} \quad 9607^2 = 92294449.$$

Notă. 1°. Au rezolvat bine problema pe căi analoage, dând soluţiile exacte D-nii: V. ECKSTEIN, S-LT. M. GRUMĂZESCU şi T. C. ŞTEFAN.

2°. O soluţie sumară, dând numai numărul 6557^2, s'a primit dela D-l TR. PREDOIESCU.

3°. D-l T. C. ŞTEFAN, căutând patratele perfecte de 8 cifre care s'ar putea scrie numai cu cifrele 2, 4, 9 a mai găsit numerele

$$4788^2 = 22924944 \quad \text{şi} \quad 9712^2 = 94222944$$

pe lângă soluţiile problemei 4605.

4°. Analog cu această problemă 4605 am mai propus problema 4549 rezolvată la pag. 637, Vol. XLI, problema 4712 rezolvată la pag. 547, Vol. XLII şi problema 5272 propusă la pag. 389, Vol. XLV şi nerezolvată încă.

GH. B.

PROBLEMA 4896. *Fie* A_1, A_2, A_1', A_2' *punctele unde mediana şi înălţimea vârfului* A *ale triunghiului* ABC *întâlnesc respectiv latura* BC *şi cercul* O *circumscris acestui triunghiu. Se consideră intersecţiile:*

$M_c(AB, CA_2)$; $M_c'(AB, CA_2')$; $M_b(AC, BA_2)$; $M_b'(AC, BA_2')$.

Să se arate că dreptele $M_c M_b$ *şi* $M_c' M_b'$ *se întâlnesc în* A_3 *pe mediatricea* OA_1.

TH. GH. COCEA.

Să rezolvăm problema mai generală:

Dacă printr'un punct A *al unei conice* (Γ) *se duc două secante ce întâlnesc coarda* BC *şi conica respectiv în* A_1; A_2 *şi* A_1'; A_2' *şi luăm intersecţiile:*

$M_c(AB, CA_2)$; $M_c'(AB, CA_2')$; $M_b(AC, BA_2)$, $M_b'(AC, BA_2')$,

atunci dreptele $M_c M_b$; $M_c' M_b'$ *şi diametrul conjugat coardelor paralele cu* BC *sunt concurente.*

Dreptele $M_c M_b$ şi $M_c' M_b'$ sunt respectiv polarele punctelor A_1 şi A_1' în raport cu conica (Γ) şi aceste două polare se taie într'un punct A_3, polul dreptei $A_1 A_1'$ sau coarda BC, însă cum diametrul conjugat coardelor BC trece prin mijlocul coardei BC, prin centrul conicei şi prin polul dreptei BC va trece şi prin A_3.

t. c. c. e. d. d.

Observaţii. 1°. Au rezolvat problema în cazul enunţului propus Domnii: AUREL I. CORNĂŢEANU, CONSTANTIN V. PANTELIMON (lic. militar Iaşi), GH. B. N. IONESCU (lic. Petru şi Pavel, Ploeşti), VICTOR FLORESCU (lic. militar Târgovişte), MIRCEA D. POPA (lic. militar Iaşi), I. STREDER (lic. militar Iaşi), M. AL. VASILESCU-STABU (lic. M. Viteazu, Alba-Iulia).

2°. D-l AL. POPESCU-ZORICA a dat o bună soluţie analitică.

3°. D-nii GH. B. N. IONESCU, CONST. PANTELIMON şi POPA D. MIRCEA au observat că în locul medianei şi înălţimei se pot considera două drepte oarecari ce trec prin A.

4°. D-l RĂDULESCU GH. OCTAVIAN (lic. militar Iaşi) a rezolvat problema prin consideraţii omografice.

5°. Iată cum se arată că şi punctele:

$$A_3 \ ; \ \alpha(CA_2', BA_2) \ ; \ \beta(BA_2', CA_2)$$

sunt colineare. Considerăm fascicolul $(M_c, BCM_b' M_b)$ pe care tăindu-l cu secantele: BM_b şi $M_c M_b$ avem rapoartele anarmonice egale:

$$(B\alpha\gamma M_b) = (M_c \gamma' A_3 M_b)$$

deci şi:

$$(C, M_c \gamma' PM_b) = (M'_b, B \alpha\gamma M_b)$$

adică două fascicole având acelaşi raport anarmonic şi o rază comună CM_b aşa că celelalte trei raze se întâlnesc în trei puncte colineare.

t. c. c. e. d. d.

H. P. I.

PROBLEMA 5070. *Să se calculeze, pentru* $n = \infty$, *limita expresiunii*

$$E = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}.$$

M. GHERMĂNESCU.

Soluţie dată de D-nii: Sublocot. M. GRUMĂZESCU, D. RIPIANU, S. LEIBOVICI şi A. ŞAICHIN.

In soluţia dată problemei 4546 s'a folosit formula

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2} + \frac{\alpha_n}{n^3}\right),$$

unde α_n tinde către zero dată cu $1/n$.

Cu aceasta, expresiunea dată devine

$$E = n(n+1)e\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{11}{24(n+1)^2} - \frac{11}{24n^2}\right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_{n+1}}{(n+1)^3} - \frac{\alpha_n}{n^3}\right) = \frac{e}{2} - \frac{11e(2n+1)}{24n(n+1)} + n(n+1)e\left(\frac{\alpha_{n+1}}{(n+1)^3} - \frac{\alpha_n}{n^3}\right),$$

din care se deduce uşor

$$\lim E = \frac{e}{2}.$$

Notă. S'au mai primit soluţiuni dela buni corespondenţi, cari conţineau însă erori prea grave.

M. G.

PROBLEMA 5131. *Să se studieze variația funcțiunei*

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^3 - 6x + 5}{x^3 - 6x - 5}}.$$

Să se traseze curba reprezentativă.

VIRGIL CLAUDIAN.

Soluție dată de D-nii: MIHU CERCHEZ (Profesor, Chișinău), S-LT. GRIGORE MARTEȘ, D. RIPIANU, A. I. CORNĂȚEANU (Șc. Navală Constanța), MIRCEA I. ZAHARIA-LUPU (lic. Brașov), MARIN F. VĂDUVA și CHERȚMAN S. M. (lic. Giurgiu), P. P. GHEORGHIU, ALEX. C. JILETCOVICI, ACHILE V. PETRESCU și ALEX. I. ROHR (lic. militar, Iași), MIRCEA C. NICULESCU (lic. Titu Maiorescu, Buc.), S. LEIBOVICI (lic. M. Eminescu, Buc.), EUG. M. ȘENCHI (lic. Sf. Andrei, Buc.), OCT. E. GHEORGHIU (lic. Tulcea), VICTOR G. BÂRLEA-SUHĂȚEANU, (lic. militar Târgoviște), M. I. ȘTEFANOVICI (lic. Sf. Andrei, București) și B. I. FRIEDMAN (Câmpina).

Redactarea soluției de față o vom face folosind normele indicate la pag. 181 [1]). In calculele ce vom da mai jos nu este vorba decât de valorile pozitive ale funcțiunei, celelalte deducându-se din primele prin schimbarea semnului, iar curba reprezentativă printr'o simetrie în raport cu axa Ox.

1. Intervalele de existență se găsesc scriind că expresia de sub radical este pozitivă, adică

$$(x^3 - 6x + 5)\ (x^3 - 6x - 5) \geqslant 0.$$

Pentru a rezolva această inegalitate se găsesc mai întâi rădăcinile ecuației ce se capătă egalând cu zero prima parte și care sunt, în ordinea mărimei,

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \sim -2{,}79;\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \sim -1{,}79;\ x_3 = -1;$$

$$x_4 = 1;\ x_5 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \sim 1{,}79;\ x_6 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \sim 2{,}79.$$

---

1) Se poate consulta în acest sens și Cap. VI (studiul funcțiunilor) din *Probleme de Analiză Matematică*, partea I, de GH. TH. GHEORGHIU.

Inegalitatea se mai poate scrie

$$(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)\,(x-x_4)\,(x-x_5)\,(x-x_6)\geqslant 0.$$

Cum este satisfăcută pentru valori mai mici decât x_1, inegalitatea va avea loc pentru x cuprins în intervalele.

$$(-\infty,\ x_1)\ ;\ (x_2\ ,\ x_3)\ ;\ (x_4\ ,\ x_5)\ ;\ (x_6,\ +\infty).$$

2. Notând cu $y\,(x)$ funcţiunea dată, avem respectiv

$$y\,(\pm\infty)=1\ ,\quad y\,(x_1)=0\ ,\quad y\,(x_2)=+\infty\ ,\quad y\,(x_3)=+\infty,$$

$$y\,(x_4)=0\ ,\quad y\,(x_5)=0\ ,\quad y\,(x_6)=+\infty.$$

3. Derivata funcţiunei este

$$y'=\frac{15\,(2-x^2)}{(x^3-6x-5)^2\sqrt{\dfrac{x^3-6x+5}{x^3-6x-5}}}$$

care se anulează pentru

$$x_7=-\sqrt{2}\backsim -1{,}41\ \ ;\ \ x_8=\sqrt{2}\backsim 1{,}41.$$

Cum semnul derivatei este dat de numărător, rezultă că vom avea un minimum în punctul de abcisă x_7 şi un maximum în punctul de abcisă x_8. Valorile acestor extreme sunt

$$m=\sqrt{\frac{4\sqrt{2}+5}{4\sqrt{2}-5}}=\frac{4\sqrt{2}+5}{\sqrt{7}}\backsim 4{,}02\ ;$$

$$M=\sqrt{\frac{4\sqrt{2}-5}{4\sqrt{2}+5}}=\frac{4\sqrt{2}-5}{\sqrt{7}}\backsim 0{,}24.$$

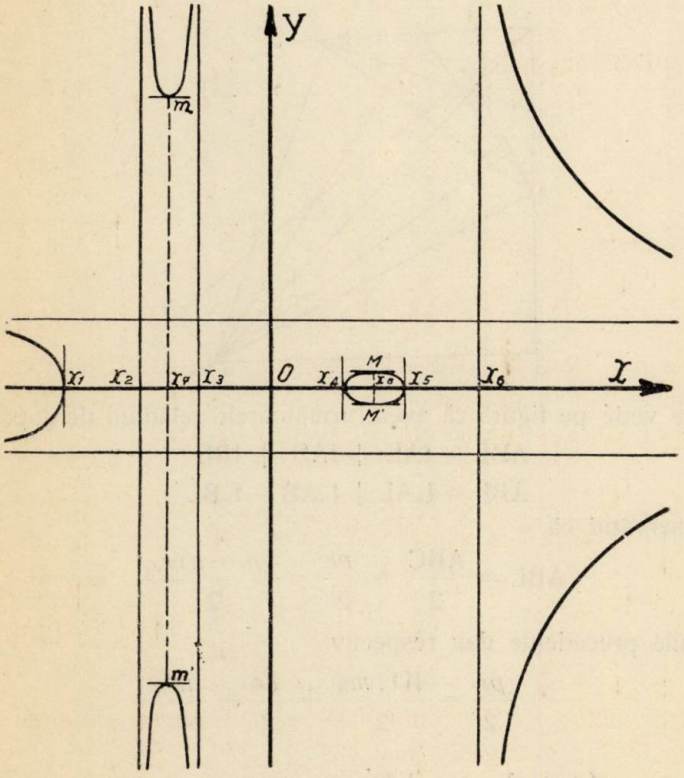
4. Punctele de discontinuitate precum şi punctele unde curba taie axa Ox au fost găsite mai sus.

5. Pentru o mai bună construire a curbei este bine să se observe că pentru toate valorile $x_1,\ldots,x_6$ derivata este infinită şi deci tangentele în punctele ce au aceste abcise sunt paralele cu axa Oy.

6. Tabloul de variaţie este

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_7		x_3		x_4		x_8		x_5		x_6		$+\infty$
y'		$-$			$-$		0		$+$			$+$	0		$-$			$-$	
y	1	$\searrow$	0	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$		0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0	$+\infty$	$\searrow$	1		

iar curba, împreună cu simetrica ei faţă de Ox, este reprezentată în figura alăturată.



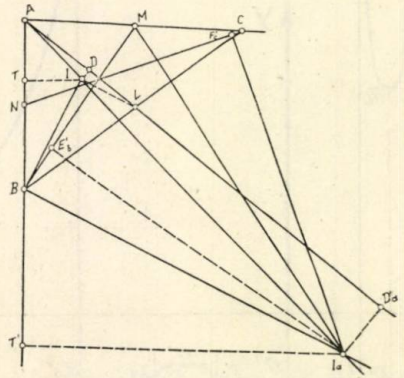
Observare. S'a mai primit o soluţie foarte bună nesemnată.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 5153. *Să se demonstreze că raportul distanţelor centrului cercului înscris şi al centrului unui cerc exînscris unui triunghiu la o mediană a triunghiului este egal cu raportul razelor acelor două cercuri sau este proporţional cu raportul celor două raze* [1]).

G-L GH. BUICLIU.

Fie $c < b < a$ laturile triunghiului ABC; L, M, N mijloacele acestor laturi; I, I_a, I_b, I_c centrele cercurilor tritangente şi r, r_a, r_b, r_c razelor lor; D, E, F proiecţiile lui I pe mediane; D'_a, E'_a, F'_a proiecţiile lui I_a şi D'_b, E'_b, F'_b, D'_c, E'_c, F'_c proiecţiile I_b, I_c pe mediane.



Se vede pe figură că avem următoarele relaţiuni de suprafeţe

$$ABL = IAL + IAB + IBL \tag{1}$$

$$ABL = I_aAL + I_aAB - I_aBL \tag{2}$$

sau observând că

$$ABL = \frac{ABC}{2} = \frac{pr}{2} = \frac{(p-a)\,r_a}{2} \tag{3}$$

relaţiunile precedente dau respectiv

$$\frac{pr}{2} = \frac{ID \cdot m_a}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{ar}{4}$$

şi

$$\frac{(p-a)\,r_a}{2} = \frac{I_aD'_a \cdot m_a}{2} + \frac{cr_a}{2} - \frac{ar_a}{4}$$

---

1) A se vedea erata dela pag. 224, Vol. XLV.

de unde se scoate

$$ID = \frac{2pr - 2cr - ar}{2m_a} = \frac{(b-c)r}{2m_a} \tag{4}$$

$$I_aD'_a = \frac{2(p-a)r_a - 2cr_a + ar_a}{2} = \frac{(b-c)r_a}{2m_a} . \tag{5}$$

Prin demonstrații analoage, sau prin permutări circulare, se găsește

$$IE = \frac{(a-c)r}{2m_b} \quad ; \quad IF = \frac{(a-b)r}{2m_c} \tag{6}$$

$$I_aE'_a = \frac{(a+c)r_a}{2m_b} \quad ; \quad I_aF'_a = \frac{(a+b)r_a}{2m_c} \tag{7}$$

și la fel patru I_b și I_c:

$$I_bD'_b = \frac{(b+c)r_b}{2m_a}, \quad I_bE'_b = \frac{(a-c)r_b}{2m_b}, \quad I_bF'_b = \frac{(b+a)r_b}{2m_c} \tag{8}$$

$$I_cD'_c = \frac{(b+c)r_c}{2m_a}, \quad I_cE'_c = \frac{(a+c)r_c}{2m_b}, \quad I_cF'_c = \frac{(a-b)r_c}{2m_c} . \tag{9}$$

Una din relațiunile (4) și (6) și una din relațiunile (5), (7), (8) și (9) demonstrează proprietatea din enunț. Avem de exemplu

$$\frac{ID}{I_aD'_a} = \frac{r}{r_a}; \quad \frac{ID}{I_bD'_b} = \frac{b-c}{b+c} \cdot \frac{r}{r_a}; \quad \frac{IE}{I_cE'_c} = \frac{a-c}{a+c} \cdot \frac{r}{r_c}; \ldots$$

Dacă se ia raportul distanțelor a două din punctele I_a, I_b, I_c la o aceeași mediană se găsește același rezultat. In adevăr:

$$\frac{I_aF'_a}{I_bF'_b} = \frac{r_a}{r_b} \quad ; \quad \frac{I_bE'_b}{I_aE'_b} = \frac{a-c}{a+c} \cdot \frac{r_b}{r_a}; \ldots$$

Notă. 1°. Scopul problemei a fost de a calcula distanțele centrelor I la mediane. Rezolvitorii problemei s'au mărginit la a observa că dacă T și T' sunt proiecțiile lui I și I_a pe AB, atunci

$$\frac{ID}{I_aD'_a} = \frac{IA}{I_aA} = \frac{IT}{I_aT'} = \frac{r}{r_a}$$

relație care este adevărată ori care ar fi AL.

2°. Au examinat numai cazul particular dela 1°, D-nii: D. D. BUZNEA, C. V. PANTELIMON, M. S. CHERȚMAN, M. M. CHINTESCU, C. D. EFTIMIE, AL. G. JILETCOVICI, IUL. PETRESCU, AUREL N. POPA, MIRCEA D. POPA, AL. ROHR, C. C. ȘERBAN, N. D. ȘTEFĂNESCU, MIREL D. STOENESCU, ȘERB. I. STOIANOVICI, M. AL. VASILESCU-STABU și E. G. VIJELIE.

G-L GH. B.

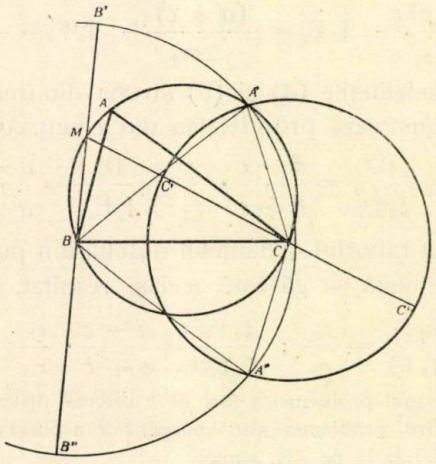
PROBLEMA 5154. *Se consideră un triunghiu* ABC *înscris în cercul* O. *Se descrie cercurile cu centrele în* B *şi* C *şi cu razele cât laturile opuse, care intersectează în* A', A" — A' *fiind pe cercul* O. *Fie* M *un punct oarecare pe cercul* O; MB, MC *taie cercurile* (B), (C) *în* B', B" *şi* C', C". *Dacă notaţiile sunt convenabil făcute, dreptele* B'C'. B"C" *se întâlnesc în* A".

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie. Este clar mai întâi, că unul din punctele A', A", fie A', se află pe cercul O şi anume este simetricul lui A faţă de mediatoarea laturei B'C; A" este simetricul lui A' faţă de BC. Figura ABA"C este un paralelogram; este atunci uşor de urmărit egalităţile de unghiuri

$$\sphericalangle B"BA" = \sphericalangle CBB" - C \; ; \; \sphericalangle ABB' = \sphericalangle B'BC - B$$

$$\therefore \; \sphericalangle B"BA" + \sphericalangle ABM = 180^0 - (B + C) = A.$$



Analog

$$\sphericalangle A"CC" = \sphericalangle BCC" - B \; ; \; \sphericalangle ACM = C - \sphericalangle BCM$$

$$\therefore \; \sphericalangle A"CC" - \sphericalangle ACM = 180^0 - (B + C) = A.$$

Fiindcă

$$\sphericalangle ABM = \sphericalangle ACM,$$

rezultă

$$\sphericalangle B"BA" + C"CA" = 2A.$$

Deci

$$\sphericalangle B''B'A'' + \sphericalangle C''C'A'' = \tfrac{1}{2}(\sphericalangle B''BA'' + \sphericalangle C''CA'') = A = \sphericalangle B''MC''.$$

Aceasta conţine colinearitatea punctelor B', C', A", căci fie N intersecţia A"B', C"C'; avem din cauza relaţiei precedente

$$\sphericalangle C''C'A'' = \sphericalangle B''MC'' - \sphericalangle B''B'A'' = \sphericalangle C''NA''$$

deci $N \equiv C'$.

Este apoi uşor de observat că B", C" fiind diametral opuse punctelor B', C', A"B" şi A"C" sunt perpendiculare pe B'C'A" deci în prelungire.

Soluţii bune date de D-nii: HORIA M. BODNĂRESCU, PANTELIMON V. CONSTANTIN, CONST. CRISTEA, PAUL DRĂGHICESCU, MIHAIL I. TREFILOV şi M. AL. VASILESCU-STABU.

Observări. 1. A' este punctul MIQUEL al patrulaterului (MB, MC, B'C', B"C"), iar cercul O este cercul MIQUEL al aceluiaşi patrulater. (M. TREFILOV).

2. Unii din corespondenţii citaţi ca rezolvitori, au dat o soluţie de forma: fie B_1, C_1 simetricele lui A' faţă de B, C; atunci B_1C_1 trece prin A"; şi se poate observa egalităţile de unghiuri

$$(B''A''B_1) = \tfrac{1}{2}(B_1BA'') = \tfrac{1}{2}(MBA') = \tfrac{1}{2}(MCA') = \tfrac{1}{2}(C''CC_1) = (C''A''C_1)$$

dar de aici nu rezultă colinearitatea punctelor fiindcă nu s'a demonstrat că B" şi C" sunt aşezate de o parte şi de alta a lui B_1C_1; în modul acesta, problema trebue complectată cu o amănunţită discuţie topologică. De altfel această discuţie inevitabilă aici, nu este de neglijat nici pentru prima soluţie.

PROBLEMA 5190. *Fie* φ *punctul* FEUERBACH *al unui triunghiu oarecare* ABC; A', B', C' *mijloacele laturilor sale şi* A_1, B_1, C_1 *punctele de contact ale cercului înscris cu laturile triunghiului. Celelalte notaţii fiind cele obişnuite, să se demonstreze relaţiile*

$$(1) \qquad a\overline{\varphi A_1^2} + b\overline{\varphi B_1^2} + c\overline{\varphi C_1^2} = 4Sr$$

$$(2) \qquad \frac{\overline{\varphi A'^2}}{\overline{\varphi A_1^2}} + \frac{\overline{\varphi B'^2}}{\overline{\varphi B_1^2}} + \frac{\overline{\varphi C'^2}}{\overline{\varphi C_1^2}} = \frac{R(2R-r)}{2r^2}.$$

P. I. GHIŞOIU.

Soluţie dată de D-nii: MIRCEA A NEGREA (Brăila) şi MARIN F. VĂDUVA (Lic. Giurgiu).

Folosim relaţiile [1])

$$\overline{\varphi A'^2} = \frac{R(b-c)^2}{4(R-2r)}, \ldots; \overline{\varphi A_1^2} = \frac{r(p-a)(b-c)^2}{a(R-2r)}.$$

1. Avem atunci

$$\Sigma a \overline{\varphi A_1^2} = \frac{r}{R-2r} \Sigma (p-a)(b-c)^2$$

dar [2])

$$\Sigma (p-a)(b-c)^2 = abc - 8(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$= 4RS - 8\frac{S^2}{p} = 4S(R-2r)$$

deci

$$\Sigma a \overline{\varphi A_1^2} = 4Sr$$

şi relaţia (1) este verificată.

2. Avem deasemenea

$$\sum \frac{\overline{\varphi A'^2}}{\overline{\varphi A_1^2}} = \frac{R}{4r} \sum \frac{a}{p-a} = \frac{R}{4Sr} \Sigma a r_a$$

dar [3])

$$\Sigma a r_a = 2p(2R-r)$$

deci

$$\sum \frac{\overline{\varphi A'^2}}{\overline{\varphi A_1^2}} = \frac{R(2R-r)}{2r^2}$$

relaţia (2) este astfel şi ea verificată.

---

1) Se poate vedea: V. CRISTESCU, G. M. XXIX, 182; GH. BUICLIU, G. M. XXXIV, 272; V. THÉBAULT, Mathesis, 1929–354, G. M. XXXIX, 41.

2) G. M. XXVIII — 249 sau sub forma

$$2p(a^2+b^2+c^2) - 4p(ab+bc+ca) + 9abc$$

şi $a^2+b^2+c^2 = 2(p^2-r^2-4Rr)$, $ab+bc+ca = p^2+r^2+4Rr$.

Culegere de probleme de trigonometrie II, ex. 23, Cap. VI.

3) V. CRISTESCU, G. M. XXVI—156 şi *Culegere de probleme de trigonometrie* II, ex. 25, Cap. VI.

PROBLEMA 5222. *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$x^2(y'-1)=y'^{2m},$$

m *fiind întreg.*

M. GHERMĂNESCU.

Efectuăm schimbarea $y'-1=u^2$, deci

$$x=\pm\frac{(u^2+1)^m}{u}\quad,\quad dx=\pm\frac{(u^2+1)^{m-1}(2mu^2-u^2-1)}{u^2}du.$$

Relaţiunea $dy=y'dx$ devine

$$dy=\frac{(u^2+1)^m(2mu^2-u^2-1)}{u^2}du.$$

Integrând, obţinem

$$y=\int y'dx=\int(u^2+1)\,dx=\pm\frac{(u^2+1)^{m+1}}{u}\mp 2\int(u^2+1)^m\,du+C,$$

C fiind constanta de integrare.

Integrala din membrul al doilea se calculează desvoltând binomul dacă $m>0$ sau cu ajutorul formulelor de recurenţă cunoscute, dacă $m<0$.

In definitiv, se obţine ecuaţiile parametrice ale familiei de curbe integrale sub forma

$$x=\pm\frac{(u^2+1)^m}{u}\quad,\quad y=f(u)+C.$$

Ecuaţia carteziană se obţine eliminând parametrul u între aceste două relaţiuni, ceea ce angajăm pe corespondenţii noştrii să încerce.

Notă. D-nii PANTELIMON C. şi TILICĂ ŞTEFAN au făcut substituţia $y'=u$.

M. G.

PROBLEMA 5229. *In patrulaterul* ABCD *însemnăm cu* E, F *mijloacele diagonalelor* AC *şi* BD. *Prin* E *şi* F *ducem paralele la* BD, AC *care taie două laturi opuse ale patrulaterului în* G *şi* H. *Să se arate că* GH *este paralelă cu o latură a patrulaterului.*

VIRGIL ANDRIESCU.

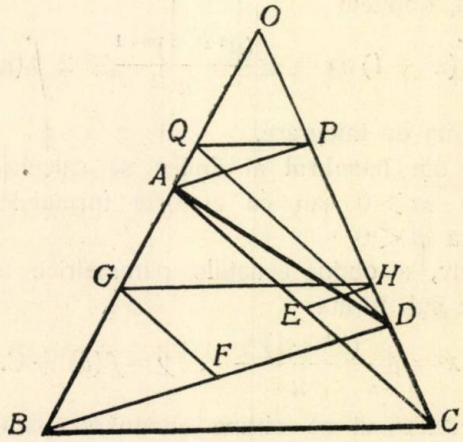
Soluţie. Ducem prin A o paralelă la BD care taie latura CD în P, iar paralela din D la AC taie AB în Q. Vom arăta că PQ este paralelă cu BC. In adevăr, fie O intersecţia laturilor AB şi CD. Avem

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OP}{OD} \quad \text{şi} \quad \frac{OQ}{OA} = \frac{OD}{OC}$$

deci

$$\frac{OQ}{OB} = \frac{OP}{OC}$$

rezultă că figura PQBC este un trapez. Se vede că GH uneşte mijloacele laturilor neparalele ale trapezului, deci este paralelă cu BC.



Observare. 1. Din demonstraţie se vede că nu este necesar ca E, F să fie la mijloacele diagonalelor ci să le împartă în acelaşi raport.

2. Se observă din cele de mai sus că dacă prin două vârfuri opuse Q şi C ale unui trapez PQBC ducem două drepte paralele care întâlnesc laturile neparalele în D şi A, dreptele PA şi BD care unesc punctele A, D cu celelalte vârfuri ale trapezului, sunt deasemenea paralele.

PAUL P. DRĂGHICESCU.
Cl. VI-a lic. mil. Iaşi.

Alte soluţii geometrice au fost date de D-nii: VICTOR G. BÂRLEA-SUHĂŢEANU (cl. VII-a, lic. mil. M-rea Dealu), HORIA M.

BODNĂRESCU (an. I. şc. polit. Bucureşti), VICTOR V. STOIKA (cl. V-a Col. naţ. Sf. Sava, Bucureşti), ŞERBAN STOIANOVICI (cl. V-a, lic. mil. M-rea Dealu), SANDU R. TURCU (cl. VIII-a, lic. mil. Iaşi).

Soluţii analitice date de D-nii: CORNELIU BREZEANU (cl. VIII-a, lic. Mihai Viteazu, Bucureşti) şi AL. G. JILETCOVICI (cl. VIII-a, lic. mil. Iaşi).

Notă. Observarea 2 făcută de D-l PAUL DRĂGHICESCU în soluţia D-sale foarte simplă şi elegantă, este cunoscută [1]; în variantă ea este justă şi când plecăm dela patrulaterul ABCD, ceea ce dovedeşte şi astfel că PQ este paralelă la BC, etc. N. M.

PROBLEMA 5244. *Fie* M *mijlocul laturei* AB *a exagonului regulat înscris în cercul* O *şi* C, C′ *intersecţiile lui* OM *cu cercul de diametru* AB. *Să se demonstreze că laturile duodecagoanelor regulate înscrise în cercul* O *sunt tot una cu laturile patratelor înscrise în cercurile de raze* OC *şi* OC′.

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-nii: MIREL D. STOENESCU (Şcoala ofiţeri de aviaţie, Bucureşti); C. D. EFTIMIE (Elev inginer); GH. BOGDAN, P. P. DRĂGHICESCU, M. D. IACOMI, P. CONSTANTIN, A. N. POPA şi M. D. POPA (Liceul militar, Iaşi).

Fie R raza cercului O. Scriind că OC şi OC′ sunt respectiv suma şi diferenţa între apotema exagonului înscris în cercul O şi jumătatea razei acestui cerc, avem

$$OC = \frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R}{2} = \frac{R}{2}(\sqrt{3}+1)$$

$$OC' = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}(\sqrt{3}-1).$$

Laturile patratelor înscrise în cercurile de raze OC, OC′ sunt respectiv

$$L_c = \frac{R}{2}(\sqrt{3}+1)\sqrt{2} = \frac{R}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

$$L_{c'} = \frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)\sqrt{2} = \frac{R}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

adică tocmai expresiunile laturilor duodecagoanelor înscrise în cercul de rază R.

---

1) De ex.: *Culegere de Probleme de Geometrie*, ex. 13, cap. VIII.

1°. *Soluţii* bune s'au mai primit dela D-nii: H. M. BODNĂRESCU (Şcoala Politechnică, Bucureşti); V. G. BÂRZU, I. V. JAREGHIE, S. R. TURCU (Liceul militar, Iaşi); E. R. ARENDT (Liceul militar, Târgovişte); C-TIN CRISTEA (Fostul Lic. militar, Chişinău); M. I. TREFILOV (Liceul „N. Bălcescu", Brăila); FL. J. ABELES (Liceul particular, Galaţi); M. L. RUSU (Student, Cluj); şi G. D. SBÂRNEA (Bacalaureat, Tecuci).

2°. D-l M. D. STOENESCU dovedeşte că dacă AB este latura duodecagonului convex, iar

$$r' = OC < r'' = OC'$$

atunci *latura patratului înscris în cercul de rază* r' *este egală cu latura exagonului înscris în cercul de rază* R şi *latura patratului înscris în cercul de rază* r'' *este egală cu latura triunghiului echilateral înscris în cercul de rază* R.

GH. B.

PROBLEMA 5265. *Să se rezolve ecuaţia*

$$2\operatorname{tg}\theta = 1 + \sin 2\theta.$$

EMILIAN MEREUŢĂ.

Soluţie dată de Maica GOGÂŢĂ DROSIDA (studentă Cluj) şi de D-nii: ALDEA V. V. (Târgovişte), ANDONIE I. (lic. Sf. Gheorghe, Buc.), BUZNEA D. D. (Târgovişte), CĂLIN I. D. (Şc. Polit. Buc.), MOCANU I. C. (Cernăuţi), POPA AUREL (lic. milit. Iaşi), RĂDULESCU O. (Şc. Of. Art.), ROHR. AL. (lic. milit. Iaşi), RUSU MIRCEA (student Cluj) şi ŞTEFANOVICI I. M. (lic. Sf. Andrei Buc).

Inlocuind pe $\sin 2\theta$ în funcţie de $\operatorname{tg}\theta$, avem:

$$2\operatorname{tg}\theta = 1 + \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta}$$

sau

$$2\operatorname{tg}^3\theta - \operatorname{tg}^2\theta - 1 = 0$$

care se mai poate scrie:

$$(\operatorname{tg}\theta - 1)(2\operatorname{tg}^2\theta + \operatorname{tg}\theta + 1) = 0$$

de unde:

(1) $\operatorname{tg}\theta - 1 = 0$ şi (2) $2\operatorname{tg}^2\theta + \operatorname{tg}\theta + 1 = 0.$

Prima ecuaţie ne dă imediat

$$\operatorname{tg}\theta = 1 \quad \therefore \quad (3) \quad \theta = k\pi + \frac{\pi}{4}.$$

A doua ecuaţie având rădăcini imaginare, (3) sunt soluţiile ecuaţiei.

S'au mai primit soluţii bune dela D-nii: BAKONYI C. C. (Timişoara), BOIANGIU D. D. (Turnu-Severin), CRUCERU CONST. (lic. Turnu-Severin), EFTIMIE D. C. (elev-ing. Buc.), GHEORGHIU O. (lic. Tulcea), HERLEA V. (student Cluj), FILA GH. E. (student Cluj), JILETCOVICI AL. (lic. mil. Iaşi), MOSCOVICI E. N. (lic. Lazăr Buc.), MIRCEA NEGREA (Brăila), NICULESCU C. M. (lic. Maiorescu Buc.), POPA D. MIRCEA), PANTELIMON C. (lic. milit. Iaşi), PETRESCU GH. (lic. Giurgiu), ROSENZVEIG MIRCEA (lic. Meşotă Braşov), SBÂRNEA GH. (lic. Tecuci), STOENESCU D. MIREL (Şcoala Ofiţeri de Aviaţie), TOPALESCU GH. (Tg.-Mureş), TREFILOV M. (Brăila) şi VĂDUVA F. MARIN (Giurgiu).

Observaţiuni.

1°. Cu toate că ecuaţia propusă a fost elementară, s'au primit multe soluţii incomplete sau greşite.

2°. Mai mulţi corespondenţi, de la acelaşi liceu, au trimes o soluţie identică.

E. M.

PROBLEMA 5282. *Să se rezolve ecuaţia*

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x + 2}{\sin x + \cos x} = 3(1 - \sin x \cos x).$$

EMILIAN MEREUŢĂ.

Soluţie dată de D-nii: MIRCEA A. NEGREA (Brăila), DRĂGHICESCU P., JILETCOVICI AL., PETRESCU A., PANTELIMON C., JAREGHIE V. I., ZAMFIR C. I., (toţi lic. militar Iaşi) şi ROLLEA C. V. (lic. militar Cernăuţi).

Ţinând seama că:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)$$

ecuaţia dată devine:

$$\frac{1}{\sin x + \cos x} = 1 - \sin x \cos x.$$

Notând

$$\sin x + \cos x = t$$

ecuaţia se reduce la ecuaţia de gradul III

$$t^3 - 3t + 2 = 0$$

care admite rădăcinile

$$t_1 = 1 \quad , \quad t_2 = 1 \quad , \quad t_3 = -2$$

de unde

$$(1)\ \sin x + \cos x = 1 \quad \text{şi} \quad (2)\ \sin x + \cos x = -2.$$

Prima ecuaţie prin ridicare la patrat, ne dă:

$$\cos x = 0 \quad \therefore \quad (3) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = 1 \quad \therefore \quad (4) \quad x = 2k\pi.$$

Ecuaţia doua neavând soluţii, soluţiile (3) şi (4) sunt soluţiile căutate.

S'au mai primit soluţii bune de la MAICA GOGÂŢĂ DROSIDA (studentă Cluj), D-ra PAPADOPOL-DEMETRA ELENA (Bacău) şi D-nii: ALDEA V. (lic. militar Târgovişte), ANDONIE I. (lic. Sf. Gheorghe, Buc.), BAKONYI C. (Timişoara), BOIANGIU D. (lic. T. Severin), CETĂŢEANU STELIAN (student-inginer, Bucureşti), CRUCERU C. (lic. T. Severin), EFTIMIE D. C. (elev-inginer, Buc.), FILA EUGEN (student, Cluj), FILITI GR. (lic. Sf. Andrei, Buc.), GHEORGHIU O. (lic. Tulcea), GLIGOR I. (lic. Arad), MATEESCU A. (lic. militar Craiova), MIHĂILESCU C. C. (lic. Câmpina), MOLDOVEANU N. D. (Chişinău), METEA GH. R., MOSCOVICI E. N. (Buc.), NICULESCU M. (Bucureşti), PETRESCU GH. (lic. Giurgiu), POPA AUREL (lic. militar Iaşi), POPA MIRCEA (lic. militar Iaşi), POTOPEANU GH. (lic. militar Iaşi), RACOVICEANU GR. VLAD (lic. Haret, Bucureşti), ROHR AL. (lic. militar Iaşi), PASCARU C. (lic. militar Iaşi), ŞTEFANOVICI I. MIRCEA (lic. Sf. Andrei Buc.), SBÂRNEA GH. (Tecuci), SENCHI M. E. (lic. Sf. Andrei Buc.), TOPALESCU GH. (lic. militar Tg.-Mureş), TREFILOV M. (lic. Brăila), VĂDUVA F. MARIN (lic. Giurgiu).

Observaţiuni. 1°. D-nii: JILETCOVICI GH. AL. şi PETRESCU V. A. (lic. militar Iaşi), au rezolvat ecuaţia:

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x + 2}{\sin x + \cos x} = \alpha\,(1 - \sin x \cos x)$$

studiind diferitele cazuri, după valorile parametrului α.

2°. Alte soluţii primite, sunt pline de greşeli elementare.

E. M.

PROBLEMA 5285. *Fie* M *un punct pe o cardioidă,* O *punctul său de întoarcere,* N *un punct pe tangenta în* M *la curbă astfel ca* $\overline{ON} = \overline{NM}$ *şi* P *şi* R *punctele unde dreapta* ON *taie curba.*

1°. *Să se arate că:*

$$\frac{1}{\overline{OP}} + \frac{1}{\overline{OR}} = \frac{4}{\overline{OM}}.$$

2°. *Să se afle locul geometric al punctului* N *când* M *se mişcă pe cardioidă.*

RĂDUCAN GEORGESCU.

I. *Soluţie* dată de D-nii: MIRCEA A. NEGREA, TEODOR A. ŞERBAN, ALEXANDRU I. ROHR.

Cardioida este un *melc al lui* PASCAL, *concoida unui cerc,* adică se obţine prelungind raza vectoare OD a cercului (C) cu centrul C, diametrul $OB = 2a$, cu o lungime $DM = 2a$. Luând O ca pol, dreapta OB ca axă polară, însemnând cu $\theta = BOD$, avem

$$OD = OB\cos\theta, \quad OD = 2a\cos\theta,$$

$$OM = OD + DM = 2a(1 + \cos\theta) = 4a\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

Notând cu $r_1 = OD$, $r = OM$, atunci ecuaţia cercului (C) este $r_1 = 2a\cos\theta$, iar ecuaţia cardioidei

$$r = 2a(1 + \cos\theta) \quad \text{sau} \quad r = 4a\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

1°. Unghiul v format de tangenta MN cu raza vectoare OM este dat de

$$\operatorname{tg} v = \frac{r}{r'} = -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = -\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= -\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{cotg}\left(-\frac{\theta}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right),$$

deci $v = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$. Cum triunghiul ONM este isoscel, unghiurile

$$NOM = NMO = \pi - v = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2},$$

$$(ON, Ox) = \theta + \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}, \quad (OR, Ox) = \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}.$$

Punctele M, N, P sunt pe cardioida $r = 2a(1+\cos\theta)$, şi le corespund unghiurile polare θ, $\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$, $\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$. Deci

$$OM = 2a(1+\cos\theta),\quad OP = 2a\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right] = 2a\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$OR = 2a\left[1+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$= 2a\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right] = 2a\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OR} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{1-\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\right) = \frac{1}{2a}\,\frac{2}{\cos^2\frac{\theta}{2}},$$

$$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OR} = \frac{2}{a}\,\frac{1}{1+\cos\theta} = \frac{4}{OM},$$

şi relaţia cerută este stabilită.

2°. Din triunghiul isoscel OMN, unde unghiul

$$MON = \frac{\pi-\theta}{2},\quad \text{avem}\quad \frac{OM}{2} = ON\cos\frac{\pi-\theta}{2}.$$

Notând cu $\rho = ON$, şi înlocuind pe OM, obţinem

$$\frac{4a\cos^2\frac{\theta}{2}}{2} = \rho\sin\frac{\theta}{2},\quad \rho = \frac{2a\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Luând O ca pol, axa polară Ox, punând unghiul

$$\omega = xON = \frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2},\quad \text{avem}\quad \frac{\theta}{2} = \omega-\frac{\pi}{2},$$

şi deci relaţia precedentă devine

$$\rho = \frac{2a\cos^2\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)},\quad \rho = \frac{-2a\sin^2\omega}{\cos\omega}.$$

Trecând la coordonate carteziene, $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, ecuaţia devine $x(x^2+y^2)+2ay^2 = 0$ şi locul lui N este o cisoidă cu punctul de întoarcere O şi asimptota perpendiculara pe OB în simetricul B′ al lui B faţă de O.

II. *Soluție* dată de D-nii: TUDOR GOSPODIN, MIRCEA L. RUSU, IONEL STAMATE.

1°. Să considerăm cercul (C) cu centrul C, cu diametrul $OB = 2a$ și un cerc (C_1) egal cu centrul C_1 tangent primului cerc în E. Paralela din O la CC_1 taie cercul (C) în D și cercul (C_1) în punctul M cel mai depărtat de D, astfel că $DM = CC_1 = 2a$. Punctul M se obține prelungind raza vectoare OD a cercului C cu o lungime $DM = 2a$. Punând unghiul $BOD = \theta$, locul lui M în coordonate polare este cardioida $r = 2a(1 + \cos\theta)$, cu punctul de întoarcere O și axa OAB. CC_1 fiind paralelă cu OM, dreptele OC și C_1M sunt simetrice față de tangenta comună în E la cele două cercuri egale. Arcele ODE și EM ale acestor două cercuri sunt egale. Deci, *cardioida este curba descrisă de un punct* M *însemnat al unui cerc* (C_1) *care se rostogolește în exterior peste un cerc egal* (C) [1]). Originea fiind O, acesta este punctul de întoarcere al cardioidei, care este și concoida cercului (C), prelungind razele vectoare OD cu $DM = 2a$ diametrul cercului (C).

Perpendiculara pe raza vectoare OD taie în I cercul (C) normala în D la cerc, adică diametrul DCI. Segmentul OI se zice subnormală și se știe că este egală cu

$$r' = \frac{dr}{d\theta}.$$

Ecuațiile cercului (C) și cardioidei fiind

$$r_1 = 2a\cos\theta \ , \quad r = 2a\cos\theta + 2a, \quad \text{avem} \quad r_1' = r'.$$

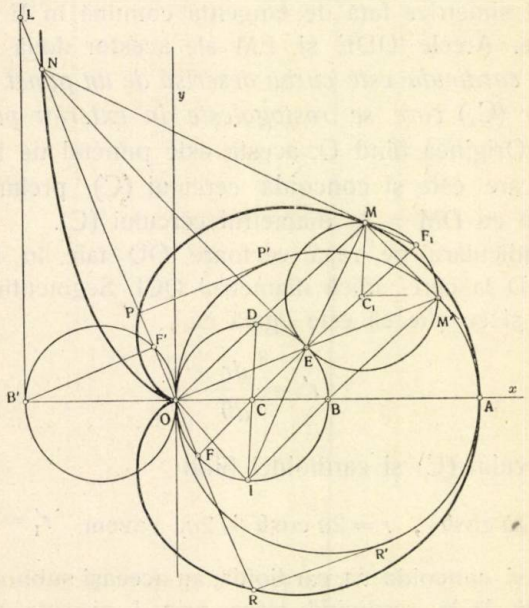
Deci cercul și concoida sa, cardioida, au aceeași subnormală, adică și normala în M la cardioidă trece prin I și este dreapta MI. Aceasta se mai vedea și astfel. Se știe că, în mișcarea unei figuri plane de formă invariabilă, la care aparține segmentul $DM = 2a$, normalele la curbele descrise de punctele figurii, sau la înfășurătoarele dreptelor figurii, se taie în centrul instantaneu I [2]).

---

1) Cardioida este o *epicicloidă*. Pentru desvoltări, J. LEMAIRE, *Hypocycloïdes et épicycloïdes;* BROCARD ET LEMOYNE, *Courbes géométriques remarquables;* GOMES TEIXEIRA, *Traité des courbes spéciales remarquables.*

2) N. ABRAMESCU, *Geometrie pură infinitezimală*, p. 33, 66 (Editura Universității Cluj).

Cum segmentul DM trece prin O, normala la înfăşurătoarea sa este perpendiculara în O pe ODM. Normala în D la cerc este diametrul DC, care taie perpendiculara precedentă în I pe cercul (C). Deci, normala în M la cardioidă trece prin I, este dreapta MEI. Tangenta în M este perpendiculara în M pe EM şi cum triunghiul ONM trebue să fie isoscel (ON = MN), rezultă că ON este perpendiculară pe OE simetrica lui EM faţă de perpendiculara EN pe mijlocul lui OM. F şi F_1 fiind intersecţiile cercurilor (C) şi (C_1) cu NO şi NM, care sunt perpendiculare pe OE şi EM, rezultă că F şi F_1 sunt pe diametrele FCE şi EC_1F_1 ale acestor cercuri, şi



dreapta FF_1 este paralelă cu OM. Unghiul OIB fiind drept, IB este paralelă cu OD şi cu diametrul FF_1, deci arcele DE = EB, OE este bisectoarea unghiului DOB. Unghiul la centru DCB este de două ori unghiul BOD = θ; deci BCD = 2θ. C_1M fiind paralelă cu CD, face cu Ox (OB) acelaşi unghiu 2θ.

Paralela din M la OI taie pe IB în M', astfel că figura OIM'M este dreptunghiu, deci BM' este perpendiculară pe MM'. Cum OM = IM', şi OD = IB, rezultă că BM' = DM = $2a$. MM' fiind perpendiculară pe raza BM' a cercului cu centrul B şi diametrul OA = 2OB, rezultă că MM' este tangentă la cercul OA.

Deci, *cardioida,* locul punctului M, *este curba descrisă de vârful* M *al unui unghiu drept* OMM', *a cărui o latură trece prin punctul* O *al unui cerc* de diametru OA *şi a doua latură* MM' *este tangentă la acest cerc.*

Suntem în cazul mişcării unei figuri plane de formă invariabilă, la care aparţine un unghiu drept şi deci normalele la curbele descrise de punctele figurii şi normalele la înfăşurătoarele dreptelor figurii, trec prin centrul instantaneu [1]). Înfăşurătoarele dreptelor OM şi MM' fiind punctul O şi cercul OA, normalele la aceste curbe sunt perpendiculara în O pe OM şi raza M'O, care se taie în I. Deci normala la curba descrisă de M, la cardioidă, este MI, iar tangenta este perpendiculara MN pe MI.

Punctele P şi R unde ON taie cardioida se obţin prelungind raza vectoare OF a cercului (C), în ambele sensuri, cu FP = $2a$, FR = $2a$, astfel că

$$OP = FP - OF = 2a - OF,\ OR = OF + FR = 2a + OF.$$

Puterea lui M faţă de cercul (C) este

$$MO \cdot MD = ME \cdot MI,\ MO \cdot 2a = 2\overline{ME}^2,$$

şi cum ME = OE, rezultă

$$\frac{1}{OM} = \frac{a}{OE^2}.$$

Avem
$$\frac{1}{OP} + \frac{1}{OR} = \frac{1}{2a - OF} + \frac{1}{2a + OF}$$
$$= \frac{4a}{4a^2 - \overline{OF}^2} = \frac{4a}{\overline{FE}^2 - \overline{OF}^2} = \frac{4a}{\overline{OE}^2} = \frac{4}{OM},$$

şi relaţia cerută este stabilită.

2°. Dreapta OF taie în F' şi L cercul de diametru OB' simetricul cercului (C) şi tangenta în B' la acest cerc. Avem OF' = OF şi B'F' = OE, ambele fiind perpendiculare pe FF', în cercuri egale. Triunghiurile dreptunghice B'F'L şi EON au B'F' = OE, şi NEO = LB'F', căci arcele OE = B'F' în cercuri egale. Rezultă că triunghiurile sunt egale şi deci ON = F'L. Deci punctul N se obţine luând pe secanta OL punctul N, astfel ca ON = F'L, care, după definiţie, descrie o cisoidă, corespunzătoare cercului de diametru OB', cu punctul de întoarcere O şi cu asimptota tangenta în B' la cercul OB'.

1) N. ABRAMESCU, *Geometrie pură infinitezimală*, p. 33, 66. (Editura Universităţii Cluj).

EXERCIŢII

2. Se consideră punctele $A(o, a)$ fix şi $B(\alpha, o)$ variabil. Se cere:

1°. Locul geometric al punctelor M şi M', extremităţile perpendicularei în B pe AB, având şi $\overline{MB} = \overline{M'B} = \overline{AB}$.

2°. Infăşurătoarea dreptelor MM'.

VIRGIL GHIŢESCU.

R. 1°. Fie $\alpha > o$, $M(x, y)$ şi $M'(x', y')$, iar P şi P' extremităţile absciselor acestor puncte. Triunghiurile AOB, MBP şi M'BP' sunt egale şi dau

$$M \left| \begin{array}{l} x = \alpha + a \\ y = \alpha \end{array} \right. \qquad M' \left| \begin{array}{l} x' = -(a - \alpha) \\ y' = -\alpha. \end{array} \right.$$

Prin eliminarea lui α obţinem

$$x - y - a = 0 \ , \text{ locul lui M}$$
$$x + y + a = 0 \ , \text{ locul lui M'}.$$

Pentru $\alpha < 0$, prin simetrie obţinem aceleaşi locuri însă inversate.

2°. Ecuaţia dreptei MM' este

$$y = \frac{\alpha}{a}(x - \alpha).$$

Derivând această ecuaţie în raport cu α şi eliminând apoi pe α între ecuaţie şi derivata ei, obţinem înfăşurătoarea $y = \frac{1}{4a}x^2$, parabolă cu yy' axă de simetrie.

3. Să se determine un punct O în planul a doi vectori

$$AP = \vec{P} \ ; \quad A_1P_1 = \vec{P_1}$$

astfel ca să aibă momentele lineare şi niriel-urile *) în acelaşi raport:

$$k = \pm \frac{\overline{AP}^2}{\overline{A_1P_1^2}}.$$

FLORESCU L. VICTOR.

R. Locul punctelor ce au momentele lineare în raportul k este o dreaptă, care după semnul luat, se confundă cu dreapta distanţelor proporţionale (a segmentelor AP, A_1P_1) sau cu isogonala acesteia.

Pentruca niriel-urile să fie în acelaş raport mai trebuie să avem:

$$\sphericalangle OAP = \sphericalangle OA_1P_1;$$

fie $M(AP, A_1P_1)$; deducem că O se află pe dreapta lor găsită mai sus şi pe cercul AA_1M.

Observaţie. Când dreapta lor a momentelor se confundă cu dreapta distanţelor proporţionale, O se va confunda cu punctul dublu al figurilor asemenea definite de AP şi A_1P_1.

---

*) Numim niriel al unui punct O în raport de un vector $AP = \vec{P}$, produsul:

$$V = \overline{AP} \times \overline{OA} \times \cos \widehat{OAP}.$$

4. Fie M, N, P trei puncte colineare ori picioare a trei ceviene concurente, pe laturile triunghiului ABC şi un punct O în plan. Fie M', N', P' punctele unde isogonalele dreptelor OM, ON, OP faţă de dreptele OB, OC,..., taie pe BC, etc. Să se arate că şi punctele M', N', P', sunt ori colineare ori picioare a trei ceviene concurente.

MIRCEA D. POPA.

R. Isogonalele OM, OM' dau

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{M'B}{M'C} = \frac{\overline{OC}^2}{\overline{OB}^2} \cdots$$

deci

$$\Pi \frac{MB}{MC} \cdot \Pi \frac{M'B}{M'C} = 1$$

şi se vede că dacă primul produs este ± 1, al doilea va avea aceeaşi valoare. Conform teoremei CARNOT, rezultatul se poate enunţa concentrat sub forma că M, N, P, M', N', P' sunt şase puncte pe o conică.

5. Fie M un punct pe o parabolă al cărui focar este F. Cercul cu centrul în F şi trecând prin M, axul de simetrie al parabolei şi tangenta în M, sunt concurente.

MIRCEA S. ROSENZWEIG.

Însemnând cu α şi β coordonatele punctului M, avem:

1) ecuaţia cercului

$$x^2 + y^2 - px - \alpha^2 - \alpha p = 0.$$

2) ecuaţia tangentei la parabolă:

$$\beta y = p(x + \alpha),$$

intersecţia cercului cu axa Ox este

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - px - \alpha^2 - \alpha p \\ y = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = -\alpha$$

$$x_2 = p + \alpha,$$

intersecţia tangentei cu axa Ox este:

$$\begin{cases} \beta y = p(x + \alpha) \\ y = 0 \end{cases}$$

$$x = -\alpha.$$

Această proprietate, uşurează construirea parabolei prin puncte şi tangente.

PROBLEME PROPUSE

5377. Există triunghiuri în care o latură să fie medie armonică a celorlalte două?

I. IONESCU.

5378. Să se găsească un număr de două cifre după care scriindu-i inversatul, sporit cu o unitate, să se obţină un patrat perfect.

G-L GH. BUICLIU.

5379. Dacă a este un număr prim şi φ_i (I) este indicatorul de ordinul i al numărului I, atunci avem:

$$[\varphi_\alpha(a^\alpha)]^n \geq \varphi_{n\alpha}(a^{n\alpha}).$$

Proprietatea poate fi extinsă la un număr oarecare?

COMANDOR I. LINTEŞ.

5380. Volumul maxim al piramidei drepte cu baza un poligon regulat de n laturi, construită dintr'un carton în formă de poligon regulat cu acelaşi număr n de laturi de lungime l, luând latura l' a poligonului de bază a piramidei

$$l' = \frac{2}{5} l \sec\alpha \qquad \left(\alpha = \frac{180^0}{n}\right).$$

Aplicaţie: $n = 8$; $l = 3$.

C. MIHU.

5381. Să se verifice identitatea

$$(\Sigma A^2)(\Sigma u x_0 - \Sigma A u a^2) + (\Sigma A u)(\Sigma A^2 a^2 + 1) = 0,$$

unde

$$A = \frac{x_0}{a^2 - \rho^2} \quad , \quad B = \frac{y_0}{b^2 - \rho^2} \quad , \quad C = \frac{z_0}{c^2 - \rho^2}.$$

M. GHERMĂNESCU.

5382. Variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfăcând relaţiei recurente

$$x_{n-1}^2 - x_n x_{n-1} + 1 = 0,$$

se cere să se determine forma generală a ecuaţiei reciproce $f(x_0) = 0$ de gradul 2^m, astfel încât *toate* sau cel puţin un număr consecutiv p din şirul ecuaţiilor

$$f(x_0) = 0 \quad ; \quad f(x_1) = 0; \ldots; f(x_{m-1}) = 0$$

să fie deasemeni reciproce.

G. G. CONSTANTINESCU.

5383. Fie m, n două numere naturale şi $P(x)$ un polinom (diferit de o constantă) astfel ca produsul $P(x+m)\,P(x-n)$ să fie divizibil cu $P(x)$. Să se arate că $P(x)$ este cel puţin de gradul $g=\frac{m+n}{d}$, d fiind cel mai mare divizor comun al numerelor m şi n.

Să se determine apoi numărul polinoamelor $P(x)$ de gradul g, care verifică proprietatea precedentă şi care nu se reduc unul la altul prin o transformare liniară. TIBERIU POPOVICIU.

5384. O dreaptă Δ intersectează laturile triunghiului ABC în punctele α, β, γ. Se consideră punctele

$$A'(B\beta, C\gamma)\ ;\ B'(C\gamma, A\alpha)\ ;\ C'(A\alpha, B\beta)$$
$$A_1(B'\beta, C'\gamma)\ ;\ B_1(C'\gamma, A'\alpha)\ ;\ C_1(A'\alpha, B'\beta).$$

Luând triunghiul $A_1B_1C_1$ ca triunghiu de referinţă şi aceeaşi dreaptă Δ şi făcându-se aceeaşi construcţie se obţin triunghiurile $A''B''C''$ şi $A_2B_2C_2$.

Să se arate că atât triunghiurile din seria $A'B'C'$; $A''B''C''$;..., cât şi cele din seria $A_1B_1C_1$; $A_2B_2C_2$;..., care sunt toate omologice între ele având pe Δ ca axă de omologie, au şi acelaşi centru de omologie. THEODOR G. COCEA.

5385. Fie M un punct pe una din cele trei diagonale ale unui patrulater complect. Dreptele ce trec prin M şi prin extremităţile uneia din celelalte două diagonale determină pe laturile patrulaterului un alt patrulater, iar cele care trec prin M şi prin extremităţile celeilalte diagonale, un al doilea patrulater. Complectând aceste două patrulatere, vom obţine celelalte două vârfuri ale fiecăruia.

Unul din aceste două vârfuri este comun celor două patrulatere, la intersecţia celorlalte diagonale, iar celelalte două rămase se găsesc pe diagonala pe care este situat şi punctul M.

IULIAN PETRESCU.

5386. Fie M un punct în planul parabolei p. Bisectoarele unghiului format de tangentele din M taie polara lui M în U şi V. Mijlocul segmentului $\overline{UV}$ se află pe directoarea parabolei.

N. N. MIHĂILEANU.

5387. Unei conice i se circumscrie două triunghiuri omologice.

1°. Triunghiurile de contact ale celor două triunghiuri date, sunt deasemenea omologice.

2°. O tangentă la conică taie laturile unui triunghiu în trei puncte, care, unite cu vârfurile opuse laturilor omoloage din cellalt triunghiu, determină trei drepte.

Cele trei drepte concură pe axa de omologie a triunghiurilor date.

LT. I. GH. ZAMFIRESCU.

5388. Intr'o conică se consideră triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ înscrise şi aşezate oricum. Fie G, G_1, G_2, H, I, I_1, I_2, J, L şi M intersecţiile perechilor de drepte (AB_1, A_1C_1); (BG, CA_1); (BG, AC); (AB_1, BC_1); (AC, BC_1); (BI, CA_1); (B_1I, A_1C_1); (AC, B_1C_1) şi (AB, A_1B_1).

1°. Să se arate că triplele de drepte (LM, BC_1, CA_1) şi (BC, A_1B_1, HJ) sunt concurente.

2°. Perechile de drepte (BI_1, AI_2) şi (C_1G_2, B_1G_1) se taie pe conică.

LT. C. IONESCU-ŢIU.

5389. Se cere locul geometric al vârfului C al unui triunghiu ABC ştiind că A este fix, B descrie o dreaptă dată, latura BC rămâne paralelă cu direcţia ei, iar raportul $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ este constant. Discuţie.

ION COŞEREANU.

5390. Să se arate că avem relaţia

$$\frac{p^2 - r_a^2}{p^2 + r_a^2} + \frac{p^2 - r_b^2}{p^2 + r_b^2} + \frac{p^2 - r_c^2}{p^2 + r_c^2} = 1 + \frac{r}{R},$$

notaţiile fiind cele obişnuite într'un triunghiu.

EMILIAN MEREUŢĂ.

5391. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale

$$\frac{dy}{dx} + y^2 \pm \frac{a^2}{x^4} = 0.$$

GH. POPESCU-BOTOŞANI.

Până la sfârșitul lunei precedente, s'au primit și reținut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea V. Mirea (4989, 5033, 108, 36, 228, 328, 29, 62, 69, 72); *Badea A. Ion* (5362, 64); *Bakonyi C. C.* (5369); *Bodnărescu M. Horia* (5121, 299, 358, 65, 69, 73); *Cetățeanu Stelian* (5299); *Drăghicescu P. Paul* (5194, 67, 68, 329); *Eftimie D. Cristea* (5218, 99, 328, 62); *Florescu L. V.* (E); *Moscovici E. Nicolae* (5217, 28, 64, 80); *Popa N. Aurel* (5336, 43, 55, 56); *Rohr I. Alex.* (5060, 176, 320, 23, 24, 28, 29, 39); *Rusu L. Mircea* (3929, 5356); *Sbârnea D. Gh.* (5361); *Șeibulescu A. C.* (5365); *Stoenescu Mirel* (5108, 247, 82).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie,** *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii și nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

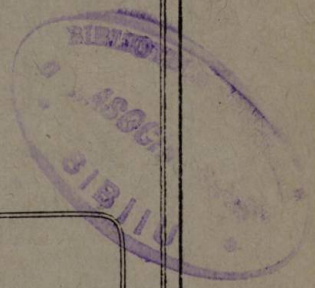
C. 66.621

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVI

NUMĂRUL 3. — NOEMVRIE 1940



SUMARUL

1. Regulamentul Bibliotecii „George Ţiţeica".
2. Algebra ornamentală . . . . . *I. Ionescu.*
3. Asupra problemei 2309 . . . . . *Tiberiu Popoviciu.*
4. O problemă de geometrie a triunghiului. *Gh. D. Simionescu.*
5. Asupra unei teoreme a Domnului General Gh. Buicliu . . . . . *Adrian Gheorghiu.*
6. Raport asupra premiului „V. Conta" . *Comisiunea pentru premii.*
7. Note Matematice: 10 — 14.
8. Bibliografie.
9. Cereri.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 3160, 4948, 5096, 5160, 5163, 5185, 5202, 5285, 5317, 5362.
12. Exerciţii: 6.
13. Probleme propuse: 4280, 2717, 4368, 4396, 4516, 4452, 5392 — 5406.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1940

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **D. Stoica**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1940 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: **53**64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73. 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 4**0**0, 01, 02, 03, 04, 05, 06.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale,* Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

REGULAMENTUL
BIBLIOTECII „GEORGE ŢIŢEICA“

Art. 1. — Pentru cinstirea memoriei Profesorului GEORGE ŢIŢEICA, Societatea „Gazeta Matematică“, primind donaţiunea făcută de către familia lui, a hotărît înfiinţarea unei Biblioteci de Matematici Elementare, care să permită elevilor de liceu şi şcoli speciale să-şi completeze şi să-şi desvolte cunoştinţele de matematici căpătate în şcoli.

Art. 2. — Biblioteca va purta numele de „Biblioteca Matematică GEORGE ŢIŢEICA“ şi va fi alcătuită din broşuri cu formatul 120×183 mm., fiecare broşură conţinând 50 până la cel mult 100 pagini, inclusiv titlurile şi tabla de materii, cuprinzând monografii cu diferite chestiuni de matematici elementare cu referinţe istorice şi aplicaţii teoretice şi practice.

Art. 3. — Toate broşurile din această bibliotecă vor purta titulatura:

GAZETA MATEMATICĂ

Biblioteca Matematică GEORGE ŢIŢEICA

şi vor avea un număr de ordine.

Art. 4. — Pentru pregătirea broşurilor din această bibliotecă, Delegaţia Societăţii se va adresa la membri ai Societăţii „Gazeta Matematică“, fixându-le subiectul ce urmează a trata.

Conform dorinţei donatorilor, prima monografie va trata un subiect de geometrie elementară.

Art. 5. — Manuscrisele pregătite pentru tipărire se vor da în cercetarea unei comisii compusă dintr'un delegat şi doi membri ai Societăţii „Gazeta Matematică“, de specialitatea chestiunilor tratate în manuscris.

Comisiunea îşi va da avizul, printr'un raport colectiv prezentat Delegaţiei, asupra admisibilităţii tipărirei şi a eventualelor modificări şi completări, pe care le-ar găsi necesare.

Această comisiune, completată cu autorul manuscrisului, se va îngriji de tipărire.

Art. 6. — Comisiunea prevăzută la art. 5, precedent, se alege în Adunările generale, sau în şedinţele lunare, alegerea punându-se expres la ordinea zilei.

Art. 7. — Fondul pentru tipărirea Bibliotecii matematice GEORGE ŢIŢEICA poate să fie sporit şi prin alte donaţii în afară de prevederile de la art. 1.

Art. 8. — Când venitul fondului, completat eventual cu alte sume donate sau cu disponibil din fondurile Societăţii „Gazeta Matematică", va putea acoperi cheltuelile de tipărire a unei broşuri, Delegaţia Societăţii va îngriji pregătirea unui manuscris în conformitate cu acest regulament.

Art. 9. — Pentru a se începe cât mai neîntârziat tipărirea Bibliotecii Matematice GEORGE ŢIŢEICA, donatorii au oferit a suporta cheltuelile tipăririi primei monografii.

Art. 10. — Manuscrisele pentru Biblioteca Matematică GEORGE ŢIŢEICA vor fi înaintate Societăţii „Gazeta Matematică" în trei exemplare.

Art. 11. — Din sumele realizate din vânzarea broşurilor, se vor acoperi cheltuelile de tipărire, expediere, taxe, comision de vânzare, etc. Din rest se va lua de către Societatea „Gazeta Matematică", pentru acoperirea cheltuelilor de administrarea fondului, cota prevăzută de regulamentul general al administrării fondurilor Societăţii „Gazeta Matematică". Restul va constitui venitul net al Bibliotecii Matematice GEORGE ŢIŢEICA.

Art. 12. — Din venitul net se dă autorului 10% pentru cheltuelile făcute cu alcătuirea, manuscriselor : scrierea la maşină, desemnarea figurilor, etc.

Art. 13. — Din restul venitului net, jumătate se dă pentru sporirea fondului „Biblioteca Matematică GEORGE ŢIŢEICA" şi jumătate pentru sporirea sumelor destinate tipăririi noilor broşuri.

Art. 14. — Autorii monografiilor nu vor primi nici-o remuneraţie pentru dreptul de autor. Ei vor primi 10 broşuri gratuite.

Art. 15. — Autorii monografiilor vor da, odată cu prezentarea manuscriselor, o scrisoare prin care se declară complet de acord cu prevederile prezentului regulament şi prin care se obligă a nu tipări, ei şi urmaşii lor, noi exemplare şi a nu publica monografia în alte reviste române sau străine, până când Societatea „Gazeta Matematică" nu va fi terminat vânzarea broşurilor ce posedă, sau

a ediţiilor următoare, dacă Societatea hotărăşte publicarea de noi ediţii.

Numai printr'o renunţare în scris a Societăţii „Gazeta Matematică", autorul sau urmaşii lui sunt deslegaţi de această obligaţie.

Art. 16. — La publicarea unei noi ediţii, Societatea „Gazeta Matematică" se poate adresa pentru revederea monografiei unui alt membru al Societăţii „Gazeta Matematică", atunci când autorul monografiei nu mai este în viaţă sau când fiind în viaţă declară în scris că nu doreşte să se ocupe de revederea sau tipărirea unei noi ediţii a monografiei sale.

Art. 17. — Când Societatea „Gazeta Matematică" nu va mai putea îndeplini cerinţele acestui regulament, fondul Bibliotecii Matematice „GEORGE ŢIŢEICA" se va da Academiei Române, cu rugămintea de a continua publicarea bibliotecii, conform cu acest Regulament, dacă va fi posibil, în caz contrar, fondul va rămâne la dispoziţia Academiei Române.

Art. 18. — In fiecare an, la prima Adunare Generală, Comisia prevăzută la art. 11 din Regulamentul General al administrării fondurilor „Gazetei Matematice", va face darea de seamă asupra veniturilor şi cheltuelilor făcute şi asupra realizărilor din cursul anului.

ALGEBRA ORNAMENTALĂ

Partea I. Introducere. In seara de 18 Martie 1940 am ţinut o conferinţă la *Societatea Română de Ştiinţe, Secţiunea Matematică,* despre *„Matematica şi estetica"* făcând o dare de seamă a unei cărţi: *L'„Algèbre ornamentale"* a D-lui E. MILICK. Conferinţa a fost publicată în întregime în *Buletinul Societăţii Politecnice din România,* No. 9 din Septemvrie 1940. Cum această chestiune interesează nu numai pe ingineri şi pe architecţi, ci şi pe matematiciani, D-l E. MILICK a prezentat lucrarea sa unor mari matematiciani ca D-nii J. HADAMARD şi E. CARTAN care au privit-o cu simpatie, au găsit în ea lucruri noi şi au dat sfaturi şi îndrumări autorului. D-l A. LAMBERT dela Observatorul din Paris a răspuns autorului că vede în lucrarea lui o *stenografie*

(scriere *condensată*, nu *rapidă* cum se crede) prin care, plecând dela elemente algebrice simple să traducem un desemn ornamental în formule matematice condensate şi invers. Sunt profesori care şi-au exprimat părerea că Algebra ornamentală va ajunge să intereseze pe matematicieni, părere pe care o împartăşesc, căci altfel nu răpeam cu această chestiune un spaţiu în *Gazeta Matematică*.

Lucrarea D-lui E. MILICK poartă titlul „*Elèments d'Algèbre ornamentale*", însă autorul îi zice dese ori mai scurt *Ornamentale*. Cartea are 112 pagini format 23×13, cu 243 figuri, 70 reguli şi formule şi 96 ecuaţii de geometrie analitică cu desenele curbelor reprezentative.

Scopul *Algebrei Ornamentale* e de a găsi ecuaţiile carteziane ale unor curbe sau figuri care constituiesc un ornament; sau invers, de a construi, după ecuaţii convenabil alcătuite, curbe sau figuri reprezentative cu care să putem desemna ornamente pentru construcţiuni care să fie plăcute la vedere.

In *Ornamentala* scopul principal este desenul, matematica este numai un mijloc de realizare, după cum în *Descriptivă* scopul este reprezentarea corpurilor, iar geometria o unealtă pentru facerea epurelor. Prin ea, — spune autorul, — se face ca rigla şi compasul să devină inteligente; prin ea desenul va fi, nu numai o artă, ci şi o ştiinţă.

Un ornament tras din ochi, cu mâna liberă nu se mai poate face la fel a doua oară; construit după ecuaţia lui el devine universal, invariabil cu timpul şi cu locul; el se poate pune la dispoziţiunea oricui, fără a fi desenator abil care să-l reproducă; desenul devine nepieritor. Ornamentala va permite să se grupeze şi să se clasifice în mod raţional ornamentele, independent de gustul unuia sau altuia. Prin variaţia coeficienţilor din ecuaţii se aduc modificări continui figurilor până ce dăm de figuri mai plăcute, nebănuite mai înainte.

* * *

Semnele. Pe lângă semnele matematice obişnuite, *Ornamentala* mai are nevoie de alte câteva semne noi. Astfel, ea având nevoie de formule lungi şi complicate uneori, s'au strâns formulele unele lângă altele şi s'au trecut de pe un rând pe altul. Trebuesc

deci semne care să despartă formulele şi să atragă atenţiunea că o formulă se continuă de pe un rând pe cel ce urmează. In acest scop s'au introdus respectiv semnul || zis al *sciziunii* şi semnul ||| zis al *urmării.* Primul se pune între formule sau ecuaţii şi al doilea la sfârşitul rândului în care se întrerupe o formulă sau o ecuaţie şi la începutul rândului următor.

Complicaţia unor formule face ca *parantezele* () şi [] să nu mai fie suficiente. Se întrebuinţează uneori şi acolade, dar acestea strică distribuţia rândurilor prin înălţimea lor mai mare. Autorul introduce *paranteze şi contraparanteze dreptliniare* de diferite ordine, dublând, triplând,... linia verticală $[\,]$, $[\![\,]\!]$. Autorul le zice acestora *croşete* şi *contracroşete* de ordinul I, II, III...

Prin analogie cu *semnul identităţii* din Algebră, s'a introdus un semn pentru *identitatea de desen,* patru linii scurte paralele: $\equiv$.

Radicalului $\sqrt{\ }$ i se pune totdeauna înainte semnul $+$, $-$ sau $\pm$, aceste semne nefiind cuprinse în semnul radicalului.

Pentru *aproximativ cu lipsă, cu spor* sau cu *sens necunoscut* al unei cantităţi A, se va scrie A...., A$^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$, sau A $:::$.

Un semn special, pe care-l foloseşte autorul pentru arătarea simetriei, — *simetrul* şi *contrasimetrul,* — are forma directă şi inversă a unor α prelungiţi: $\alpha\alpha$ $\omega\omega$.

Astfel, *simetrica* unei curbe (α) faţă de o dreaptă (β) sau a curbei $y = f(x)$ faţă de dreapta $y = (mx + n)$ se scrie:

$$(a)\ \alpha\alpha\ \beta\ \omega\omega \qquad f(x)\ \alpha\alpha\ mx + n\ \omega\omega,$$

unde y şi $=$ s'au suprimat, ca inutili, căci autorul scrie totdeauna ecuaţiile sub forma explicită $y = f(x)$.

Se mai întrebuinţează şi alte semne, de care nu ne vom ocupa aci.

* * *

Epsilonianul. In geometria analitică ecuaţia unei curbe dă curba în întregimea ei, pe când în *Ornamentală* numai rareori unele curbe închise, ca elipsa, cercul, intervin în totalitatea lungimii lor. Din linia dreaptă, din curbe infinite şi chiar din cele limitate uneori, ne trebue numai porţiuni anumite. Cum facem această limitare? Se cunosc mijloace în acest scop. D-l E. MILICK procedează în modul următor: Se porneşte dela un cerc cu raza *a*

având ecuația $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ și se trece la o elipsă cu axa mare a, cu ecuația $y = \pm \varepsilon \sqrt{a^2 - x^2}$ în care $\varepsilon < 1$. Cu cât ε scade, cu atât elipsa se turtește păstrându-și axa a. Dacă ε devine foarte mic, cele două jumătăți de elipsă separate prin axa cea mare tind să se confunde în o dreaptă de lungime a. Practicește am putea considera acea elipsă foarte turtită ca o dreaptă căci în desen cele două jumătăți simetrice ale elipsei se amestecă una cu alta. Dacă am face $\varepsilon = 0$ în ecuația elipsei, am găsi însă $y = 0$, și în loc de o dreaptă de lungimea $2a$ dăm peste toată dreapta infinită. Nu am putea zice că luăm pe ε infinit mic căci aci nu e cazul din calculul diferențial; aci ε trebue să existe în o valoare foarte mică și de aceea autorul zice lui ε un *extrem mic,* un *ne-neant.* Radicalul pe lângă care, sau în care se găsește un ε, se numește un *epsilonian.*

Această noțiune este de mare însemnătate în *Ornamentala* D-lui E. MILICK.

Ecuația:

$$y = \pm \varepsilon \sqrt{(x - a)(b - x)}$$

reprezintă segmentul de dreaptă de pe OX coprins între abscisele $+a$ și $+b$. Această ecuație nu mai este o ecuație algebrică propriu zisă, căci ε nu mai este o cantitate anumită ci numai un simbol, de aceea ecuațiile în care intervine ε se zic *semialgebrice.*

Generalizând vom zice că ecuația:

$$y = + \varepsilon \sqrt{-(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)} \ldots$$

reprezintă segmentele de pe axa OX cuprinse între abscisele a și b, apoi c și d... Tot așa ecuația:

$$y = q + \varepsilon \sqrt{-(x - a)(x - b)}$$

reprezintă un segment de dreaptă paralelă cu OX la distanța q, între ordonatele $x = a$ și $x = b$. Un asemenea segment pe o dreaptă înclinată față cu axele coordonate, s'ar nota:

$$y = px + q + \varepsilon \sqrt{-(x - a)(x - b)}.$$

Astfel ecuația:

$$y = x \pm \varepsilon \sqrt{a^2 - x^2}$$

reprezintă un segment pe bisectoarea unghiului XOY între abscisele $-a$ și $+a$.

Schimbând coeficienţii numerici care intră într'o ecuaţie putem reprezenta deodată mai multe figuri. Astfel ecuaţia:

$$y = q + q' + q'' + \ldots + \varepsilon \sqrt{-(x-a)(x-b)}$$

reprezintă segmente paralele cu OX, iar ecuaţia:

$$y = px + q' + q'' + \ldots + \varepsilon \sqrt{-(x-a)(x-b)}$$

reprezintă drepte paralele înclinate pe axa OX. Ecuaţia:

$$y = \pm \sqrt{[(4 \pm 2 \pm 1)a]^2 - x^2}$$

reprezintă cercuri concentrice echidistante, iar ecuaţia:

$$y = \pm \sqrt{(a' \pm a'' \pm a''' \pm \ldots)^2 - x^2}$$

cercuri concentrice cu depărtări neegale între ele. Ecuaţia:

$$y = \pm \sqrt{a^2 - (x \pm a)^2}$$

reprezintă două cercuri cu centrele pe OX, tangente între ele în origină. Ecuaţia:

$$y = \pm [(2 \pm 1)a \pm \sqrt{a^2 - x^2}]$$

reprezintă patru cercuri egale tangente între ele cu centrele pe axa OY formând un lanţ. Ecuaţia:

$$y = \sqrt{[(4 \pm 2 \pm 1)a]^2 - [x \pm 7a(2 \pm 1)]^2}$$

reprezintă patru cercuri egale cu centrele pe OX tangente între ele, având fiecare trei cercuri concentrice în interior egal depărtate, ceea ce constitue un ornament des întrebuinţat. Ecuaţia:

$$y = \pm \sqrt{a^2 - [x \pm (a \pm \tfrac{1}{2}a)]^2}$$

reprezintă patru cercuri cu centrele pe OX, cele două intermediare trecând prin centrele celorlalte, primul tangent la al treilea şi al doilea la al patrulea. Ecuaţia:

$$y = \pm [a \pm \sqrt{a^2 - (x+a)}]^2$$

reprezintă patru cercuri egale tangente la axele coordonate în cele patru cadrane. Ecuaţia:

$$y = \pm [4a \pm \sqrt{(3a \pm a)^2 - (x \pm 4a)^2}]$$

reprezintă aceleaşi cercuri cu câte un cerc concentric în interior de rază pe jumătate. In fine autorul dă ecuaţia:

$$y = \pm [(4a \pm 2a \pm a) \pm \sqrt{7^{-2}(4a \pm 2a \pm a)^2 - (x \pm 4a \pm 2a \pm a)^2}]$$

care reprezintă 256 cercuri cu centrele în cele 64 pătrăţele ale unui şah, câte patru concentrice echidistante în fiecare pătrăţel, cele mari fiind tangente la liniile lor despărţitoare. Ecuaţia:

$$y = x \pm \sqrt{(a \pm a' \pm a'')^2 - x^2}$$

reprezintă o serie de elipse cu o axă în lungul bisectoarei unghiului axelor coordonate ce trece prin cadranul întâiu şi cu centrele în origină. La fel putem reprezenta o fâşie de curbe de ordonate din ce în ce mai reduse ca în fig. 1 aci alăturata, corespunzând ecuaţiei:

$$y = \pm x^2 \sqrt{a^2 - x^2} / (q \pm q' \pm q'').$$

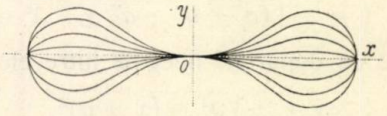


Fig. 1.

O altă întrebuinţare a epsilonianului este de a limita, din linii drepte infinite sau din curbe nelimitate, sau chiar limitate, anumite porţiuni de care avem nevoie. Aşa dacă am vrea să haşurăm un dreptunghiu cu linii paralele echidistante sau să-l umbrim prin paralele cu distanţe variabile, putem utiliza o ecuaţie de forma:

$$y = a \pm a' \pm a'' \pm \ldots \pm \varepsilon \sqrt{a^2 - x^2}.$$

O ecuaţie de forma:

$$y = \pm (px \pm q \pm q' \pm \ldots) \pm \varepsilon \sqrt{a^2 - x^2}$$

reprezintă două serii de drepte înclinate egal pe axa OX, care umplu un dreptunghiu cu ochiuri rombice. Se pot face haşuri unghiulare trecând prin un punct la distanţe unghiulare egale sau variabile. Putem de asemenea haşura spaţiul dintre două curbe cu haşuri dirijate către un anumit punct central.

O altă întrebuinţare a epsilonianului este suprimarea din o curbă sau din o fâşie de curbe a anumitor porţiuni. Aşa de exemplu să presupunem că am construi curba $y = f(x)$ la diferite scări şi că am voi să oprim din acele curbe numai porţiunile cuprinse între ordonatele a şi b, apoi între c şi d, etc. Ecuaţia ar fi în acest caz:

$$y = (k \pm k' \pm k'' \pm \ldots) f(x) \pm \varepsilon \sqrt{-(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}\ldots$$

Cu ajutorul epsilonianului de altă formă putem reprezenta puncte izolate. Observăm că ecuaţia:

$$y = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - x^2}$$

reprezintă cercul cu *raza extrem* de mică ε, adică, din punct de vedere practic, un *punct.* O serie de puncte pe axele OX şi OY sunt reprezentate prin ecuaţiile:

$$y = \pm (u \pm u' \pm u'' \pm \ldots) \pm \sqrt{\varepsilon^2 - x^2},$$

$$y = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - (x \pm v \pm v' \pm v'' \pm \ldots)^2}.$$

Ecuaţia:

$$y = (u \pm u' \pm u'' \pm \ldots) \pm \sqrt{\varepsilon^2 - (x \pm v \pm v'' \pm \ldots)^2}$$

reprezintă o grupă de puncte aşezate pe linii şi coloane la anumite distanţe. In mod analog se pot reprezenta puncte izolate de pe o curbă oarecare.

Cu ajutorul epsilonianelor putem reprezenta porţiuni de două sau mai multe drepte mărginite. Iată de exemplu aci ecuaţia unui *dreptar* (echer deschis):

$$y = \frac{1}{4}(3 \pm 5)\, x \pm \varepsilon \sqrt{x\,(a - x)}.$$

Ca exemplu de puterea de reprezentare grafică a *Ornamentalei,* D-l E. MILICK dă ecuaţia următoare cu patru epsiloniane:

$$|: \alpha = \pm \varepsilon \sqrt{x\,(8 - x)}\ ||\ \beta = \pm \varepsilon \sqrt{(x - 6)\,(11 - x)}\,|\cdot|$$

$$\gamma = \pm \varepsilon \sqrt{(x - 6)\,(10 - x)}\,||$$

$$\delta = \pm \varepsilon \sqrt{(x - 21)\,(27 - x)} : |\ ||\ \Big[(\alpha \pm 19{,}5 \pm 17 \pm 2{,}5)$$

$$||\ (\alpha + 15 \pm 9)\,||\,\Big(\alpha + 22 \pm 17 - \frac{5x}{8}\Big)\ ||\ \Big(\alpha + 16 \pm 2 \pm \frac{1}{4}x\Big)\Big]:$$

$$\infty\, x\, \infty\,||\,\beta \pm 4 \pm 4\,||\,\gamma + 4\,||\,\delta + 8\,||\,4 \pm$$

$$\Big[3 + \frac{2}{5}\sqrt{(x - 28)\,(33 - x)}\Big]\,||\,(\delta + 10{,}5 \pm 2{,}5) : \infty\, x - 20\, \infty\,||$$

pe care desemnând-o căpătăm numele ilustrului matematician NEWTON.

(Va urma) I. IONESCU.

ASUPRA PROBLEMEI 2309

Să considerăm un şir de polinoame în x

(1) $$P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$$

In cele ce urmează ne propunem *să determinăm şirurile de polinoame* (1) *care verifică o relaţie de recurenţă de forma*

(2) $$P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2 = A \cdot B^{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

unde A, B *sunt două polinoame.*

In această problemă e important să considerăm cazul particular când $A = -B \cdot P_0^2$. Vom zice că *şirul* (1) *este un şir regulat dacă polinoamele verifică relaţia de recurenţă*

(3) $$P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2 = -B^n \cdot P_0^2, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

unde $P_0 \neq 0$ *şi* $B \neq 0$ *este un polinom.*

Vom vedea că, în unele cazuri, problema generală revine la determinarea unor şiruri regulate. In ce priveşte şirurile regulate, ele pot fi de o natură cu totul diferită după cum polinomul B este sau nu un patrat perfect.

I.

1. Inainte de a trata cazul general să examinăm o problemă particulară. Să determinăm anume polinoamele

$$T_0 = 1, \quad T_1 = x, \quad T_n = T_n(x) = x^n + \ldots, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

gradul fiecăruia fiind exact egal cu indicele său şi care verifică relaţia de recurenţă

(4) $$T_{n+1} T_{n-1} - T_n^2 = -1, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Putem scrie

$$T_2 = x^2 - 1 = xT_1 - T_0.$$

Zic că avem, în general,

(5) $$T_n = xT_{n-1} - T_{n-2}.$$

Să facem demonstraţia prin inducţie. Pentru $n = 2$ am văzut că formula e adevărată. Să presupunem acum că formula e adevărată

pentru n şi să arătăm că va fi adevărată şi pentru $n+1$. Din

$$T_{n+1}\,T_{n-1} - T_n^2 = -1$$

scoatem, ţinând seamă de (5),

$$T_{n+1}\,T_{n-1} - T_n(xT_{n-1} - T_{n-2}) = -1.$$

Insă din (4) avem $T_n\,T_{n-2} = T_{n-1}^2 - 1$, deci

$$T_{n-1}(T_{n+1} - xT_n + T_{n-1}) = 0.$$

Dar $T_{n-1} \neq 0$, prin ipoteză, deci

$$T_{n+1} = xT_n - T_{n-1}.$$

Formula (5) este deci generală.

Teoria relaţiilor de recurenţă cu coeficienţi constanţi ne arată că

$$T_n = \frac{\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{x^2-4}},$$

ceea ce se mai poate scrie şi

$$(6) \qquad T_n = T_n(x) = \frac{\sin(n+1)\ \text{arc}\cos\frac{x}{2}}{\sin \text{arc}\cos\frac{x}{2}}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

2. Vom zice acum că un şir de numere $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ finit sau infinit, *este un şir* (C), dacă numerele c_n verifică relaţia de recurenţă

$$(7) \qquad c_0 = 1, \quad c_{n+1}\,c_{n-1} - c_n^2 = -1, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Un şir finit (C), $c_0, c_1, \ldots, c_m$, va verifica numai primele m egalităţi (7).

E evident că:

I. *Orice secţiune* $c_0, c_1, \ldots, c_m$ *a unui şir* (C), *finit sau infinit, este tot un şir* (C).

Din cele ce preced rezultă că:

II. *Pentru orice valoare numerică* α *a lui* x, *şirul*

$$(8) \qquad T_0(\alpha), T_1(\alpha), \ldots, T_n(\alpha), \ldots$$

este un şir (C).

Şirul (8) este un şir (C) particular şi anume acela care se obţine prin relaţiile de recurenţă

$$c_0 = 1 \quad , \quad c_1 = \alpha \quad , \quad c_n = \alpha c_{n-1} - c_{n-2}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Şirul (8) poate prezenta două aspecte deosebite.

a) Toţi termenii şirului (8) sunt diferiţi de zero. Acest lucru se întâmplă în general. De altfel cele stabilite la Nr. 1 ne arată că:

III. *Dacă termenii unui şir* (C) *sunt toţi diferiţi de zero, acest şir este neapărat de forma* (8).

b) Şirul (8) are termeni nuli numai dacă α este un zero al unui polinom T_n. Zerorile polinomului T_n sunt $2\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Rezultă că vom avea termeni nuli numai dacă $\alpha = 2\cos\dfrac{a\pi}{b}$, unde numerele naturale a şi $b \geqq 2$ se pot presupune prime între ele. Vom avea

$$c_n = \frac{\sin\dfrac{(n+1)\,a\pi}{b}}{\sin\dfrac{a\pi}{b}}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Se vede dar că $c_n = 0$ sau $\neq 0$ după cum $n \equiv -1 \pmod b$ sau $\not\equiv -1 \pmod b$, *iar şirul* (8) *este periodic.*

3. Vom arăta acum că există şiruri (C) neperiodice, care nu sunt deci de forma (8) şi vom determina toate aceste şiruri. Există şiruri (C) având un număr oarecare, finit sau infinit, de termeni nuli distribuiţi într'un mod arbitrar cu singura condiţie că dacă $c_m = 0$, să avem $c_{m-1} \neq 0$, $c_{m+1} \neq 0$ (de altfel $c_{m-1}^2 = c_{m+1}^2 = 1$, $c_{m+1}\, c_{m-1} = -1$).

Pentru aceasta observăm că din cele spuse la Nr. 1 rezultă că:

IV. *Dacă într'un şir* (C) *avem* $c_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots, m-1$, *putem găsi un număr* α *astfel ca să avem*

$$c_n = T_n(\alpha) \quad , \quad n = 0, 1, \ldots, m+1.$$

Pentru ca în plus să avem $c_m = 0$ trebue ca α să fie un zero al polinomului $T_m(x)$ şi anume un zero care să nu anuleze polinoamele $T_n(x)$, $n < m$. Trebue, prin urmare, ca să avem

$\alpha = 2\cos\dfrac{k\pi}{m+1}$ *k fiind* $\leqq m$ *şi prim cu* $m+1$. Vom avea

$$c_n = \frac{\sin\dfrac{(n+1)\,k\pi}{m+1}}{\sin\dfrac{k\pi}{m+1}}, \qquad n = 0, 1, \ldots, m+1.$$

In particular, avem $c_{m+1} = \cos k\pi = (-1)^k$. Dacă punem $c_n = (-1)^k\, c'_{n-m-1}$, $n = m+1,\ m+2, \ldots$ se vede imediat că $c'_0,\ c'_1, \ldots$ este un şir (C). Această observaţie stabileşte un procedeu de recurenţă care permite să determinăm toate şirurile (C).

Avem în definitiv următorul rezultat:

V. *Soluţia generală a sistemului* (7) *este dată de formulele*

$$(9) \qquad c_n = (-1)^{k_0+k_1+\ldots+k_i}\ \frac{\sin\dfrac{(n-m_i)\,k_{i+1}\pi}{m_{i+1}-m_i}}{\sin\dfrac{k_{i+1}\pi}{m_{i+1}-m_i}},$$

$$n = m_i+1,\ m_i+2, \ldots, m_{i+1}\ , \quad i = 0, 1, \ldots, r-1$$

$$(10) \qquad c_n = (-1)^{k_0+k_1+\ldots+k_r}\, T_{n-m_r-1}(\alpha),$$

$$n = m_r+1,\ m_r+2, \ldots$$

unde $m_0 = -1$, $k_0 = 0$, $m_1, m_2, \ldots$ *sunt un număr finit sau infinit de numere naturale astfel ca* $m_i > m_{i-1}+1$, $i = 1, 2, \ldots$, $k_i < m_i - m_{i-1}$ $i = 1, 2, \ldots$, *iar* α *un număr oarecare.*

In particular se poate să nu existe nici un m_i, $i > 0$ $(r = 0)$, *atunci se păstrează numai formulele* (10) *sau să existe o infinitate de numere* m_i, *atunci se păstrează numai formulele* (9) *pentru* $i = 0, 1, 2, \ldots$

Pentru ca în şirul (C) numai termenii $c_{m_1}, c_{m_2}, \ldots$ să fie nuli e necesar şi suficient ca numerele k_i să fie prime cu numerele $m_i - m_{i-1}$ respective.

4. Fie de exemplu $r = 2$, $m_1 = 3$, $m_2 = 5$, $k_1 = k_2 = 1$ şi $\alpha = 2$. Avem atunci şirul (C)

$$1, \sqrt{2},\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, n, \ldots$$

Acest şir nu e periodic şi mai mult *nici nu verifică o relaţie de recurenţă de ordinul al doilea.* In general, pentru ca un şir (C) să verifice o relaţie de ordinul al doilea

$$c_n = \alpha c_{n-1} + \beta c_{n-2} \quad , \quad n = 2, 3, \ldots$$

trebue ca $\beta = -1$, ceea ce se vede imediat rezolvind sistemul $c_2 = \alpha c_1 + \beta c_0$, $c_3 = \alpha c_2 + \beta c_1$. Punând apoi $c_2 = \alpha c_1 - c_0$ în $c_2 c_0 - c_1^2 = -1$, se vede că $c_1 (c_1 - \alpha) = 0$. Două cazuri se pot deci întâmpla:

a) $c_1 = \alpha$. Atunci regăsim şirurile (8).

b) $c_1 = 0$. Dacă punem $c_n = -c'_{n-2}$, $n = 2, 3, \ldots$, avem $c'_0 = 1$, $c'_1 = \alpha$, $c'_n = \alpha c'_{n-1} - c'_{n-2}$, $n = 2, 3, \ldots$ Vedem dar că:

VI. *Singurele şiruri* (C) *care verifică o relaţie de recurenţă de ordinul al doilea sunt şirurile* (8) *şi şirurile*

$$1, 0, -T_0(\alpha), -T_1(\alpha), \ldots, -T_n(\alpha), \ldots$$

α fiind o valoare numerică a lui x.

Să mai facem următoarea observaţie, care rezultă din cele ce preced:

VII. *Orice şir* (C) *finit este o secţiune a unui şir* (C) *infinit.*

Aceasta este reciproca proprietăţii I.

In felul acesta cunoaştem, de exemplu, soluţia completă a sistemului

$$(11) \quad c_0 = 1, \; c_m = 0, \; c_{n+1}, c_{n-1} - c_n^2 = -1, \quad n = 1, 2, \ldots, m$$

pe care îl vom întrebuinţa mai jos.

II.

5. Fie (1) un şir de polinoame în x. Să demonstrăm întâi următoarea proprietate:

VIII. *Dacă există o funcţie f de x astfel ca să avem*

$$(12) \qquad P_n = f \, . \, P_{n-1} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

putem găsi un polinom U *astfel ca să avem*

$$(13) \qquad P_n = U \, . \, P_{n-1} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Avem trei cazuri de examinat:

a) $f = 0$. Această funcţie coincide atunci cu polinomul identic nul şi proprietatea e evidentă.

b) $f \neq 0$ şi $P_0 = 0$. In acest caz toate polinoamele P_n sunt nule şi relaţia (13) e satisfăcută de orice polinom U de x.

c) $f \neq 0$ şi $P_0 \neq 0$. In acest caz toate polinoamele P_n sunt diferite de zero. E evident că f trebue să fie o funcţie raţională. Fie $f = \frac{R}{S}$ sub formă ireductibilă, deci polinoamele R, S sunt prime între ele. Din (12) se deduce

$$P_n = f^n P_0 = \frac{R^n}{S^n} P_0 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Insă R^n, S^n sunt două polinoame prime între ele, deci P_0 trebue să se dividă cu S^n oricare ar fi numărul natural n. Acest lucru nu e posibil decât dacă S se reduce la o constantă. Proprietatea VIII e deci complet demonstrată.

Să punem acum

$$(14) \qquad Q_n = P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Avem atunci următoarea proprietate:

IX. *Pentru ca să avem* $Q_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *e necesar şi suficient ca să se poată găsi un polinom* U *astfel ca să avem relaţiile* (13).

Condiţia e suficientă cum se poate uşor verifica. Rămâne să arătăm că e şi necesară. Trebue să distingem două cazuri:

a) $P_1 = 0$. Atunci din (14) se vede că $P_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, deci în (13) e destul să luăm $U = 0$.

b) $P_1 \neq 0$. Atunci din (14) rezultă că $P_n \neq 0$, $n = 0, 1, \ldots$ Fie $f = \frac{P_1}{P_0}$. Zic că avem relaţiile (12). Putem face demonstraţia prin inducţie. Proprietatea e adevărată pentru $n = 1$, prin construcţie. Să presupunem că e adevărată pentru n şi să demonstrăm că va fi adevărată şi pentru $n + 1$. Din $P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2 = 0$ se deduce

$$P_{n+1} P_{n-1} - P_n f P_{n-1} = P_{n-1} (P_{n+1} - f P_n) = 0.$$

Dar $P_{n-1} \neq 0$, deci $P_{n+1} = f P_n$. Relaţia (12) e deci generală. Proprietatea IX rezultă atunci din VIII.

6. Să presupunem acum că polinoamele (1) sunt legate prin o relaţie de recurenţă de ordinul al doilea

$$(15) \qquad P_n = f P_{n-1} + g P_{n-2} \quad , \quad n = 2, 3, \ldots$$

f, g fiind două funcţiuni de x.

Să formăm polinoamele (14) şi să punem

$$(16) \qquad V_n = Q_{n+1} Q_{n-1} - Q_n^2 \quad , \quad n = 2, 3, \ldots$$

Un calcul simplu ne arată că

$$(17) \qquad V_n = P_n \begin{vmatrix} P_{n-2} & P_{n-1} & P_n \\ P_{n-1} & P_n & P_{n+1} \\ P_n & P_{n+1} & P_{n+2} \end{vmatrix}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Dar, pe baza relaţiilor (15),

$$(18) \qquad V_n = Q_{n+1} Q_{n-1} - Q_n^2 = 0, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Din proprietatea IX, aplicată polinoamelor Q_n, rezultă atunci că:

X. *Dacă polinoamele* (1) *sunt legate prin o relaţie de recurenţă de forma* (15), *avem o relaţie de recurenţă de forma* (2).

Intr'adevăr $\frac{Q_2}{Q_1} = U$ este un polinom, deci e destul să luăm $A = Q_1$, $B = U$.

7. Acestea fiind stabilite să demonstrăm acum proprietatea următoare:

XI. *Dacă polinoamele* (1) *verifică o relaţie de recurenţă de forma* (15), *putem găsi două polinoame* U, V *astfel ca să avem*

$$(19) \qquad P_n = U P_{n-1} + V P_{n-2} \quad , \quad n = 2, 3, \ldots$$

Deci dacă polinoamele (1) verifică o relaţie de forma (15), funcţiile f, g sunt sau polinoame sau se pot înlocui prin nişte polinoame.

Pentru a demonstra proprietatea vom distinge două cazuri:

a) $Q_2 = P_3 P_1 - P_2^2 = 0$. Avem atunci şi $Q_n = 0$, $n = 3, 4, \ldots$ şi pe baza proprietăţii IX distingem două subcazuri:

a') $P_2 = 0$. Avem şi $P_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ şi putem lua pentru U şi V două polinoame oarecari.

a″) $P_2 \neq 0$. Avem atunci $P_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Putem lua $V = 0$ și $U =$ câtul dintre polinoamele P_2, P_1.

b) $Q_2 \neq 0$. In acest caz $Q_1 \neq 0$ și $A \neq 0$, $B \neq 0$ în relațiile (2). Dacă rezolvăm ecuațiile

$$P_2 = fP_1 + gP_0 \quad , \quad P_3 = fP_2 + gP_1$$

în raport cu f, g, găsim $g = -\frac{Q_2}{Q_1} = -B$, deci *dacă polinoamele* (1) *verifică o relație de recurență de forma* (15), *funcția g trebue să fie un polinom* $-B$. Funcția f e evident o funcție rațională.

Rămâne să arătăm că *și f se reduce la un polinom.*

Pentru aceasta să scriem $f = \frac{R}{S}$ sub formă ireductibilă. Relațiile (15) devin

$$P_n = \frac{R}{S} P_{n-1} - BP_{n-2} \quad , \quad n = 2, 3, \ldots$$

Putem scrie

$$(20) \qquad S\left(\frac{P_n}{S^m}\right) = R\left(\frac{P_{n-1}}{S^m}\right) - BS\left(\frac{P_{n-2}}{S^m}\right), \quad n = m+2, \; m+3, \ldots$$

Din (20) se vede că P_n *se divide cu* S^n, $n = 0, 1, \ldots$ Dacă punem

$$P_n = S^n P'_n \quad , \quad n = 0, 1, \ldots \quad (P'_0 = P_0)$$

polinoamele P'_0, $P'_1, \ldots$ verifică relația de recurență

$$(21) \qquad P'_n = \frac{R}{S^2} P'_{n-1} - \frac{B}{S^2} P'_{n-2}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

și rezultă, din cele ce preced, că $\frac{B}{S^2}$ trebue să fie un polinom. Deci B se divide cu S^2, $B = S^2 B'$, B' fiind un polinom. Relațiile (21) devin

$$P'_n = \frac{R}{S^2} P'_{n-1} - B' P'_{n-2}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Fracția $\frac{R}{S^2}$ e ireductibilă. Repetând raționamentul de mai sus asupra polinoamelor P'_n, se vede că B' se divide cu S^4, $B' = S^4 B''$.

Continuând acest procedeu se vede că

$$B'' = S^8 B''', \ldots, B^{(n-1)} = S^{2^n} B^{(n)}, \ldots$$

unde B'', B''',... sunt polinoame diferite de zero. Rezultă că $B = S^{2(2^n-1)} B^{(n)}$, oricare ar fi numărul natural n. Acest lucru nu e posibil, evident, decât dacă S se reduce la o constantă. Funcţia f trebue deci să se reducă la un polinom şi proprietatea XI e complect demonstrată.

(Va urma) TIBERIU POPOVICIU.

O PROBLEMĂ DE GEOMETRIE A TRIUNGHIULUI

Problema pe care o studiez în prezentul articol este următoarea: *dându-se cevienele* AA', BB', CC' *din triunghiul* ABC, *precum şi segmentele* $\overline{A'M} = m$; $\overline{B'N} = n$; $\overline{C'P} = p$, *perpendiculare respectiv pe laturile* BC, CA, AB, *să se găsească legătura ce trebue să existe între* m, n *şi* p *pentru ca dreptele* AM, BN *şi* CP *să fie concurente.*

Din această problemă generală vom desprinde două feluri de particularizări dintre care una este o generalizare a teoremei lui KARYA şi problemei 5112 a D-lui I. STĂNCULESCU (G. M. Vol. XLIV, pag. 447), iar cealaltă o generalizare a teoremei lui FRANKE.

Ca instrument de cercetare vom alege coordonatele baricentrice. Ecuaţiile laturilor triunghiului de referinţă sunt

$$(BC)\ x_1 = 0 \quad ; \quad (CA)\ x_2 = 0 \quad ; \quad (AB)\ x_3 = 0.$$

Să calculăm coordonatele punctului M, ţinând seama că ele sunt proporţionale cu ariile MBC, MCA, MAB. Pentru aceasta vom proecta punctul M pe latura AC în M', apoi punctul A' pe MM' în A_1 şi pe AC în A_1'. Atunci avem drept coordonate pentru M:

$$(1) \quad x_1 = -kam \quad ; \quad x_2 = k.b.\overline{MM'} \quad ; \quad x_3 =$$

Insă

$$\overline{MM'} = \overline{MA_1} + \overline{A_1M'} = m\cos C + \overline{A_1M'} = m\cos C + \overline{A'A_1'}$$

deoarece

$$\sphericalangle A'MM' = \sphericalangle C.$$

Apoi notând cu h_b înălțimea vârfului B avem:

$$\frac{\overline{A'A_1'}}{h_b} = \frac{\overline{CA'}}{a} \quad \therefore \quad \overline{A'A_1'} = h_b \cdot \frac{\overline{CA'}}{a} = \frac{2S}{ab} \cdot \overline{CA'}.$$

Insă, notând cu $\omega(\alpha, \beta, \gamma)$ punctul de întâlnire al cevienelor AA′ etc. avem:

$$\frac{\overline{CA'}}{\overline{A'B}} = \frac{\beta}{\gamma} \quad \therefore \quad \overline{CA'} = a\frac{\beta}{\beta+\gamma}$$

care înlocuit mai sus ne dă:

$$\overline{A'A_1'} = \frac{2S}{b} \cdot \frac{\beta}{\beta+\gamma}.$$

Rezultă din (1):

$$x_2 = kb\left(m\cos C + \frac{2S}{b}\frac{\beta}{\beta+\gamma}\right) = k\left(2S\frac{\beta}{\beta+\gamma} + mb\cos C\right).$$

In mod analog se calculează x_3. In definitiv, luând $k = 1$ vom avea:

$$M\left[-am \;;\; \left(2S\frac{\beta}{\beta+\gamma} + mb\cos C\right) \;;\; \left(2S\frac{\gamma}{\beta+\gamma} + mc\cos B\right)\right]$$

şi analog:

$$N\left[\left(2S\frac{\alpha}{\alpha+\gamma} + na\cos C\right) \;;\; -bn \;;\; \left(2S\frac{\gamma}{\alpha+\gamma} + nc\cos A\right)\right]$$

$$P\left[\left(2S\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + pa\cos B\right) \;;\; \left(2S\frac{\beta}{\alpha+\beta} + pb\cos A\right) \;;\; -cp\right].$$

Deducem imediat ecuațiile dreptelor:

$$(AM) \quad \left(2S\frac{\gamma}{\beta+\gamma} + mc\cos B\right)x_2 - \left(2S\frac{\beta}{\beta+\gamma} + mb\cos C\right)x_3 = 0$$

$$(BM) \quad \left(2S\frac{\alpha}{\alpha+\gamma} + na\cos C\right)x_3 - \left(2S\frac{\gamma}{\alpha+\gamma} + nc\cos A\right)x_1 = 0$$

$$(CP) \quad \left(2S\frac{\beta}{\alpha+\beta} + pb\cos A\right)x_1 - \left(2S\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + pa\cos B\right)x_2 = 0.$$

Condiția ca aceste drepte să fie concurente este:

$$\left(2S\frac{\gamma}{\beta+\gamma}+mc\cos B\right)\left(2S\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}+na\cos C\right)\left(2S\frac{\beta}{\alpha+\beta}+pb\cos A\right)$$
$$-\left(2S\frac{\beta}{\beta+\gamma}+mb\cos C\right)\left(2S\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}+nc\cos A\right)$$
$$\left(2S\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+pa\cos B\right)=0$$

sau făcând toate calculele:

$$(2)\qquad \boxed{\begin{aligned}&\Sigma\frac{mn}{\alpha+\beta}(\alpha b\cos A-\beta a\cos B)\,c\cos C\\&-2S\Sigma\frac{m}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}\alpha(\beta c\cos B-\gamma b\cos C)=0\end{aligned}}.$$

Aceasta este relația căutată. Se observă că este o diferență de două polinoame omogene în m, n, p; unul de gradul al doilea (Σ_1) și unul de gradul întâi (Σ_2).

Observație. Dacă ω este în $N\left(\frac{1}{p-a},\frac{1}{p-b},\frac{1}{p-c}\right)$, punctul lui GERGONNE, A', B', C' sunt punctele de contact ale laturilor cu cercul înscris. Luând $m=n=p=\lambda$ avem:

$$\Sigma_1=\lambda^2\Sigma[(p-b)\,b\cos A\cos C-(p-a)\,a\cos B\cos C]\equiv 0$$

$$\Sigma_2=\lambda(p-a)(p-b)(p-c)\,\Sigma\left[\frac{\cos B}{b(p-b)}-\frac{\cos C}{c(p-c)}\right]\equiv 0.$$

Deci relația (2) este verificată. Aceasta este teorema lui KARYA.

* * *

După *observația* de mai sus ne propunem să studiem mai amănunțit *cazul* în care avem:

$$(3)\qquad \Sigma_1=0\ ;\ \Sigma_2=0$$

deci un sistem de două ecuațiuni omogene cu trei necunoscute

m, n, p. Pentru rezolvarea sistemului eliminăm întâi parametrul p. Avem:

$$(4)\quad \begin{cases} mn\dfrac{(\alpha b\cos A-\beta a\cos C)c\cos C}{\alpha+\beta}+p\left[n\dfrac{(\beta c\cos B-\gamma b\cos C)a\cos A}{\beta+\gamma}\right. \\ \qquad \left.+m\dfrac{(\gamma a\cos C-\alpha c\cos A)b\cos B}{\gamma+\alpha}\right]=0 \\ m\dfrac{\alpha(\beta c\cos B-\gamma b\cos C)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}+n\dfrac{\beta(\gamma a\cos C-\alpha c\cos A)}{(\beta+\alpha)(\beta+\gamma)} \\ \qquad +p\dfrac{\gamma(\alpha b\cos A-\beta a\cos B)}{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}=0. \end{cases}$$

Înmulţind convenabil ecuaţiile şi scăzând găsim:

$$\frac{mn}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}\left[\left(\alpha b\cos A-\beta a\cos B\right)^2\gamma c\cos C\right.$$

$$\left.-\left(\beta c\cos B-\gamma b\cos C\right)^2\alpha a\cos A-\left(\gamma a\cos C-\alpha c\cos A\right)^2\beta b\cos B\right]$$

$$-\frac{(\beta c\cos B-\gamma b\cos C)(\gamma a\cos C-\alpha c\cos A)}{\alpha+\beta}$$

$$\left[\frac{m^2\alpha b\cos B}{(\alpha+\gamma)^2}+\frac{n^2\beta a\cos A}{(\beta+\gamma)^2}\right]=0.$$

Expresia ce înmulţeşte prima fracţie se poate pune sub forma

$$(\beta c\cos B-\gamma b\cos C)(\gamma a\cos C-\alpha c\cos A)(\alpha b\cos A+\beta a\cos B)$$

şi atunci se observă că întreaga ecuaţie se împarte cu factorul (presupunând ω diferit de ortocentrul H):

$$\frac{(\beta c\cos B-\gamma b\cos C)(\gamma a\cos C-\alpha c\cos A)}{\alpha+\beta}$$

şi rămâne:

$$\frac{mn}{(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)}(\alpha b\cos A+\beta a\cos B)-\frac{m^2}{(\alpha+\gamma)^2}\alpha b\cos B-\frac{n^2}{(\beta+\gamma)^2}\beta a\cos A=$$

$$=-\left(\frac{m}{\alpha+\gamma}\alpha b-\frac{n}{\beta+\gamma}\beta a\right)\left(\frac{m}{\alpha+\gamma}\cos B-\frac{n}{\beta+\gamma}\cos A\right)=0$$

care se desface în două ecuaţii:

$$(5)\quad \frac{m}{\alpha+\gamma}\alpha b = \frac{n}{\beta+\gamma}\beta a \quad \therefore \quad \frac{m}{\frac{a(\alpha+\gamma)}{\alpha}} = \frac{n}{\frac{b(\beta+\gamma)}{\beta}} = t$$

şi

$$(6)\quad \frac{m}{\alpha+\gamma}\cos B = \frac{n}{\beta+\gamma}\cos A \therefore \frac{m}{(\alpha+\gamma)\cos A} = \frac{n}{(\beta+\gamma)\cos B} = t.$$

Ducând valorile lui m şi n din (5) în a doua ecuaţie din (4) găsim:

$$t\frac{c(\beta a\cos B - \alpha b\cos A)}{\alpha+\beta} + p\frac{\gamma(\alpha b\cos A - \beta a\cos B)}{(\alpha+\gamma)(\gamma+\beta)} = 0$$

$$\therefore \qquad p = t\frac{c(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}{\gamma(\alpha+\beta)}.$$

Introducând valoarea lui t în (5) găsim:

$$(7)\qquad \frac{m}{\frac{a}{\alpha(\beta+\gamma)}} = \frac{n}{\frac{b}{\beta(\gamma+\alpha)}} = \frac{p}{\frac{c}{\gamma(\alpha+\beta)}}$$

care constitue prima serie de soluţii a sistemului (3). Ducând valorile lui t din (6) în a doua ecuaţie din (4) găsim:

$$\frac{t}{\alpha+\beta}\gamma\cos C(\beta a\cos B - \alpha b\cos A) + p\frac{\gamma(\alpha b\cos A - \beta a\cos B)}{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)} = 0$$

$$\therefore \qquad p = t\frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)\cos C}{\alpha+\beta}.$$

Introducând valoarea lui t în (6) găsim:

$$(8)\qquad \frac{m}{\frac{\cos A}{\beta+\gamma}} = \frac{n}{\frac{\cos B}{\gamma+\alpha}} = \frac{p}{\frac{\cos C}{\alpha+\beta}}$$

care constitue a doua serie de soluţii a sistemului (3).

Din (7) şi (8) rezultă că dacă punctul $\omega(\alpha, \beta, \gamma)$ este dat, cevienele AM, BN, CP vor fi concurente dacă luăm pentru segmentele m, n, p valorile :

$$(7') \quad m = k\frac{a}{\alpha(\beta+\gamma)} \quad ; \quad n = k\frac{b}{\beta(\gamma+\alpha)} \quad ; \quad p = k\frac{c}{\gamma(\alpha+\beta)}$$

sau

$$(8') \quad m = k\frac{\cos A}{\beta+\gamma} \quad ; \quad n = k\frac{\cos B}{\gamma+\alpha} \quad ; \quad p = k\frac{\cos C}{\alpha+\beta}$$

k fiind un coeficient de proporţionalitate.

(Va urma) GH. D. SIMIONESCU.

ASUPRA UNEI TEOREME A DOMNULUI GENERAL GH. BUICLIU

In articolul cu acest titlu din G. M. XLV, pag. 64, Domnul Prof. D. V. IONESCU generalizează în plan şi în spaţiu următoarea teoremă a Domnului General GH. BUICLIU :

O dreaptă Δ *taie laturile* AB, AC *ale unui triunghiu* ABC *în* C', B'. *Fie* D *proecţia lui* A *pe* Δ *şi* E *intersecţia lui* BB' *cu* CC'. *Să se arate că dacă* Δ, B, C *rămân fixe atunci* DE *trece printr'un punct fix, oricare ar fi* A *în plan.* (R. M. T. XIV, p. 84).

Generalizarea în spaţiu este următoarea :

Se consideră tetraedrul SABC *şi punctele* A', B', C' *pe muchiile sale* SA, SB, SC. *Fie* S_1 *un punct arbitrar şi fie* P, A_1, B_1, C_1 *intersecţiile dreptelor* S_1S, S_1A', S_1B', S_1C' *cu planul* ABC. *Se notează cu* I *intersecţia planelor* AB'C', BC'A', CA'B' *şi cu* I_1 *intersecţia planelor* $A_1B'C'$, $B_1C'A'$, $C_1A'B'$. *Punctele* P, I, I_1 *sunt colineare.*

In cele ce urmează dau acestei generalizări o demonstraţie geometrică, care dacă nu aduce precizările cantitative ale soluţiei vectoriale a D-lui Prof. D. V. IONESCU, aduce câteva precizări calitative, de fapte pur geometrice.

Să observăm că:

Dreptele S_1SP și $S_1A'A_1$ determină un plan (α) care conține și pe A căci conține dreapta SA'A, încât intersecția acestui plan (α) cu planul ABC este dreapta AA_1P.

Analog dreptele S_1SP și $S_1B'B_1$ determină un plan (β) care conține și pe B căci conține dreapta SB'B, încât intersecția acestui plan (β) cu planul ABC este dreapta BB_1P.

Analog se determină planul (γ) care taie planul ABC după dreapta CC_1P.

Urmează deci că AA_1, BB_1, CC_1 *fiind concurente în* P, *triunghiurile* ABC *și* $A_1B_1C_1$ *sunt omologice, centrul de omologie fiind* P.

Iar axa de omologie e determinată de punctele

$$c \equiv (AB,\ A_1B_1)\ ,\ a \equiv (BC,\ B_1C_1)\ ,\ b \equiv (CA,\ C_1A_1).$$

Dar deoarece și dreapta SS_1 trece prin P rezultă că:

Tetraedrele SABC *și* $S_1A_1B_1C_1$ *sunt omologice, centrul de omologie fiind* P, *iar planul de omologie fiind planul* A'B'C', determinat de intersecțiile de drepte omoloage:

$$A' \equiv (SA\ ,\ S_1A_1), \ldots$$

$$a \equiv (BC\ ,\ B_1C_1), \ldots$$

In adevăr, aceste șase puncte sunt într'un același plan, căci de exemplu:

a fiind intersecția dreptelor BC și B_1C_1 este în același timp intersecția planelor ce determină aceste drepte, adică a planelor

$$SBC \text{ cu } ABC \text{ și } S_1B_1C_1 \text{ cu } ABC$$

urmează că și intersecția planelor SBC cu $S_1B_1C_1$ adică dreapta B'C' trece prin *a*.

Adică *a*, *b*, *c* se găsesc în planul A'B'C', respectiv pe laturile B'C', C'A', A'B'.

Atunci tetraedrele SABC și $S_1A_1B_1C_1$ fiind omologice în omologia (P, A'B'C'), două puncte omoloage ale lor sunt colineare cu P, iar două drepte sau două plane omoloage ale lor se taie (într'un punct sau după o dreaptă) în planul A'B'C'.

Cu acestea să observăm că:

Planele AB'C' şi $A_1B'C'$ sunt omoloage în cele două tetraedre omologice căci A şi A_1 sunt omoloage, iar B'C' este omoloaga ei însăşi găsindu-se în planul de omologie al tetraedrelor.

Analog, planele BC'A' cu $B_1C'A'$ şi CA'B' cu $C_1A'B'$ sunt omoloage în aceeaşi omologie, deci intersecţiile:

$$I \equiv (AB'C' , BC'A' , CA'B'),$$

$$I_1 \equiv (A_1B'C' , B_1C'A' , C_1A'B')$$

sunt *două puncte omoloage* în cele două tetraedre SABC şi $S_1A_1B_1C_1$ omologice în omologia (P, A'B'C'), încât dreapta II_1 trece prin centrul de omologie P.

Deci P, I, I_1 *sunt colineare.*

ADRIAN GHEORGHIU.

RAPORT ASUPRA PREMIULUI „V. CONTA"

Anul acesta am primit în vederea premiului V. CONTA lucrarea D-lui V. NOVACU, intitulată: „*Evoluţia concepţiei despre lumină.* Ed. Soc. Române de Filosofie. Este reproducerea unui foarte bun studiu pe care l-a publicat în *Revista de Filosofie.* Afară de acest studiu, D-l VALER NOVACU a desfăşurat, de zece ani de zile, o foarte bogată activitate pe terenul filosofiei matematice, publicând studii în reviste deosebite, ca *Ştiinţă şi Progres, Viaţa Românească.*

Licenţiat în matematice şi în fizico matematice de la Universitatea din Cluj, doctorand în fizică, elev al D-lui LOUIS DE BROGLIE, D-l VALER NOVACU s'a ocupat mai cu seamă de fundamentele fizicei matematice moderne. Evoluţia teoriilor asupra luminii, cu aspectul lor corpuscular şi ondulatoriu, cu relaţiile reciproce între cele două domenii, cu oscilarea în timp de la un gen de explicaţii la celălalt, cu dualismul pe care-l aduc în teoria fizică, sunt foarte bine puse în lumină de D-l V. NOVACU aşa că lucrarea D-sale este un călăuz preţios pentru studenţii în ştiinţe, care se

ocupă de acest domeniu precum şi pentru filosofi. De altfel, apariţia lucrării a fost salutată cu entuziasm de specialişti ca D-l Prof. E. BĂDĂRĂU, sau D-l Prof. O. ONICESCU (în Natura), etc.

Socotim că premiul V. CONTA pe anul 1940 se cuvine din plin D-lui Asistent VALER NOVACU, activitatea D-sale încadrându-se perfect în programul pe care l-a avut *Gazeta Matematică* atunci când a creat premiul V. CONTA, iar lucrările D-sale de până acum aducând o reală contribuţie la progresul filosofiei matematică în literatura românească.

COMISIUNEA
PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „V. CONTA"
C-DOR I. LINTEŞ, PROF. O. ONICESCU,
PROF. P. SERGESCU.

Acest raport s'a citit şi s'a aprobat în şedinţa Adunării Generale dela 29 August 1940.

NOTE MATEMATICE

10. *Asupra problemei de construcţie din nota 55, Vol. XLV, Gazeta Matematică.* Enunţul problemei este: *Se dă un triunghiu* ABC *şi se cere a se construi cu rigla şi compasul un cerc* O *tangent laturilor* AB *şi* BC *în* D *şi* E *şi care să taie latura* AC *în punctele* H *şi* K *aşa încât*

$$DE = HK.$$

In soluţia dată la pag. 632, Vol. XLV se calculează pe cale trigonometrică unghiul OAB, se găseşte

$$\operatorname{tg} OAB = \operatorname{tg}\alpha = \frac{c \sin A}{c \cos A + c \sin \frac{B}{2}} \qquad (1)$$

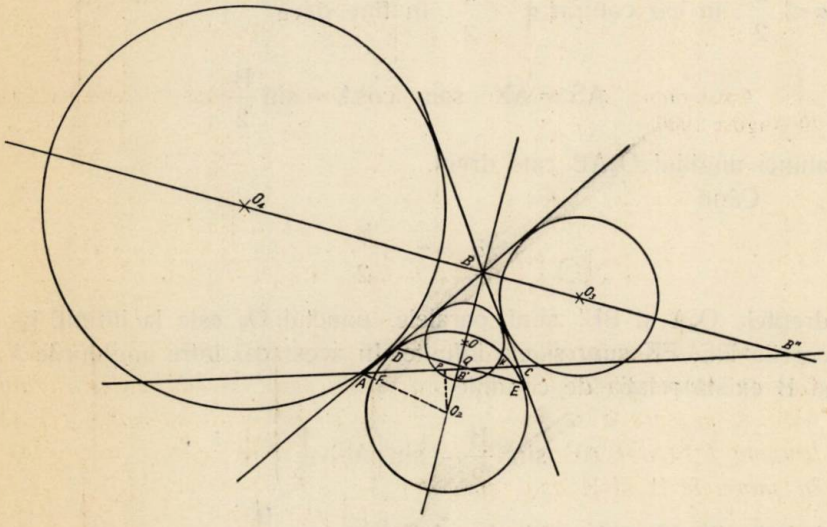
se construeşte unghiul α astfel determinat şi se ia intersecţia lui OA cu bisectoarea unghiului B.

Soluţia dată este numai parţială, căci formula (1) nu este generală tuturor cazurilor de figură şi nu s'au examinat topologic toate regiunile din plan în care se poate afla punctul O.

In cele ce urmează reluăm această problemă, căreia i-am dat o soluție completă și o generalizare prin omotetie la pag. 358, Vol. XLIV, și o examinăm topologic pe calea trigonometrică dată parțial în nota 55 citată.

Locul centrelor cercurilor tangente laturilor BA, BC fiind cele 2 bisectoare ale unghiului B, vom presupune că O se află pe rând în diferitele regiuni ale celor 2 bisectoare.

Notăm cu α_i unghiul BAO sau OAB, după senzul în care se citește acest unghiu, i fiind numărul de ordine al formulei care dă pe α_i și fie B′ piciorul bisectoarei interioare a unghiului B pe latura AC.



1°. *Când* O *se află între* B *și* B′ s'a găsit în nota 55, Vol. XLV

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\sin A}{\cos A + \sin\frac{B}{2}} = \frac{BS}{AS + AX} \qquad (1)$$

unde S și X sunt proiecțiile lui B și A respectiv pe AC și BB′.

2°. *Fie* O *pe prelungirea lui* BB′. Notăm cu D, E punctele de tangență ale lui O cu BA și BC, cu H și K intersecțiile lui O cu AC și cu P și Q proiecțiile lui O pe DE și AC. Avem pe figură $\alpha > A$

şi $O_2P = O_2A \sin(\alpha_2 - A) = O_2Q = OD \sin\frac{B}{2} = OA \sin\alpha_2 \sin\frac{B}{2}$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\sin A}{\cos A - \sin\frac{B}{2}} = \frac{BS}{AS - AX} \qquad (2)$$

S şi X având aceleaşi semnificaţii ca la 1°.

Valoarea lui α din (2) fiind evident diferită de acea dată de (1) rezultă că (2) dă o a doua soluţie simultană cu cea dela 1° şi diferită de ea.

Se vede din (2) că dacă $AS > AX$, ca în cazul figurei atunci $\alpha < \frac{\pi}{2}$, în caz contrar $\alpha > \frac{\pi}{2}$. In fine dacă

$$AS = AX \quad \text{sau} \quad \cos A = \sin\frac{B}{2}$$

atunci unghiul O_2AB este drept.

Când

$$\alpha = \pi - \frac{B}{2}$$

dreptele O_2A şi BB' sunt paralele, punctul O_2 este la infinit, iar corzile DE, FK sunt şi ele infinite. In acest caz între unghiurile A şi B există relaţia de condiţie

$$\sin^2\frac{B}{2} = \sin\left(A + \frac{B}{2}\right)$$

dedusă din (2) prin înlocuirea lui α cu $\pi - \frac{B}{2}$.

3°. O *pe prelungirea lui* B'B. In acest caz nu se poate avea soluţie căci cercul O se află în întregime în acea regiune a planului, determinată de dreptele BA şi BC, în care nu se află nici un punct al dreptei AC.

(Va urma) G-L GH. BUICLIU.

11. *Observaţie asupra problemei 3365.* La rezolvarea acestei probleme, dată în *Gazeta Matematică*, Vol. XLIV, p. 533, s'au pierdut unele soluţii.

In această problemă se cerea să se determine şirul de numere

$$u_0,\ u_1, \ldots,\ u_n, \ldots$$

astfel că

$$(1) \qquad u_n + u_{n-1} = (u_n - u_{n-1})^2, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Să observăm că (1) se poate scrie

$$(2) \qquad u_n^2 - (2u_{n-1} + 1)\, u_n + u_{n-1}\,(u_{n-1} - 1) = 0.$$

Dacă notăm cu $\sqrt{8u_0 + 1}$ una din rădăcinile patrate ale numărului $8u_0 + 1$ şi dacă determinăm un număr a astfel ca

$$u_{n-1} = \frac{2u_0 + a^2 + a\sqrt{8u_0 + 1}}{2}$$

din (2) deducem

$$u_n = \frac{2u_0 + (a+\varepsilon)^2 + (a+\varepsilon)\sqrt{8u_0 + 1}}{2},$$

unde $\varepsilon = \pm 1$,

De aici rezultă că pentru un u_0 dat soluţia generală a ecuaţiei (1) este

$$(3) \quad u_n = \frac{2u_0 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n)^2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n)\sqrt{8u_0 + 1}}{2}$$

$$n = 1,\ 2, \ldots$$

unde numerile

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots,\ \varepsilon_n, \ldots$$

sunt toate egale cu 1 sau -1.

In *G. M.* loc. cit. nu s'au dat în realitate decât soluţiile pentru

$$\varepsilon_n = (-1)^n \quad , \quad n = 1,\ 2, \ldots$$

şi pentru

$$\varepsilon_n = 1 \quad , \quad n = 1,\ 2, \ldots$$

Să mai observăm ca soluţia generală (3) se mai poate scrie şi sub forma

$$u_n = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n + k)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n + k + 1),$$

$$n = 1,\ 2, \ldots$$

unde

$$k = \frac{\sqrt{8u_0 + 1} - 1}{2}.$$

Cernăuţi, 1 Ian. 1940. TIBERIU POPOVICI.

12. *Relaţiuni între divizorii numerilor.* Fie $\nu(A)$ şi $\nu(B)$ numărul divizorilor numerilor A şi B, atunci avem:

$$\nu(A \,.\, B) \leqslant \nu(A) \,.\, \nu(B).$$

In adevăr, fie:

$$A = a^{\alpha} \,.\, b^{\beta} \ldots l^{\lambda}$$

$$B = a^{\alpha'} \,.\, b^{\beta'} \ldots l^{\lambda'} \,.\, a_1^{\alpha_1} \,.\, b_1^{\beta_1} \ldots l_1^{\lambda_1} \,.$$

Atunci ştim că:

$$\nu(A) = (\alpha + 1)(\beta + 1) \ldots (\lambda + 1)$$

$$\nu(B) = (\alpha' + 1)(\beta' + 1) \ldots (\lambda' + 1)(\alpha_1 + 1)(\beta_1 + 1) \ldots (\lambda_1 + 1)$$

$$\nu(A \,.\, B) = (\alpha + \alpha' + 1)(\beta + \beta' + 1) \ldots (\lambda + \lambda' + 1)$$

$$\times (\alpha_1 + 1)(\beta_1 + 1) \ldots (\lambda_1 + 1).$$

Va trebui deci să avem:

$$(\alpha + \alpha' + 1)(\beta + \beta' + 1) \ldots (\lambda + \lambda' + 1)$$

$$\leqslant (\alpha + 1)(\beta + 1) \ldots (\lambda + 1)(\alpha' + 1)(\beta' + 1) \ldots (\lambda' + 1).$$

Dar ştim că:

$$\alpha + \alpha' + 1 \leqslant (\alpha + 1)(\alpha' + 1)$$

$$\beta + \beta' + 1 \leqslant (\beta + 1)(\beta' + 1)$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\lambda + \lambda' + 1 \leqslant (\lambda + 1)(\lambda' + 1).$$

In general putem spune că:

$$\nu(A \,.\, B \ldots L) \leqslant \nu(A) \,.\, \nu(B) \ldots \nu(L).$$

CPT.-COMANDOR I. LINTEŞ.

13. *Notă asupra inversiunii.* Dacă trebue învederată o proprietate de poziţie într'o configuraţie (F) de drepte şi cercuri, este uneori util a se face o transformare prin inversiune şi a se da o demonstraţie pentru figura transformată (F'), mai simplă.

Dar propoziţia iniţială poate fi demonstrată şi direct. Uneori este mai greu de dat o soluţie imediată, dar în orice caz, ajungem la ea, transformând prin inversiune, punct cu punct, demonstraţia dată figurii transformate (F').

Este acesta un procedeu bine cunoscut pentru transformarea prin polare reciproce şi e valabil şi în inversiune.

Majoritatea demonstraţiilor în figurile (F') este legată de însuşirea patrulaterului inscriptibil: *două din vârfuri, se văd din celelalte două vârfuri, sub unghiuri egale (ori suplimentare).* Dacă ne alegem un punct arbitrar O şi transformăm figura într'o inversiune de pol O, ajungem să exprimăm rezultatul sub chiar forma precedentă, *fără modificare,* numai că prin unghiul sub care un segment MN se vede dintr'un punct Q să înţelegem unghiul cercurilor OQM, OQN. Notăm unghiul acestor cercuri, prin (OQM, OQN).

Această proprietate poate fi demonstrată şi direct. Fie patrulaterul inscriptibil ABCD şi O arbitrar. Să arătăm de ex. că (OAB, OAC) = (ODB, ODC). Fie β, γ, β', γ' centrele cercurilor OAB, OAC şi ODB, ODC. Avem relaţiile unghiulare

$$(AO, A\beta) = \text{compl.}\ \frac{1}{2}(\beta A, \beta O) = \text{compl.}\ (BA, BO)$$

$$(AO, A\gamma) = \text{compl.}\ (CA, CO);$$

deci unghiul cercurilor din A, adică

$$(A\beta, A\gamma) = (BA, BO) + (CA, CO)\ ^{1}).$$

Analog, unghiul cercurilor din D

$$(D\beta', D\gamma') = (BD, BO) + (CD, CO)$$

dar

$$(A\beta, A\gamma) - (D\beta', D\gamma') = [(BA, BO) - (BD, BO)] - [(CD, CO) - (CA, CO)]$$
$$= (BA, BD) - (CA, CD) \equiv 0.$$

c. t. a.

Cu ajutorul acestei leme, putem demonstra direct unele proprietăţi ale configuraţiilor (F), fără a recurge la transformare; de exemplu:

a) Propoziţia: două cercuri se taie în P, P'; două drepte paralele duse prin P, P' taie din nou cercurile în M, N; M', N'. Dreptele MM', NN' sunt paralele, devine în transformare: *două cercuri se taie în* P, P'; *fie încă* O, *un punct în plan; două cercuri tangente în* O *trec unul prin* P, *altul prin* P' *şi taie cercurile în* M, N, *respectiv* M', N'. *Cercurile* OMM', ONN' *sunt tangente.*

---

1) Notaţia (D_1, D_2) arată indiferent, unghiul ascuţit ori obtus al dreptelor, după cazul particular în care e construită figura.

Să facem o demonstraţie directă. Ducem şi cercul OPP'; patrulaterele MM'PP' şi NN'PP' fiind inscriptibile, aplicăm propoziţia precedentă:

$$(OMM', OM'N') = (OPP', OMN) = (ONN', OM'N')$$

$$\therefore \quad (OMM', ONN') = 0.$$

b) Propoziţia: două cercuri sunt tangente în T; două drepte duse prin T taie cercurile în A, B, respectiv A', B' astfel că AA', BB' sunt paralele, devine: *două cercuri sunt tangente în* T *şi fie* O, *arbitrar în plan; două cercuri duse prin* O *şi* T, *taie cercurile în* A, B *respectiv* A' *şi* B'; *cercurile* OAA', OBB' *sunt tangente.*

Fie şi cercul OTT' ce trece prin O şi tangent primelor două cercuri; T, T' confundate; considerăm patrulaterele inscriptibile AA'TT' şi BB'TT' şi scriem:

$$(OAA', OAT) = (OA'T, OTT') = (OBB', OAT)$$

$$\therefore \quad (OAA', OBB') = 0.$$

c) *Fie* A, B, C, M *patru puncte conciclice:* O *un punct oarecare şi* P *arbitrar pe cercul* AMO; *cercurile* MPβ *şi* MPC *taie cercul* OBC *în* β *şi* γ; *perechile de cercuri* OPβ, OAC *şi* OPγ, OAB *sunt respectiv tangente* [Problema 4774, G. M.].

Din patrulaterele inscriptibile ABCM şi PBβM, avem:

$$(OAM, OAC) = (OMB, OBC) = (OAM, OP\beta)$$

$$\therefore \quad (OAC, OP\beta) = 0, \text{ etc.}$$

N. N. MIHĂILEANU.

14. *Soluţia geometrică a exerciţiului 84, Vol. XXXII.* La pag. 317, Vol. XXXII din *Gazeta Matematică* s'a dat o soluţie analitică exerciţiului 84 cu următorul enunţ:

Se dă un cerc O_1 *un punct* P *fix şi unul* M *mobil în planul cercului. Se cere locul lui* M *aşa încât distanţa* MO *să fie egală cu distanţa de la* P *la polara* Δ *a lui* M *faţă de* O.

Voi da o soluţie geometrică acestei probleme. Fie R raza cercului O, Q şi N proecţiile lui P şi M pe Δ, S mijlocul lui OP şi T una din intersecţiile lui O cu Δ.

OM, PQ fiind egale și paralele, figura OM PQ este un paralelogram și MQ trece prin punctul fix S.

Din triunghiul QOM se scoate

$$\overline{QM}^2 = 2\left(\overline{OQ}^2 + \overline{OM}^2\right) - 4\overline{OS}^2. \qquad (1)$$

Insă

$$\overline{OM}^2 = \overline{OT}^2 + \overline{MT}^2 = R^2 + \overline{MT}^2$$

$$\overline{OQ}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{NQ}^2 = R^2 + \overline{QM}^2 - \overline{TM}^2$$

care duse în (1) dau

$$\overline{QM}^2 = 4R^2 + 2\overline{QM}^2 - 4\overline{OS}^2$$

$$\overline{SM}^2 = \overline{OS}^2 - R^2 = \text{const.} = k^2$$

ceea ce arată că M descrie un cerc C cu centrul în S și cu raza k.

Punctele Q și N descriu același cerc C.

M. D. POPA.

15. *Asupra problemei 5251* (G. M. XLV, 498).

Fie D un punct pe latura BC a triunghiului ABC. Notăm $AD = l$ și $\sphericalangle BAD = \alpha$ și avem

$$\text{aria } ABC = \text{aria } ABD + \text{aria } DAC$$

$$\therefore \quad bc \sin A = cl \sin\alpha + bl \sin(A - \alpha)$$

sau relația

$$\frac{\sin A}{l} = \frac{\sin\alpha}{b} + \frac{\sin(A-\alpha)}{c}.$$

Dacă AD este bisectoarea interioară i ori exterioară j, se obține imediat

$$\frac{2\cos\frac{1}{2}A}{i} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \; ; \quad \frac{2\sin\frac{1}{2}A}{j} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

care în cazul $A = 120^0$ se reduc la

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \; ; \quad \frac{\sqrt{3}}{j} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

prima relație este a problemei 5251.

IONEL I. STAMATE.

BIBLIOGRAFIE

Pozitiva. Revistă de matematici. Anul I. Nr. 1. 10 Octomvrie 1940. Bucureşti. Despre şirurile monotone de TIBERIU POPOVICIU, Funcţiuni poligonale de V. ALACI, Asupra funcţiunilor poligonale de ST. CETĂŢEANU, Funcţiuni poligonale de HAR. IONESCU-BISS, Curbe asociate unei curbe strâmbe de C. IONESCU-BUJOR, Curbele raţionale ŢIŢEICA de ALEX. NICULESCU, Asupra tangentelor, — normale ale cubicelor de R. P. VOINEA, Probleme propuse. Abonamentul anual 100 lei, pe adresa: O. ENULESCU, Cassa de Depuneri, Bucureşti.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XX. Nr. 8. Octomvrie 1940. Teoreme în legătură cu curbele rezultante de MIHAIL BOTEZ, Asupra unui triunghiu de SLT. M. GRUMĂZESCU. Probleme rezolvate. Probleme propuse. Abonamentul anual 100 lei pe adresa: ING. ŞT. NADAŞAN, Politechnica Timişoara.

Suplimentul cu exerciţii al Gazetei Matematice. Anul VII. Nr. 1. 1 Octomvrie 1940. Cercurile lui LEMOINE de C. IONESCU-BUJOR. Exerciţii rezolvate. Exerciţii propuse. Abonamentul anual 50 lei.

Idem. Anul VII. Nr. 2. 1 Noemvrie 1940. Congruenţe de HAR. P. IONESCU. Exerciţii rezolvate. Exerciţii propuse.

ING. D. A. STAN. *Cartea unui strălucit profesor.* (Extras din Bul. Soc. Politechnice. Bucureşti 1940).

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 62. Prin această *«Cerere»* se cerea date asupra cunoştinţelor de matematici aplicate ale lui COSTACHI CONACHI.

Intr'un Articol al lui C. NEGRI din *România Literară* din Fevruarie 1855, No. 6, pag. 73, găsim:

«El a fost din rândurile acelor Moldoveni ce-şi făceau învăţăturile în limba elină pe când Domnul ALEXANDRU MORUZI *introdusese pe bun temeiu, acele învăţături în Moldova, şi răsplătea înaintarea în ştiinţă ce dobândea tinerii în şcoala domnească;* sub a sa Domnie a fost înflorită.

Intr'ânsa Logofătul KONACHI *a învăţat limba elină şi a ei literatură, precum şi matematicile, şi mai cu seamă geometria, prin a căreia cunoştinţă practică ajunsese, chiar pe vremea aceia, a fi pretutindeni privit ca unul din cei mai buni ingineri.*

KONACHI *a fost un inginer hotarnic reputat pentru vremea lui şi de aci svonul că era versat în matematicile aplicate».*

I. IONESCU.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

ÉMILE VIGARIÉ. Premier inventaire de la Géométrie du triangle. Paris 1887. Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

RODOLPHO GUIMARÂES. Un manuscris intéressant. Lisabona 1905. Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3160. *Pe o stradă îngustă, este instalată o linie dublă, pe care circulă tramvaiele în cele două sensuri. Pe o linie, un tramvai merge cu 12 km/oră; din partea opusă, vine un altul cu 18 km/oră, iar în urma acestuia, un automobil cu 38 km/oră. La un moment dat, conducătorul automobilului se decide să o ia înaintea tramvaiului, în urma căruia se găsia, ca să se strecoare printre cele două tramvaie. In acest moment, distanța liberă între cele două tramvaie era de 90 m., iar între automobil și cel de al doilea tramvai, 40 m. Știind că lungimea tramvaiului este de 9 m., a automobilului 6 m. și că distanța liberă între tramvaie, când ele se încrucișează, este de 50 cm., iar lățimea celor 3 vehicule 2 m., se cere:*

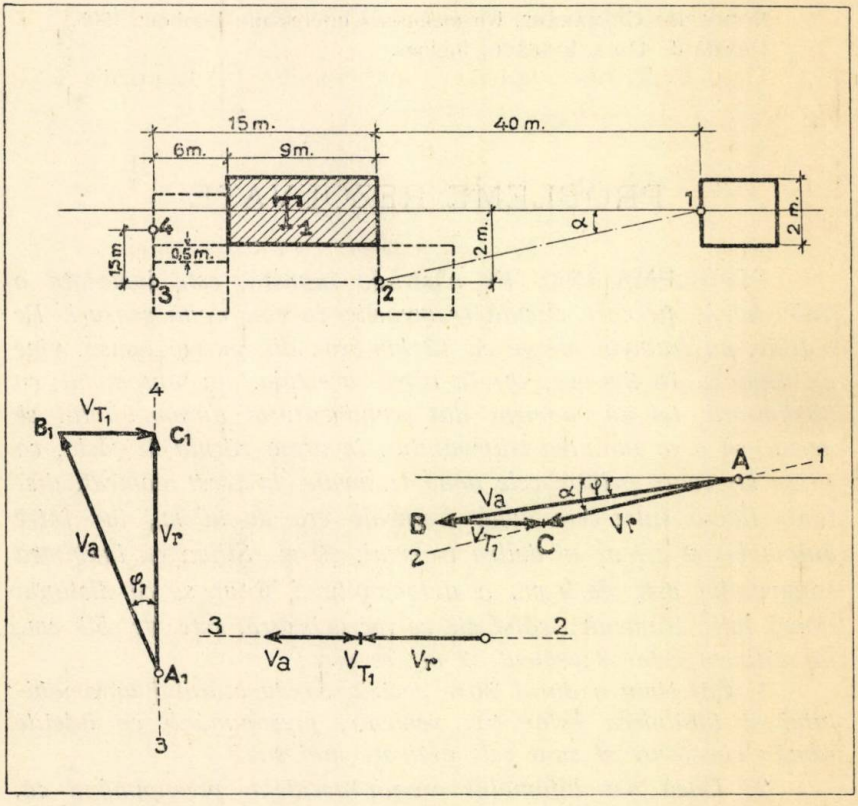
1. *Cât timp a durat între decizia conducătorului automobilului și întâlnirea celor trei vehicule, presupunând că iuțelile rămân constante și sunt cele indicate mai sus?*

2. *Dacă s'a întâmplat vre-un accident, presupunând că, conducătorul automobilului a condus cu cea mai mare abilitate?*

GH. EM. FILIPESCU.

Vom studia în primul rând mișcarea automobilului în raport cu tramvaiul T_1 situat în fața sa. Pentru simplificare, vom considera acest tramvai în stare de repaos luând în schimb în calcul în locul iuțelii absolute a automobilului $v_a = 38$ km/oră, *iuțeala sa relativă* în raport cu tramvaiul.

Poziţiile succesive pe care le ocupă automobilul în *mişcarea sa relativă* cea mai favorabilă sunt notate pe figură cu numerile 1 — 4, poziţia 1 corespunzând momentului $t = 0$ când conducătorul său ia decizia de întrecere în poziţia 5 când automobilul întrecând tramvaiul T_1 se află în siguranţă.



Iuţeala relativă pe porţiunea 1 — 2 o determinăm ţinând seama de relaţia vectorială

$$\vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_{T_1}$$

şi observând că v_r are direcţia 1 — 2. Putem astfel construi triunghiul ABC de unde:

$$v_a^2 = v_{T_1}^2 + v_r^2 + 2 v_r v_{T_1} \cos\alpha \qquad (1)$$

Dar:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{40} = 0{,}05 \quad \alpha = 2^{0}51' \quad \cos\alpha \cong 1$$

$v_a = 38$ km/oră $= 10{,}555$ m/sec $\quad v_{T_1} = 18$ km/oră $= 5$ m/sec.

Rezultă din (1):

$$v_r \cong 5{,}555 \text{ m/sec.}$$

Timpul t_{1-2} necesar trecerii automobilului dela poziţia 1 la poziţia 2 este prin urmare:

$$t_{1-2} = \frac{\sqrt{40^2 + 2^2}}{5{,}555} = 7^s{,}21.$$

Iuţeala relativă pe porţiunea 2 — 3 se obţine imediat:

$$v_r = v_a - v_{T_1} = 5{,}555 \text{ m/sec.}$$

Timpul t_{2-3} necesar trecerii automobilului dela poziţia 2 la poziţia 3 este prin urmare:

$$t_{2-3} = \frac{15}{5{,}555} = 2^s{,}70.$$

In mod analog putem determina iuţeala relativă pe porţiunea 3 — 4 prin construcţia triunghiului $A_1 B_1 C_1$. Obţinem astfel:

$$v_r = \sqrt{v_a^2 - v_{T_1}^2} = \sqrt{10{,}555^2 - 5^2} = 9{,}296 \text{ m/sec.}$$

Timpul t_{3-4} necesar trecerii automobilului dela poziţia 3 la poziţia 4 este prin urmare:

$$t_{3-4} = \frac{1{,}5}{9{,}296} = 0^s{,}16.$$

Timpul total dela 1 la 4 este:

$$t = t_{1-2} + t_{2-3} + t_{3-4} = 10^s{,}07.$$

In acest timp tramvaele s'au apropiat între ele cu distanţa:

$d = t(v_{T_1} + v_{T_2}) \qquad v_{T_2} = 12$ km/oră $= 3{,}333$ m/sec.

Deci:

$$d = 10{,}07 \times 8{,}333 = 83{,}91 \text{ m.}$$

Distanţa iniţială fiind de 90 m., va rămâne liber între tramvaie la timpul t:

$$90 - 83{,}91 = 6{,}09 \text{ m} > 6{,}00 \text{ m.},$$

adică aproape strict locul ocupat de automobil.

Rezultă deci că accidentul poate fi evitat printr'o conducere abilă a automobilului.

Este important de observat că în mişcarea sa absolută automobilul merge cu înclinarea $\varphi = 1^{0}21'$ faţă de axul şoselii pe porţiunea 1 — 2, paralel cu acest ax pe porţiunea 2 — 3 şi înclinat cu unghiul $\varphi_1 = 61^{0}43'$ pe porţiunea 3 — 4. Valorile unghiurilor φ şi φ_1 se obţin uşor prin consideraţiuni trigonometrice în triunghiurile ABC şi $A_1 B_1 C_1$:

$$\sin\varphi = \frac{v_{T_1}}{v_a}\sin\alpha = \frac{5}{10{,}555}\sin 2^{0}51' \quad ; \quad \cos\varphi_1 = \frac{v_{T_1}}{v_a} = \frac{5}{10{,}555}.$$

Intâlnirea dintre automobil şi tramvaiul opus are loc după circa $10^{s},07$, iar dintre tramvaie după $\frac{90}{8{,}333} = 10^{s},80$.

Problema în realitate este mult mai complexă, automobilul executând o mişcare plană complicată cu relaţii în jurul centrelor instantanee, rotaţii producătoare de derapări periculoase.

Dealtfel, cu tot rezultatul favorabil de mai sus mă simt obligat să mărturisesc că într'o astfel de împrejurare nu aş dori să fac parte dintre persoanele aflate în automobil, mulţumindu-mă în cazul cel mai rău cu un loc pe platforma dinapoi a unuia dintre tramvaie.

Drept încheere, să ne readucem aminte cu pietate de propunătorul acestei frumoase probleme PROF. GH. EM. FILIPESCU dispărut prea curând dintre noi.

S'a primit o soluţie parţială dela Domnul POPA D. MIRCEA clasa 8-a Liceul Militar Iaşi.

ALEXANDRU STOENESCU.

PROBLEMA 4948. *Pe axa* Ox *se iau punctele* A, A′ *şi pe axa* Oy *se iau punctele* B, B′. *Se notează cu* C *intersecţia dreptelor* A′B′, AB *şi cu* L, M, N *mijloacele diagonalelor* OC, AB′, A′B *ale patrulaterului complet* OACB′BA′. *Se ştie că punctele* L, M, N *sunt colineare. Presupunând punctele* A, A′, B *date, să se determine punctul* B′ *astfel ca* $\overline{LM} = \overline{MN}$. *Să se indice o construcţie geometrică simplă a punctului* B′.

D. V. IONESCU.

Soluţie. Din demonstraţia pe care o vom da mai departe teoremei că punctele L, M, N sunt colineare, va rezulta o relaţie simplă între raportul $\frac{\overline{LM}}{\overline{LN}}$ şi rapoartele $\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}$, $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$ care va rezolva problema de mai sus.

Să notăm

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u} \quad , \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$$

şi

$$\overrightarrow{OA'} = \lambda \overrightarrow{u} \quad , \quad \overrightarrow{OB'} = \mu \overrightarrow{v}.$$

Să determinăm punctul C, intersecţia dreptelor AB, A′B′. Vom avea:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{u} + k(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{u} + k'(\mu \overrightarrow{v} - \lambda \overrightarrow{u}),$$

unde constantele k şi k' sunt astfel alese ca să existe identitate între cei doi membri. Avem deci

$$k = k'\mu \quad , \quad 1 - k = \lambda(1 - k').$$

Rezolvind acest sistem de ecuaţii în k şi k' se obţine

$$k = \mu \frac{\lambda - 1}{\lambda - \mu} \quad , \quad k' = \frac{\lambda - 1}{\lambda - \mu}$$

şi deci

$$\overrightarrow{OC} = \mu \frac{\lambda - 1}{\lambda - \mu} \overrightarrow{v} + \lambda \frac{1 - \mu}{\lambda - \mu} \overrightarrow{u}$$

sau:

$$(1) \qquad \overrightarrow{OC} = \frac{\lambda(\overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}) - \mu(\overrightarrow{v} + \lambda \overrightarrow{u})}{\lambda - \mu}.$$

Pe de altă parte avem

$$\vec{OL} = \frac{\vec{OC}}{2} \quad , \quad \vec{OM} = \frac{\vec{u} + \mu\vec{v}}{2} \quad , \quad \vec{ON} = \frac{\vec{v} + \lambda\vec{u}}{2}$$

şi prin urmare, împărţind cu 2 ambii membri ai relaţiei (1), vom avea :

$$\vec{OL} = \frac{\lambda\vec{OM} - \mu\vec{ON}}{\lambda - \mu}.$$

Această relaţie arată că L *este baricentrul maselor* λ *şi* μ *plasate în punctele* M *şi* N. *Punctele* L, M, N *sunt deci colineare, şi în plus avem relaţia*

$$(3) \qquad \frac{\overline{LM}}{LN} = \frac{\mu}{\lambda}.$$

Relaţia (3) rezolvă problema dată; ea se mai scrie

$$(3') \qquad \frac{\overline{LM}}{\overline{LN}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} : \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}.$$

Formula aceasta ne arată că dacă vrem ca raportul $\frac{LM}{LN}$ să aibă o valoare dată şi dacă punctele A, A', B sunt date, punctul A' se determină cu uşurinţă, cu ajutorul construcţiei unui segment care să fie a patra proporţională a trei segmente date.

De exemplu dacă $\overline{LM} = \overline{MN}$, atunci urmează că raportul $\frac{\overline{LM}}{\overline{LN}}$ este $\frac{1}{2}$ şi va trebui să avem

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = 2\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}.$$

De aici urmează o construcţie simplă a punctului B'. Să ducem prin A' o paralelă la AB care taie pe OB în punctul P. Punctul B' este mijlocul lui OP. Intr'adevăr vom deduce că

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = 2\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = 2\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}}$$

adică

$$\overline{OP} = 2\overline{OB'}.$$

S'au primit foarte bune soluții dela D-nii: Profesor GH. BAZACOV, T.-Severin; ALEX. N. POPESCU-ZORICA, student la matematici, București; M. AL. VASILESCU-STABU, Alba Iulia; N. D. ȘTEFĂNESCU, Liceul militar, Mânăstirea Dealu; CONST. PASCARU și GH. CÂRDEIU, Lic. militar Iași; HORIA M. BODNĂRESCU, GH. M. DUMITRESCU, ADOLF ȘAICHIN, bacalaureați București; I. I. DIACONESCU, bacalaureat T. Severin; GH. N. B. IONESCU, bacalaureat, Ploești.

PROBLEMA 5096. *Să se studieze natura seriei cu termenul general*

$$u_n = \frac{n^n - (n-1)^{n-1}}{(n+1)^{n+1} - n^n}.$$

M. GHERMĂNESCU.

Pentru studiul convergenței vom determina numărul positiv α, astfel încât

$$\lim\ n^\alpha u_n = \text{const.} \neq 0.$$

Vom avea deci

$$\lim\ n^\alpha u_n = \lim\ n^\alpha . \frac{1 - \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}}{(n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1}$$

$$= \lim \frac{n^\alpha}{(n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1}$$

$$= \lim \frac{n^{\alpha-1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{n}} = \lim\ n^{\alpha-1},$$

de oarece

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\ ,\ \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\ .$$

Pentru ca să avem o limită finită și diferită de zero, trebue $\alpha = 1$, ceea ce arată că seria propusă este *divergentă*, fiind comparabilă cu seria armonică al cărei termen general este $u_n = \frac{1}{n}$.

Notă. 1. D-l A. ŞAICHIN a luat direct $\alpha = 1$, fără o explicaţie prealabilă, ajungând la aceeaşi concluzie ca mai sus.

Un alt corespondent a găsit că seria este convergentă!

2. Recomandăm corespondenţilor să aplice şi criteriul lui RAABE-DUHAMEL.

M. G.

PROBLEMA 5160. *Să se stabilească relaţia:*

$$\frac{1}{4Rr}\Sigma a^2(p-a) = \Sigma \frac{r_a r_b \sin C}{h_c}.$$

MARIN I. POPA.

Soluţie. Este suficient să arătăm că

$$\frac{1}{4Rr}a^2(p-a) = \frac{r_b r_c \sin A}{h_a},$$

care este adevărată ţinând seamă că

$$2R\sin A = a\ ,\ S = r_a(p-a) = \frac{ah_a}{2} = \sqrt{r r_a r_b r_c}.$$

Au rezolvat D-nii: M. A. VASILESCU-STABU, M. NICULESCU, LEONIDA DJEBCU, EMIL S. MODÂLCĂ, IULIAN PETRESCU, HORIA BODNĂRESCU, PETRE V. CAZANACLI, A. IANCULESCU, PAUL WALTER, CONST. I. MOCANU, TILICĂ C. ŞTEFAN, M. CHERŢMAN, BÂRLEA SUHĂŢEANU, MATEI CHINTESCU, ION STAMATE, DINU FULGEANU, D. MIRONESCU, GH. TOPALESCU, ŞTEFAN PAVLOVSCHI, IULIAN MOISII, MIRCEA VLĂDESCU, MIRCEA TOFAN, VASILE ROLLEA, PETRE ŢOCU, ALEXANDRU VIRGIL, M. PLETEA, C. ALEXANDRESCU, GH. DOVGAN, GH. SBÂRNEA, I. SCURTU, GH. CÂRDEIU, STELIAN IONESCU, EUGEN VIJELIE, N. MĂGEANU, HERMAN REISCHER, MARIN VĂDUVA, SLT. M. GRUMĂZESCU, MIREL STOENESCU, AD. DRAGOMIR, GH. PETRESCU, M. NEGREA, F. IORGULESCU, CĂLIN I. DUMITRIU, MIRCEA POPA, AL. ROHR, C. PASCARIU, M. TREFILOV, ALDEA MINEA şi PANTELIMON CONSTANTIN.

C. I. Ţ.

PROBLEMA 5163. *Să se demonstreze că nu există nici o funcţiune propriu zisă care să satisfacă ecuaţia funcţională*

$$f(x, y) = f^n(y, x),$$

unde n *este un număr raţional.*

M. GHERMĂNESCU.

Se înţelege că se face abstracţie de cazurile $n = \pm 1$, care ne dau funcţiunile simetrice, respectiv simetric strâmbe, bine cunoscute.

Fie $n = \frac{m}{p}$; putem scrie

$$f^p(x, y) = f^m(y, x),$$

din care deducem

$$f^p(y, x) = f^m(x, y);$$

ridicând această ecuaţie la puterea m^a şi ţinând seama de prima obţinem

$$f^{p^2}(x, y) = f^{m^2}(x, y)$$

sau

$$f^{p^2}(x, y)\left[1 - f^{m^2-p^2}(x, y)\right] = 0.$$

Cum $f(x, y)$ nu este identic nulă, o asemenea egalitate nu este posibilă decât dacă

$$m^2 - p^2 = 0,$$

adică $n = \pm 1$, cazuri lăsate la o parte, cazul când $f(x, y)$ se reduce la rădăcina de ordinul $m^2 - p^2$ a unităţii fiind de asemeni înlăturat.

Notă. D-l POPESCU SIMION a considerat cazul când $f(x, y)$ este un polinom.

M. G.

PROBLEMA 5185*). *Fie* M *şi* N *două puncte izotomice pe latura* BC *a triunghiului* ABC *şi* M′, N′ *punctele unde* AM, AN *taie cercul* ABC. *Să se demonstreze relaţia*

$$\frac{\overline{AB}^2 - 2\overline{MB} \cdot \overline{MC} + \overline{AC}^2}{\overline{MB}^2 \cdot \overline{MC}^2} = \frac{1}{\overline{MM'}^2} + \frac{1}{\overline{NN'}^2}.$$

N. D. ŞTEFĂNESCU.

---

*) Inlocueşte problema propusă cu acelaşi număr la pag. 54, Vol. XLV.

Soluție dată de D-nii: AL. G. JILETCOVICI, VIRG. C. ATANASIU, GH. GR. BOGDAN, P. V. CONSTANTIN, P. P. DRĂGHICESCU, Z. C. IVAN, ACHILE V. PETRESCU, A. N. POPA, GH. T. PUCHIU (Lic. militar, Iași); M. A. NEGREA (Brăila); J. SEGAL (Student, București), M. I. TREFILOV (Lic. „N. Bălcescu", Brăila; GH. D. SBÂRNEA (Bacalaureat, Tecuciu) și A. C. COSTINESCU (Lic. Internat Iași).

Aplicând teorema lui STEWART triunghiului ABC și dreptelor AM, AN găsim:

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{MC} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{BM} - \overline{AM}^2 \cdot \overline{BC} = \overline{BM} \cdot \overline{MC} \cdot \overline{BC} \qquad (1)$$

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{NC} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{BN} - \overline{AN}^2 \cdot \overline{BC} = \overline{BN} \cdot \overline{NC} \cdot \overline{BC}. \qquad (2)$$

Observăm că

$$\overline{BM} + \overline{BN} = \overline{CM} + \overline{CN} = \overline{BC}$$

așa că adunând (1) cu (2), găsim

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AM}^2 - \overline{AN}^2 = 2\overline{MB} \cdot \overline{MC}. \qquad (3)$$

Insă:

$$\overline{MA} \cdot \overline{MM'} = \overline{MB} \cdot \overline{MC} = \overline{NA} \cdot \overline{NN'} = \overline{NB} \cdot \overline{NC}$$

$$\therefore \quad \overline{MA} = \frac{\overline{MB} \cdot \overline{MC}}{\overline{MM'}} \quad \text{și} \quad \overline{NA} = \frac{\overline{NB} \cdot \overline{NC}}{\overline{NN'}}$$

care duse în (3) dau

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{MB}^2 \cdot \overline{MC}^2 \left[\frac{1}{\overline{MM'}^2} + \frac{1}{\overline{NN'}^2} \right] = 2\,\overline{MB} \cdot \overline{MC}$$

care este tocmai relația de demonstrat.

Soluții foarte bune, prin alte relațiuni metrice, s'au primit dela D-nii: H. M. BODNĂRESCU (Șc. Politechnică, București), MIREL D. STOENESCU (Șc. ofițeri de aviație, București), C. CRISTEA, T. MIROSLAV (fostul Lic. militar, Chișinău).

PROBLEMA 5202. *Dacă ecuațiunea* $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ *are toate rădăcinile cuprinse între zero și* $\frac{1}{2}$, *avem*

$$0 > p + q > -\frac{3}{4};$$

iar dacă toate rădăcinile sunt mai mari ca 2, avem

$$0 > \frac{p+q}{r} > -\frac{3}{4} .$$

LT. C. IONESCU-ŢIU.

Soluţie dată de D-l MIRCEA C. NICULESCU, clasa VIII-a Bucureşti.

Inlocuind pe p şi q în funcţie de rădăcini avem

$$p+q = \Sigma x_1 (x_2 - 1) < 0.$$

Inlocuim în ecuaţia dată pe x cu $y+\frac{1}{2}$ şi avem

$$x^3+\left(p+\frac{3}{2}\right)y^2+\left(p+q+\frac{3}{4}\right)y+\frac{1}{4}p+\frac{1}{2}q+r+\frac{1}{8}=0.$$

Rădăcinile fiind toate negative, avem

$$p+q+\frac{3}{4}>0.$$

Pentru partea a doua a enunţului înlocuim x cu $\frac{1}{t}$ şi avem

$$t^3+\frac{q}{r}t^2+\frac{p}{r}t+\frac{1}{r}=0, \text{ unde avem}$$

$$0 > \frac{q}{r}+\frac{p}{r} > -\frac{3}{4} .$$

Soluţii bune s'a mai primit dela D-nii: HORIA BODNĂRESCU, Bucureşti, D. BOIANGIU, T.-Severin, MIRCEA D. POPA, Iaşi.

C. I. Ţ.

PROBLEMA 5285. (Urmare dela pag. 107).

III. In *soluţia* sa, D-l MIRCEA D. POPA consideră ca definiţie a cardioidei, ceea ce am demonstrat mai sus, că punctul M al cardioidei situat pe OM este obţinut la intersecţia acestei drepte cu tangenta în M' la cercul OA, dusă perpendicular pe OM şi că se ştie că normala în M la cardioidă trece prin proiecţia I a lui O pe diametrul M'O'.

1°. Tangenta în M la cardioidă este perpendiculara în M pe MI. Punctul N este pe perpendiculara dusă pe mijlocul lui OM, căci ON = NM. Punctele P şi R, conform celor demonstrate mai sus, sunt la intersecţia lui ON cu tangentele în P' şi R' la cercul OA perpendiculare pe ON. Punând M'OA = α, avem

$$AOM' = BOM' = OM'B = MOM',$$

deci OM' este bisectoarea unghiului AOM. Deasemenea OP' este bisectoarea unghiului AON. Deci

$$OM = OM' \cos\alpha = OA \cos\alpha \cos\alpha = 4a \cos^2\alpha.$$

Notând $MOA = \theta = 2\alpha$, rezultă $r = OM = 4a \cos^2 \frac{\theta}{2}$ şi astfel se demonstrează că M descrie o cardioidă.

Observând că

$$NOM = OMN = IMN - IMO = 90^0 - \alpha,$$

rezultă că

$$NOA = NOM + MOA = 90^0 + \alpha$$

OP' fiind bisectoarea lui NOA, avem

$$AOP' = \frac{1}{2} AON = \frac{90^0+\alpha}{2}, \quad OP = 4a \cos^2 \frac{90^0+\alpha}{2}.$$

Observând că OR' este perpendiculară pe OP', căci tangentele PP' şi RR' sunt paralele, rezultă

$$AOR' = 90^0 - \frac{90^0+\alpha}{2} = \frac{90^0-\alpha}{2},$$

$$OR = 4a \cos^2 \frac{90^0-\alpha}{2} = 4a \sin^2 \frac{90^0+\alpha}{2},$$

$$\frac{1}{OP} + \frac{1}{OR} = \frac{1}{4a}\left(\frac{1}{\cos^2 \frac{90^0+\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{90^0+\alpha}{2}}\right) = \frac{1}{a \sin^2 (90^0+\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{a \cos^2\alpha} = \frac{4}{OM},$$

şi relaţia este stabilită.

2^0. Se observă că perpendiculara din N pe OM face cu ON unghiul α. Deci $OM = 2ON \sin\alpha$, $ON = \frac{2a\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$. Luând ca axe de coordonate OA şi tangenta în O, atunci N are coordonatele

$$x = ON \cos AON = ON \cos(90^0 + \alpha) = -2a\cos^2\alpha,$$

$$y = ON \cos\alpha = \frac{2a\cos^3\alpha}{\sin\alpha}.$$

Se observă că $y = -x\,\mathrm{cotg}\alpha$, şi eliminând pe α, urmează că N descrie cisoida $x(x^2+y^2)+2ay^2 = 0$.

IV. *Soluţie* dată de D-l DUMITRU RIPIANU. Cardioida este un exemplu simplu de epicicloidă, ale cărei ecuaţii parametrice se obţin uşor. Insemnând $AOD = t$, unghiul $BCD = 2t$, deci C_1M face cu $OA\,(Ox)$ unghiul $2t$. Avem

$$\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CC_1} + \vec{C_1M}\ ,\quad OC = a,\ CC_1 = 2a,\ C_1M = a,$$

şi aşa se operează chiar când EC_1 şi C_1M au alte lungimi decât a şi C_1M nu este paralelă cu CD. Proiectând pe Ox şi Oy, avem ecuaţiile parametrice ale cardioidei

(1) $x = a + 2a\cos t + a\cos 2t = 2a\cos t(1+\cos t)$,

$$y = 2a\sin t(1+\cos t)\ ,\quad y = x\,\mathrm{tg}t.$$

Tangenta în $M(x, y)$ are ecuaţia

(2) $$y = (1+\cos t\,\frac{(1-2\cos t)\,x + a(1+\cos t)}{\sin t(1+2\cos t)}.$$

Punctul N este pe tangenta în M şi perpendiculară pe mijlocul dreptei OM,

(3) $$x\cos t + y\sin t = a(1+\cos t).$$

Coordonatele punctului N se obţin rezolvând ecuaţiile (2) şi (3) şi sunt

(4) $$x = -a(1+\cos t)\ ,\quad y = a\frac{(1+\cos t)^2}{\sin t},$$

iar ecuaţia dreptei ON este

$$y = -\frac{1+\cos t}{\sin t}x,$$

(5) $$y = -x\,\mathrm{cotg}\frac{t}{2}.$$

Eliminând pe t din ecuațiile (4), obținem

$$x(x^2+y^2)(x^2+y^2)+2ay^2(x^2+y^2)=0,$$

deci curba descrisă de N este cisoida $x(x^2+y^2)+2ay^2=0$.

Ecuația cardioidei se obține eliminând pe t din ecuațiile (1) și este

$$(6)\qquad (x^2+y^2)^2-4ax(x^2+y^2)-4a^2y^2=0.$$

Dreapta ON taie cardioida în punctele P și R, ale căror coordonate sunt date de (5) și (6). Inlocuind în (6) pe y din (5), și suprimând $x^2=0$ care corespund punctului dublu O, avem ecuația

$$x^2-4ax\sin^2\frac{t}{2}-4a^2\sin^2\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}=0,$$

ale cărei rădăcini sunt abscisele punctelor P și R,

$$x_P=2a\sin\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}-1\right)\quad,\quad x_R=2a\sin\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}+1\right).$$

Din (5) avem

$$y_P=-2a\cos\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}-1\right)\quad,\quad y_R=-2a\cos\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}+1\right).$$

Deci

$$\overline{OP}^2=x_P^2+y_P^2=4a^2\left(1-\sin\frac{t}{2}\right)^2\quad,\quad OP=2a\left(1-\sin\frac{t}{2}\right)$$

$$OQ=2a\left(1+\sin\frac{t}{2}\right),$$

iar din (1) avem $OM=2a(1+\cos t)$. De unde

$$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{1-\sin\frac{t}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{t}{2}}\right)=\frac{1}{a\cos^2\frac{t}{2}}$$

$$=\frac{2}{a(1+\cos t)}=\frac{4}{OM},$$

care este relația cerută.

PROBLEMA 5317. *Laturile unui patrulater plan sunt de 101,40 m, 120,08 m, 156,31 m, 326,25 m. Calculându-se aria lui s'a găsit 18936,21 m². S'a calculat bine aria?*

I. IONESCU.

Aria unui patrulater ABCD în funcție de laturile sale a, b, c, d și unghiurile sale A, B, C, D este dată de formula:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\,\sin\varphi$$

în care p este semiperimetrul patrulaterului, iar φ unghiul dat de relația:

$$\cos^2\varphi = \frac{abcd\cos\frac{1}{2}(B+D)}{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}.$$

Să calculăm valoarea radicalului:

$$S' = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Avem:

$$p = \tfrac{1}{2}(101{,}40 + 120{,}08 + 156{,}31 + 326{,}21) = 704{,}04/2 = 352{,}02,$$

$$(p-a) = 352{,}02 - 101{,}40 = 250{,}62,$$
$$(p-b) = 352{,}02 - 120{,}08 = 231{,}94,$$
$$(p-c) = 352{,}02 - 156{,}31 = 195{,}71,$$
$$(p-d) = 352{,}02 - 326{,}25 = 25{,}77.$$

Pentru calcularea lui S' aplicăm logaritmii:

$$\log\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$
$$= \tfrac{1}{2}[\log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c) + \log(p-d)].$$

$$\begin{array}{l|l} \log 250{,}62 = 2{,}39901 & \\ \log 231{,}94 = 2{,}36538 & \\ \log 195{,}71 = 2{,}29161 & \\ \log 25{,}77 \;\; = 1{,}4111 & \\ \hline \qquad\qquad\quad 8{,}46711 & \end{array}$$

$$\log S' = 8{,}46711/2 = 4{,}233555.$$

$$S' = 17122 \text{ m}^2.$$

Ca să obţinem valoarea suprafeţei patrulaterului trebue să înmulţim pe S' cu $\sin\varphi$. Dar acesta fiind subunitar, suprafaţa va fi mai mică decât 17122 m², sau cel mult egală dacă $\varphi = 90^0$. In nici un caz însă suprafaţa nu poate fi mai mare. Deci valoarea dată 18936,21 m² este greşit calculată.

FILA GH. EUGEN.
(Student în Matematici. Cluj).

D-l MIRCEA L. RUSU găseşte că problema nu are destule date ca să i se poată calcula aria. Problema se poate pune pentru patrulaterul inscriptibil, calculează aria în această ipoteză şi găseşte bine aria S' = 17122 m². Conchide că patrulaterul nu este inscriptibil. Enunţul nu e greşit, căci nu am cerut să se recalculeze aria patrulaterului ci numai să se spună dacă calculul e bine făcut. Aci a fost posibil să se spună că nu a fost bine calculat căci i s'a atribuit patrulaterului o arie mai mare ca a patrulaterului inscriptibil care se ştie că este cel mai mare care se poate obţine cu patru laturi date.

A se vedea, în legătură cu această problemă, Articolul: *„Planimetrie fără geometrie... şi fără aritmetică în Sec. XX după Cr."* din *Gazeta Matematică*, Anul XXIII, pag. 83.

I. I.

PROBLEMA 5362. *Diferenţa a două numere este 24. Dacă se adună cel mai mare comun divizor al lor cu cel mai mic comun multiplu al lor, se găseşte suma 312. Se cere acele numere.*

I. IONESCU.

Soluţie verbală. Diferenţa a două numere se divide prin codivizorul lor maxim. Aceasta divide pe comultiplul lor, căci divide pe fiecare din numere. Deci codivizorul maxim al numerelor date 24 şi 312 este codivizorul maxim al numerelor căutate. Insă 24 divide pe 312 căci au factorii comuni 3 şi 8. Deci, dacă împărţim numerele căutate cu 24 înlocuim problema cu următoarea:

Se cer două numere coprime al căror comultiplul minim mărit cu 1 este

$$312 : 24 = 13.$$

Comultiplul minim este deci 12. Insă comultiplul minim a două numere coprime este produsul lor; deci acestea ar putea fi 1 şi 12 sau 3 şi 4, care înmulţite cu 24 ar da numerele căutate. In primul caz am avea 24 şi $12 \times 12 = 144$, care nu sunt admisibile căci nu au diferenţa dată 24 şi $3 \times 24 = 72$ cu $4 \times 24 = 96$ care au diferenţa 24 dată.

I. I.

Soluţie dată de D-nii: ALDEA V. MINEA (Liceul Haşdeu din Buzău), IOAN A. BADEA (Clasa VIII-a, Liceul A. Şaguna, Braşov), C. D. EFTIMIE (Elev-inginer, Bucureşti).

Fie a şi b numerele căutate, D codivizorul maxim, m comultiplul minim. Avem:

$$a = D\alpha \ , \ b = D\beta \quad D(\alpha - \beta) = 24 \ , \ D + m = 312.$$

Dar:

$$Dm = ab = D^2\alpha\beta \quad \therefore \quad m = D\alpha\beta.$$

$$\therefore \ D + m = D + D\alpha\beta = D(1 + \alpha\beta) = 312.$$

$$\therefore \quad 312/24 = 13 = (1 + \alpha\beta)/(\alpha - \beta)$$

$$\therefore \quad 170/(13 - \beta) = 13 + \alpha.$$

De aci rezultă că $(13 - \beta)$ este un divizor al lui 170, cel mult egal cu 13 şi anume unul din numerele 1, 2, 5, 10 la care corespund $\beta = 12, 11, 8, 3$ şi apoi $\alpha = 157, 72, 19, 4$, şi deci $(\alpha - \beta) = 145, 61, 11, 1$. Egalitatea $D(\alpha - \beta) = 24$ nu poate fi satisfăcută de primele două valori care întrec pe 24; nici de a treia căci 24 nu se divide cu 11. Rămâne numai $(\alpha - \beta) = 1$ care corespunde lui $\alpha = 4$, $\beta = 3$. Acestea înmulţite cu 24 ne dau numerele căutate 96 şi 72.

EXERCIŢII

6. Să se rezolve triunghiul căruia îi cunoaştem laturile b şi c; iar bisectoarea din A, înălţimea din B şi mediana din C sunt concurente.

P, P. DRĂGHICESCU.

R. Fie A', B', C' respectiv picioarele cevienelor, avem:

$$\frac{AB' \cdot CA' \cdot BC'}{B'C \cdot A'B \cdot C'A} = -1 \ ; \text{ însă } \frac{A'C}{A'B} = \frac{b}{c} \ ; \ \frac{BC'}{C'A} = -1 \ ; \ \frac{B'A}{B'C} = \frac{c \cos A}{a \cos C} \ .$$

Relaţia de mai sus devine :

$$b\cos A = a\cos C$$

sau

$$b\cos A = b - c\cos A \quad ; \quad \cos A\,(b + c) = b$$

de unde

$$\cos A = \frac{b}{b + c}\,.$$

Cunoscând două laturi şi unghiul coprins între ele, se rezolvă uşor, cazul fiind cunoscut.

PROBLEME PROPUSE

4280 [1]). După laturile BC, CA, AB ale unui triunghiu ABC lucrează respectiv, în sensul indicat de ordinea literelor forţele :

$$F_a = k(h_b - h_c) \quad ; \quad F_b = k(h_c - h_a) \quad , \quad F_c = k(h_c - h_b)$$

în care h_a, h_b, h_c sunt înălţimile triunghiului, iar k un coeficient de proporţionalitate.

Să se arate că rezultanta sistemului trece prin punctele de intersecţie al bisectoarelor şi al medianelor.

Să se calculeze mărimea acestei rezultante.

ALEXANDRU STOENESCU.

2717 [2]). Fie M un punct în planul triunghiului ABC de ortocentru H. O rotaţie de unghiul 2B, centru B, aduce pe M în M_1. O a doua rotaţie de unghiul 2A, centru A, aduce pe M_1 în M_2.

1. O a treia rotaţie de unghiul 2C, centru C, aduce pe M_2 peste M.

2. Dacă M se află pe cercul BHC, punctele M, M_1, M_2 sunt colineare pe o dreaptă ce trece prin H.

N. N. MIHĂILEANU.

4368 [3]). Să se verifice că

$$(\sin^2 a + \sin^2 b)(\cos^2 a + \cos^2 b) = 1 - \cos^2(a + b)\cos^2(a - b).$$

N. N. MIHĂILEANU.

1) Această problemă înlocueşte problema cu acelaşi număr din Volumul XXXVIII, pag. 440.

2) Problema cu acest număr fiind eronată, se înlocueşte cu prezenta.

3) Problema cu acelaşi număr se înlocueşte cu prezenta.

4396 [4]). Fie U un punct arbitrar pe mediana din A a triunghiului ABC. UB, UC retaie cercul circumscris în β şi γ. Cβ şi Bβ se întâlnesc în A'. UA şi UA' sunt egal înclinate pe laturile unghiului BUC.

N. N. MIHĂILEANU.

4516 [5]). Isogonalul simetricului ortocentrului unui triunghiu în raport cu centrul iperbolei JERABECK se află pe dreapta lui EULER a triunghiului.

Proprietatea analoagă, când se înlocueşte ortocentrul cu punctul lui LEMOINE.

N. N. MIHĂILEANU.

4452 [6]). Să se demonstreze că între elementele unui triunghiu oarecare avem relaţia:

$$(b+c)(R-r_a)+(c+a)(R-r_b)+(a+b)(R-r_c)=4S.$$

V. THÉBAULT.

5392. In oraşul Bucureşti, pentru a chema pe un abonat la o convorbire telefonică, trebue format un număr de cinci cifre. Admiţând că un abonat neatent greşeşte o cifră, cerând una alăturată, în câte moduri un abonat chemat la telefon poate fi plictisit de cei ce nu dau toată atenţia la chemare? Se va presupune succesiv că se face 1, 2, 3, 4 sau 5 greşeli. (Primele două cazuri mi s'au întâmplat şi sunt deci reale; celelalte pot fi numai teoretice!).

I. IONESCU.

5393. Să se arate că dacă N este un număr întreg, terminat cu o cifră semnificativă, atunci numărul

$$A = N^3 + 2N^2 - N + 1$$

nu poate fi patrat perfect.

GH. D. SIMIONESCU.

---

4) Problema cu acest număr fiind eronată, se înlocueşte cu prezenta.

5) Idem.

6) Această problemă înlocueşte enunţul eronat al problemei publicată la pag. 190, Vol. XL.

5394. Să se arate că suma primelor n numere poligonale de m laturi, din prima speță, nu poate să fie niciodată egală cu suma primelor n numere poligonale, de m laturi, din a doua speță.

CPT. C-DOR I. LINTEȘ.

5395. Fie $P(x) \equiv ax^2 + bx + c$. Să se studieze natura rădăcinilor ecuației $P(x) = 0$, știind că:

$$P(1) = a_1 \quad , \quad P(2) = a_2 \quad ; \quad P(3) = a_3 ,$$

a_1, a_2, a_3 fiind trei numere în progresie geometrică.

EMILIAN MEREUȚĂ.

5396. Dacă:

$$A = 2n \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{3} \sin\frac{\pi}{n}\right) \quad ; \quad B = 2n \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\operatorname{cotg}\frac{2\pi}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Să se arate că:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} A = \lim\limits_{n\to\infty} B = \alpha.$

2. Să se determine valoarea lui α în grade, minute, secunde.

3. Să se arate că α, este unghiul sectorului circular de rază r, care prin înfășurarea lui se obține conul de volum maxim.

C. MIHU.

5397. Fie șirul:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

unde

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \quad a_{m+1} = 2a_m + (-1)^m$$

și șirul

$$u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$$

unde

$$u_m = \frac{a_m}{2^m} .$$

Să se arate că dacă extindem șirurile dând valori negative indicilor obținem relațiile:

$$a_{-2m} = -u_{2m} \quad ; \quad a_{-2m-1} = u_{2m+1}$$

și

$$-a_{2m} = u_{-2m} \quad ; \quad a_{2m+1} = u_{-2m-1} ,$$

unde am notat cu m un număr întreg pozitiv.

LT. C. IONESCU-ȚIU.

5398. Fie M_1, M_2, M_3 trei puncte pe un segement AB. Să se construiască pe acelaşi segment un punct M astfel ca:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{M_1A}}{\overline{M_1B}} \cdot \frac{\overline{M_2A}}{\overline{M_2B}} \cdot \frac{\overline{M_3A}}{\overline{M_3B}}.$$

IULIAN PETRESCU.

5399. Fie ABCD un patrat şi M un punct pe cercul circumscris lui. Prin M se duc paralele la laturile patratului, pe care le întâlnesc în A', B', C', D'. Dreptele A'D' şi D'C' fac între ele un unghiu de 45°. Fie L, N intersecţiile (A'D', B'C') şi (A'B', D'C'). Să se arate că $\overline{LN}$ este egal cu raza cercului ABCD.

OTILIA GEORGESCU ROEGEN.

5400. Fie M şi N două puncte fixe pe o parabolă şi Δ o dreaptă fixă paralelă cu axa; Q fiind un punct mobil pe Δ, NQ retaie parabola în P. Paralela din Q la MP trece printr'un punct fix.

N. N. MIHĂILEANU.

5401. Se consideră cisoida dreaptă şi fie (C) simetricul cercului fundamental faţă de punctul dublu O. Se ia M arbitrar pe cercul (C); fie N proiecţia lui M pe diametrul ce trece prin O; cercul de centru N şi rază dublă lui (C) taie tangenta în O la (C) în P, Q. Paralelele din M la NP, NQ taie *cisoida* în P_1, P_2, P_3, respectiv Q_1, Q_2, Q_3.

Să se arate că:

$$\overline{MP_1} \cdot \overline{MP_2} \cdot \overline{MP_3} = \overline{MQ_1} \cdot \overline{MQ_2} \cdot \overline{MQ_3} = \text{const.},$$

când M descrie cercul (C).

HORIA M. BODNĂRESCU.

5402. Dacă A_0, B_0, C_0 şi A_1, B_1, C_1 sunt triunghiurile formate de centrele patratelor interioare şi exterioare construite pe laturile unui triunghiu ABC, R_0 şi R_1 razele cercurilor circumscrise, ω, ω_0 şi ω_1 unghiurile lui BROCARD corespunzătoare celor trei triunghiuri, să se verifice relaţiile:

$$R_1^2(\operatorname{cotg}\omega + 2)^2 - R_0^2(\operatorname{cotg}\omega - 2)^2 = 80\, S.(\operatorname{cotg}^2\omega + 1)$$

$$\frac{1}{2 + \operatorname{cotg}\omega_0} + \frac{1}{2 - \operatorname{cotg}\omega_1} = 4.$$

ION VASILIU.

5403. Ce curbă descrie afixul unei cantităţi complexe variabile, ştiind că dreapta, ce uneşte acest afix cu afixul unei cantităţi complexe date, trece prin afixul câtului lor?

2°. Aceeaşi problemă pentru afixul produsului.

3°. Să se explice rezultatul.

CĂP. MIHAIL S. FOCŞENEANU.

5404. Se cer curbele (Γ) a căror podară în raport cu originea axelor este dreapta (D) de ecuaţie: $y = \lambda$.

Să se arate că dacă $\lambda = 1$, curba (Γ_1) care are aceeaşi subnormală cu (Γ) este o cuartică, ce admite ca nod originea axelor de coordonate.

MIHAIL ST. BOTEZ.

5405. Fie un punct M_0 fix pe curba C şi G centrul de greutate al arcului MM_0 cuprins între M_0 şi un punct mobil M al curbei. Fie M' un punct vecin de M şi G' centrul de greutate al arcului M_0M'.

1°. Segmentul GG' şi distanţa δ a lui M de GG' sunt infiniţi mici de acelaşi ordin cu $\overline{MM'}$.

2°. Să se găsească partea principală a lui δ în raport cu $\overline{MM'}$ şi să se dea interpretarea ei geometrică.

T. POPOVICIU.

5406. Un vehicul de greutate G în mişcare rectilinie uniformă frânează. Din această cauză, un corp situat în vehicul alunecă cu frecare în lungul vehiculului. Un observator din vehicul constată că susnumitul corp a parcurs o distanţă d_0 până la oprirea vehiculului şi o distanţă d_1 după această oprire. Coeficientul de frecare se va lua f, iar frânarea se va presupune că acţionează ca o forţă constantă contrară sensului mişcării. Se cere iuţeala iniţială a vehiculului, distanţa pe care s'a efectuat frânarea, timpul necesar frânării şi forţa de frânare.

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ. La problema 5380 rândul al 3-lea se va înlocui cu următorul: « regulat cu acelaşi număr n de laturi de lungime l, *se obţine* luând l' ».

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam M. (2461); *Andonie Şt. Iancu* (5361, 64, 73, 78); *Bakonyi C. C.* (5378, 90); *Bodnărescu Horia* (5319); *Boldescu Petre* (P); *Cocea Gh. Theodor* (P); *Constantin P.* (5321, 29, 90); *Coşereanu Ion* (P); *Costinescu C. Al.* (5185, 265); *Cruceru Gh. C.* (5369); *Drăghicescu P. Paul* (4986, 5234, 51, 54, 55, 64, 361); *Eftimie D. C.* (4931, 5096, 97, 118, 34, 44, 60, 71, 249, 319, 22, 24, 58, 72, 78, 90); *Florescu B. I.* (P); *Florescu V.* (4560); *Friedman B.* (5319); *Gheorghiu E. Oct.* (5319); *Iorgulescu N. Fl.* (5390); *Leibovici Sergiu* (5319); *Mihăilescu C. Const.* (4667, 5329, 78); *Mihail I. G.* (5390); *Moscovici E. N.* (5390); *Niculescu C. Mircea* (5262, 329, 69, 99); *Pantelimon Const.* (5319, 28, 73); *Petrescu Iulian* (5319); *Rollea C. V.* (5378, 90), *Rosenzweig S. M.* (5319); *Sbârnea D. Gh.* (5108, 36, 60, 218, 321, 78, 90); *Şerban C. C.* (5232, 57); *Ştefan C. Tilică* (5219, 43, 57, 58, 390); *Stoenescu D. Mirel* (5136, 98, 236, 50, 67, 300, 56, 66, 69, 73, 90); *Trefilov I. M.* (5027, 79, 136, 85, 260, 63, 80, 321, 28, 29, 56, 59, 69); *Voicu D. Gh.* (5329, 69, 78, 90).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de* geometrie, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 66.810

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVI

NUMĂRUL 4. — DECEMVRIE 1940

BIBLIOTECA ... SIBIU

SUMARUL

1. Concursul „Gazetei Matematice" din 1941. *Delegația Societății.*
2. Algebra ornamentală (urmare) . . . . *I. Ionescu.*
3. Asupra problemei 3209 (urmare și sfârșit). *Tiberiu Popoviciu.*
4. O problemă de geometrie a triunghiului (urmare și sfârșit) . . . . . *Gh. D. Simionescu.*
5. Asupra unor cercuri asociate triunghiului. *R. Goormaghtigh.*
6. O altă demonstrație a unei chestiuni clasice elementare cu ajutorul geometriei și mecanicei . . . . . *Alexandru I. Guțu.*
7. Programa analitică hotărîtă pentru concursul „Gazetei Matematice" din anul 1941.
8. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului „Nicolae G. Botea". . . . *Comisiunea pentru premii.*
9. Note Matematice: 10, 16 — 18.
10. Bibliografie.
11. Cereri: 297.
12. Diverse.
13. Probleme rezolvate: 2330, 4000, 4781, 5097, 5098, 5112, 5135, 5150, 5218, 5280, 5329.
14. Exerciții: 7 — 9.
15. Probleme propuse: 5407 — 5421.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1940

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **D. Stoica**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1940 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: **53**64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **4**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale,* Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“ DIN 1941

Societatea „*Gazeta Matematică*“, în şedinţa dela 28 Noemvrie a. c, a hotărît ţinerea concursului tradiţional de matematici, în cursul anului 1941, între elevii liceelor civile şi militare din întreaga ţară.

Concomitent cu acest concurs se va ţine un concurs şi între studenţii anului I ai Politechnicei din Bucureşti.

Concursul va avea loc după sărbătorile Paştelui, înainte de reînceperea cursurilor. Dacă Societatea va dispune de mijloace de a aduce candidaţii, el se va ţine în Bucureşti, unde se va da examen scris şi oral; în caz contrar se va ţine în diferite centre din ţară, într'o Duminică din luna Mai, dându-se numai examen scris.

Deciziunea în această privinţă se va publica în numărul din Februarie 1941.

Elevii cari doresc să candideze sunt obligaţi să se înscrie la *două din materiile de matematici ale clasei cărora aparţin,* la fiecare din aceste două materii urmând a da câte o lucrare scrisă, iar în cazul ţinerii concursului în Bucureşti şi examen oral.

Pentru unitatea pregătirii se publică în numărul de faţă al *Gazetei Matematice* un program, cu materia pe care candidaţii fiecărei clase vor trebui să o pregătească pentru obiectele la care se înscriu.

Sub nici un motiv nu se acordă candidaţilor scuze de nepregătirea unora din capitolele trecute în programul clasei lor pentru obiectele alese.

Inscrierea la concurs se face numai prin cerere individuală, scrisă personal de candidat, care se va trimete în plic recomandat cel mai târziu până la 15 Ianuarie 1941, pe adresa *Societăţii „Gazeta Matematică“. Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2.*

Nu se primesc cereri trimese de părinţi, corespondenţi, profesori sau şcoli, fiecare candidat fiind obligat a-şi face singur cererea.

Pentru ca cererea de înscriere la concurs să fie luată în considerare, candidatul trebue să răspundă pe puncte, în ordinea de mai jos, la următoarele date :

1. Numele (de familie) şi pronumele.

2. Şcoala şi clasa în care urmează candidatul. (Cei pregătiţi în particular vor arăta şcoala la care au urmat în anul precedent, sau la care au depus examenul de fine de an pentru clasa precedentă).

3. Adresa personală:

— în timpul şcolii,

— în timpul vacanţei de Paşte.

4. Dacă dispune de mijloace de a veni în Bucureşti, dacă are unde a fi găzduit şi întreţinut în timpul concursului, sau dacă unul din aceste mijloace ar urma să fie procurat de Societatea „*Gazeta Matematică*".

(Cel care are nevoe de bani pentru drum, va arăta gara de unde va lua trenul pentru a veni în Bucureşti, precum şi gara la care se înapoiază după concurs).

5. Cele două materii de matematici la care se înscrie.

6. Activitatea depusă la *Gazeta Matematică* şi *Suplimentul cu Exerciţii al Gazetei Matematice*, precum şi la alte reviste de matematici din ţară sau străinătate, arătând numărul de probleme şi exerciţii rezolvate şi publicate până în prezent.

Candidaţii înscrişi la concurs, cari din diferite motive nu mai pot sau nu mai vor să se prezinte, sunt obligaţi să anunţe din timp Societatea printr'o scrisoare.

Părăsirea sălilor de concurs, înainte de predarea lucrărilor scrise, este interzisă.

In numărul 6 din Februarie 1941 al *Gazetei Matematice* se va publica modul de ţinere al concursului, localitatea, orele de prezentare, precum şi numele tuturor candidaţilor admişi să ia parte la concurs.

Numărul celor admişi va depinde de sacrificiile materiale ce se vor cere Societăţii „*Gazeta Matematică*" pentru transportul, găzduirea şi întreţinerea candidaţilor şi de pregătirea pe care aceştia vor arăta-o şi dovedi în cererile ce vor face.

Candidaţii reuşiţi la concurs vor primi ulterior diplome, recompense, premii sau menţiuni.

Primul reuşit dintre toţi candidaţii liceelor va primi premiul «LT.-COL. G. TĂNĂSESCU», în cărţi, conform celor arătate în

numărul 1 din acest an la articolul: *Premii, burse şi publicaţii din fondurile speciale ale Societăţii „Gazeta Matematică“.*

Primul reuşit dintre studenţii anului I al Politehnicei din Bucureşti va primi premiul „ANGHEL SALIGNY“ (de 1000 lei) oferit de un membru al Societăţii noastre.

Comisiunea examinatoare se va compune din membri ai Societăţii „*Gazeta Matematică*“, care nu vor avea rude sau elevi printre candidaţi.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

ALGEBRA ORNAMENTALĂ

(Urmare dela pag. 121)

Simetria. *Ornamentala* D-lui E. MILICK coprinde două părţi. In prima se tratează despre simetrie, omotetie, despre unele chestiuni grafice, racordări de curbe şi despre colorarea liniilor. Dintre acestea, mai importantă şi mai complect studiată, este chestiunea

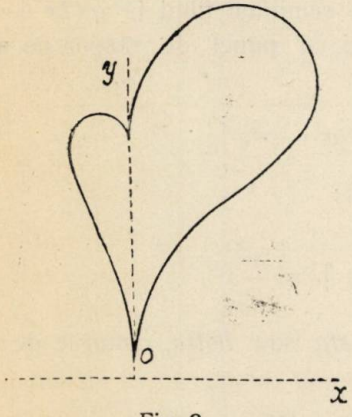


Fig. 2.

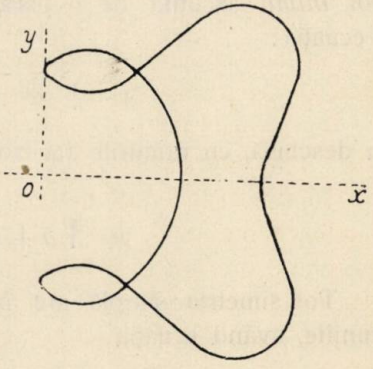


Fig. 3.

simetriei şi numai de aceasta mă voiu ocupa aci. Foarte puţine ornamente nu sunt simetrice, căci simetria este unul din elementele esenţiale pentru aspectul estetic. Ca element nesimetric întâlnim de exemplu frunza (Fig. 2). Ecuaţia ei este:

$$y = 2b + \sqrt[3]{x^2} \pm \sqrt{(x+b)\,(3b-x)}.$$

Figurile simetrice se deosibesc după cum au una, două sau mai multe axe de simetrie. Axa de simetrie se ia ca OX, sau OY sau ca bisectoare a unghiului XOY, la stabilirea ecuației curbei. Uneori se iau și axe trecând prin puncte simetrice confundate și făcând cu axele coordonate unghiuri de 30 și 60 de grade. Se știe că două figuri plane simetrice nu se pot suprapune; autorul zice că ele sunt de *faze* diferite: *recto* și *verso*. Curba căreia voim să-i găsim simetrica se numește *fundamentala ;* operațiunea de găsire a simetricii o numește *simetrizare.*

Am arătat că simetrica unei fundamentale se reprezintă cu ajutorul semnelor *simetru* și *contrasimetru,* astfel:

$$(\alpha)\ \infty\ \beta\ \infty \quad \text{sau} \quad f(x)\ \infty\ px+q\ \infty.$$

Dacă o figură are o singură axă de simetrie se zice că avem *o simetrie simplă.* Așa este cazul unei *semiluni* a cărei ecuație este:

$$y=\pm\sqrt{\frac{h^2(k^2+1)}{a^2}\left(x^2-\frac{k^2ax}{k^2+1}\right)+(a-x)\left[x\pm k\sqrt{x(a-x)}\right]}$$

unde $k>1$, grosimea maximă a semilunii fiind $[k^2a/(k^2+1)]$. Apoi *inima* ascuțită de o parte și cu punct de răspăr de alta, cu ecuația:

$$y=\sqrt[3]{x^2}\pm\sqrt{a^2-x^2},$$

sau deschisă, cu ramurile racordate:

$$y=\sqrt[3]{a+x^2\pm\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Tot simetrie simplă are *boneta* sau *bolta,* colțurile de sus rotunjite, având ecuația:

$$y=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\pm\sqrt{x^2-a^2}\right)^2}.$$

Apoi *ferul în I* cu tălpile puțin rotunjite:

$$y=\pm\sqrt{(m/a)-[1/a\pm\sqrt{a^2-x^2}]}.$$

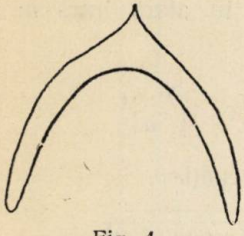


Fig. 4.

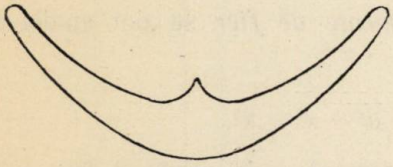


Fig. 5.

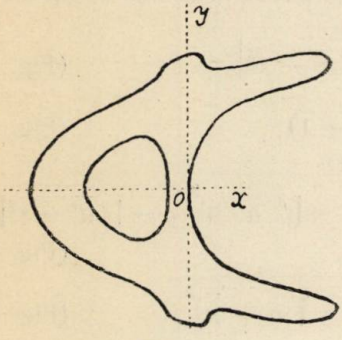


Fig. 7.

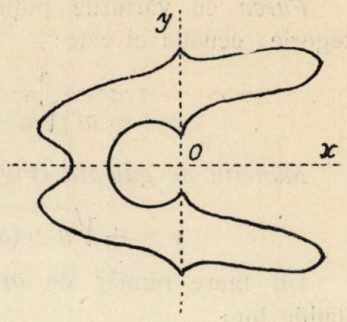


Fig. 6.

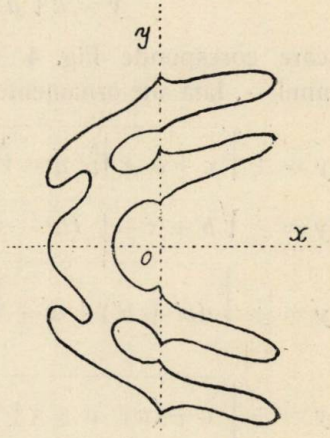


Fig. 8.

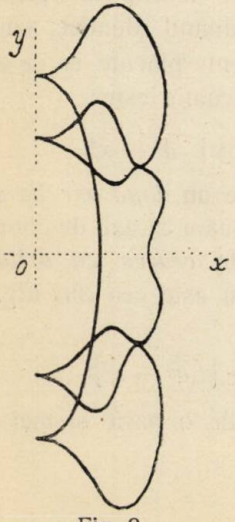


Fig. 9.

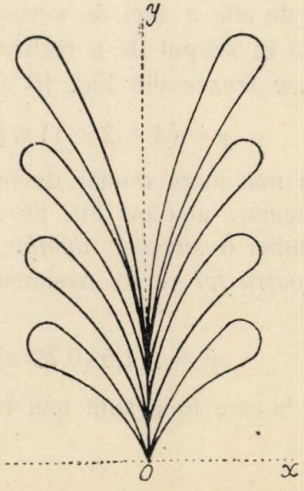


Fig. 10.

Furca cu vârfurile puțin îndoite în afară intră în această categorie; ecuația ei este:

$$y = -m\left[\sqrt[3]{a \pm \sqrt{a - x^2}} - \sqrt[3]{a}\right]^4.$$

Mânerul de găleată (Fig. 3) are ecuația:

$$y = \pm \sqrt{u \pm (ma - x)\sqrt{x(2a - x)}}.$$

Un mare număr de *ornamente de fier* se pot studia pe ecuațiile lor:

$$y = k\sqrt[3]{a \pm \sqrt{a^2 - x^2}} \pm x^2,$$

la care corespunde Fig. 4 cu semnul + la urmă și Fig. 5 cu semnul —. Iată alte ornamente metalice din ce în ce mai complicate:

$$y = \pm \sqrt{x + b \pm \left[\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 - x^2}}\right]}, \qquad \text{(Fig. 6)}$$

$$y = \pm \sqrt{b + x \pm \sqrt{(b^2 - x^2)/(x^2 + 1)}}, \qquad \text{(Fig. 7)}$$

$$y = \pm \sqrt{(b' + b'') + x \pm \sqrt{x + b' \pm \left[\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 - x^2}}\right]}} \qquad \text{(Fig. 8)}$$

$$y = \pm \sqrt{c + (a\sqrt{a} \pm x\sqrt{x})\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{b - x}\right)^2}. \qquad \text{(Fig. 9)}$$

Prin variațiunea coeficienților putem multiplica figurile de o parte și de alta a axei de simetrie, rămânând identice, sau deformându-le în scopul de a realiza ornamente plăcute, ca de exemplu *ramura cu frunze* din Fig. 10 a cărei ecuație este:

$$y = (4 \pm 2 \pm 1)\, m\sqrt{x^2} \pm nx\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Un mai mare număr de ornamente au *două axe de simetrie* perpendiculare una pe alta, pe care le luăm ca axe de coordonate. Avem atunci o *simetrie dublă*. Așa este *crucea cu aripi egale*, figurile *patru foi* cu foi nesimetrice cum este cea din Fig. 11 cu ecuația:

$$y = \pm 1{,}5\,(0{,}75/a)^2 x^2 \left[a \pm \sqrt{a^2 - x^2}\right],$$

și altele la care foile sunt mai rectilinii de o parte și mai curbate

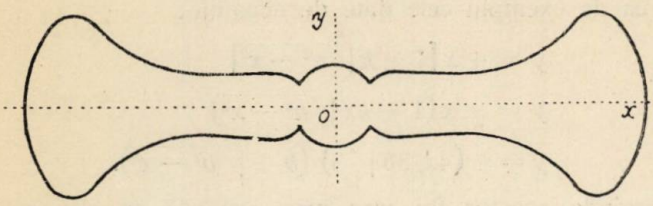


Fig. 12.

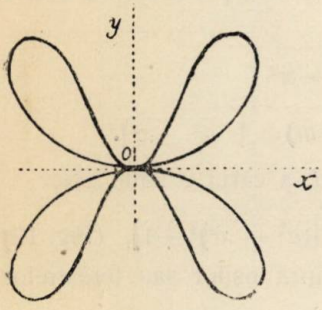


Fig. 11.

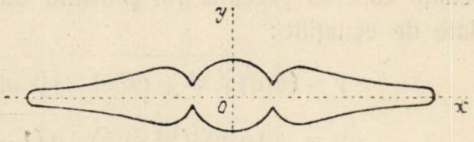


Fig. 13.

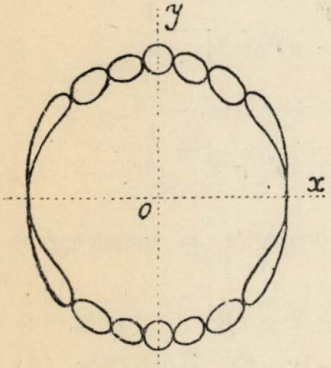


Fig. 14.

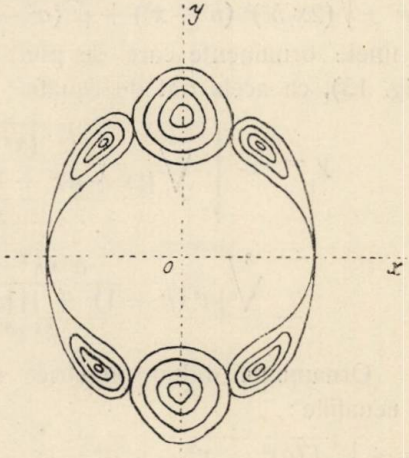


Fig. 15.

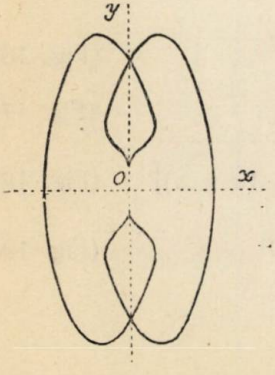


Fig. 16.

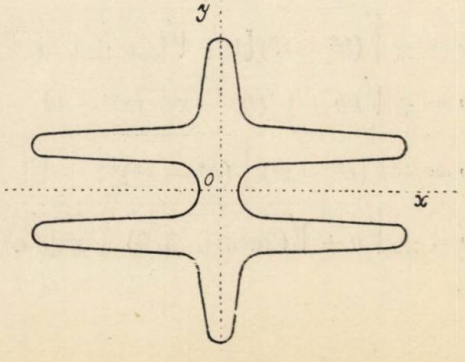


Fig. 17.

de alta, ca de exemplu cele date de ecuaţiile:

$$y = \pm x\left[1 \pm k\sqrt{a^2 - x^2}\right]$$

$$y = \pm x\left(1 \pm kx\sqrt{a^2 - x^2}\right)$$

$$y = \pm\left(4x/3b\sqrt{3}\right)\left(b \pm \sqrt{b^2 - x^2}\right).$$

Marginile acestor foi trec prin origină; se pot găsi însă ecuaţii care să prezinte foi pornind din un corp central, ca acelea date de ecuaţiile:

$$y = (b/a)\sqrt{x^2 \pm (x^2 + c)\sqrt{b^2 - x^2}}$$

$$y = \pm (a/b)\left[(x^2 + h)\sqrt{a(1 - m) \pm \sqrt{a^2 - x^2}}\right].$$

In această categorie intră *pisălogul*, a cărui ecuaţie este:

$y = \pm\sqrt{(2x/b^2)^2\,(b^2 - x^2) + \sqrt[3]{(a^2 - x^2)^2/[(a^2 - x^2)^2 + 1]}}$, (Fig. 12)

şi unele ornamente care se pun deasupra uşilor sau ferestrelor (Fig. 13), ca acela dat de ecuaţia:

$$y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt[3]{\dfrac{(x^2 - a^2)^2}{[(x + a)^2 + 1]\,[(x - a)^2 + 1]}} + \dfrac{1}{m}}{x^2 + 1} - \frac{\sqrt[3]{\dfrac{a^4\,(k^2 - 1)^2}{[a^2\,(k + 1)^2 + 1]\,[a^2\,(k - 1)^2 + 1}} + \dfrac{1}{m}}{k^2 a^2 + 1}}.$$

Ornamente dublu simetrice sunt *brăţările* ca următoarele cu ecuaţiile:

$y = \pm\sqrt{(7a)^2 - x^2} \pm \sqrt{a^2 - [x \pm a\,(3 \pm 2 \pm 1)]^2}$ (Fig. 14)

$y = \pm\sqrt{(21a^3) - x^2} \pm \sqrt{[(4 \pm 2 \pm 1)\,a]^2 - [x \pm (7 \pm 7)\,a]^2}$. (Fig. 15)

Mai reproduc aci patru ornamente dublu simetrice:

$$y = \pm\sqrt{(b^2 - x^2)\left[1 + \sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{a \pm x}}\right]} \qquad \text{(Fig. 16)}$$

$$y = \pm\sqrt{kb \pm \sqrt{(b^2 - x^2)/(x^2 + 1)}} \qquad \text{(Fig. 17)}$$

$$y = \pm k\,(c^2 - x^2)\sqrt{(b^2 - x^2)\left[1 + \sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{(a \pm x)}}\right]} \qquad \text{(Fig. 18)}$$

$$y = \pm\sqrt{n \pm \sqrt{(2a^2 m\sqrt{3}/9) \pm x^2\sqrt{a^2 - x^2}}}. \qquad \text{(Fig. 19)}$$

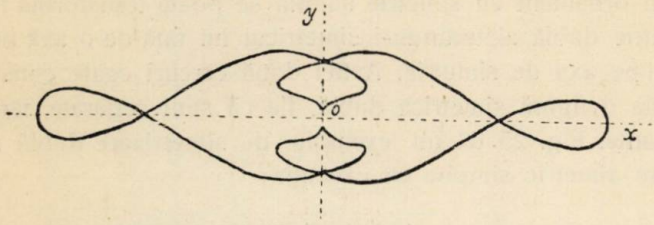


Fig. 18.

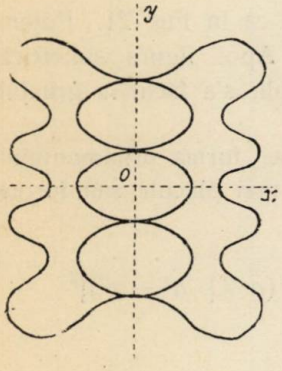


Fig. 19.

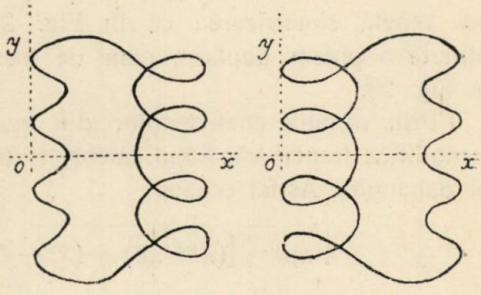


Fig. 20.

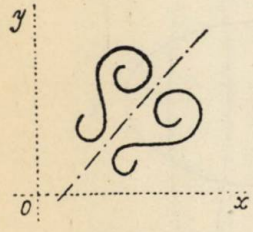


Fig. 21.

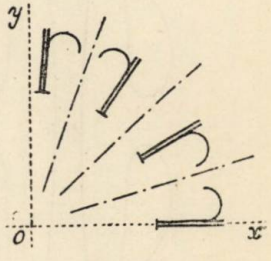


Fig. 22.

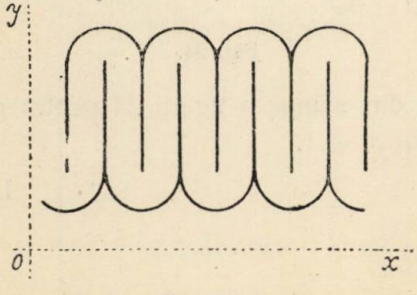


Fig. 23.

Un ornament cu simetrie simplă se poate transforma în altul cu simetrie dublă alăturându-i simetricul lui faţă de o axă perpendiculară pe axa de simetrie. Astfel două cercuri egale constituesc totdeauna o figură simetrică dublă, fie că sunt separate, tangente, sau secante. Fig. 25 dă un exemplu de simetrizare dublă a unui ornament simetric simplu, cu execuţia:

$$y = \pm \sqrt{v \pm \sqrt{u \pm (ma - x)\sqrt{x(2a - x)}}}.$$

Axa de simetrizare poate fi oriunde, ca în Fig. 21. Putem apoi repeta simetrizarea ca în Fig. 22. Apoi figura simetrică obţinută o putem deplasa, cum de exemplu s'a făcut la grilajul din Fig. 23.

Prin variaţia coeficienţilor din ecuaţie, forma ornamentului se modifică treptat căpătând uneori forme mai plăcute sau forme noi nebănuite. Astfel ecuaţia:

$$y = \pm \sqrt{mh - [(kb^2/2a) + (x^2 - b^2)/(a \pm \sqrt{a^2 - x^2})]^2}$$

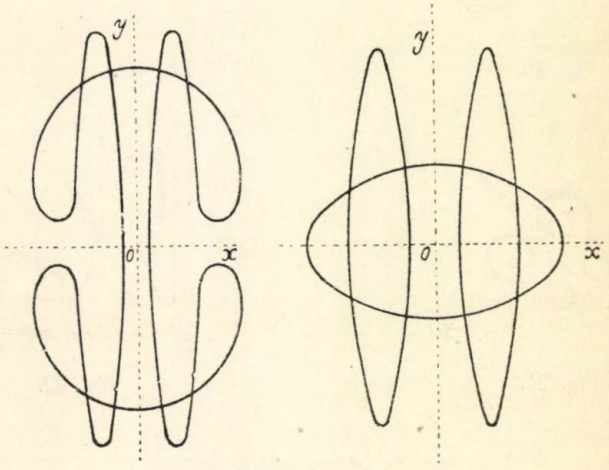


Fig. 24.

reprezintă partea din stânga a figurii 24 pentru $m > 1$ şi partea din dreapta pentru $m < 1$.

(Va urma) I. IONESCU.

ASUPRA PROBLEMEI 3209[1])

(Urmare dela pag. 130)

III.

8. Să revenim acum la problema noastră, deci la rezolvarea sistemului (2).

Dacă $A = 0$ suntem în cazul proprietăţii IX şi soluţia generală a sistemului e dată de polinoamele care verifică o relaţie de forma (13).

Dacă $B = 0$ soluţia generală e dată de polinoamele care verifică o relaţie de forma (13) pentru $n = 2, 3, \ldots$ Afară de aceasta trebue să avem $P_2 P_0 - P_1^2 = A$ sau $P_1 (UP_0 - P_1) = A$, care stabileşte legătura dintre polinoamele P_0, P_1 şi U.

Rămâne să examinăm cazul $A \neq 0$, $B \neq 0$, ceea ce vom presupune de acum înainte.

Să formăm polinoamele (14) şi (17). Din (2) rezultă că relaţiile (18) sunt verificate. Trebue deci să avem

$$P_n \begin{vmatrix} P_{n-2} & P_{n-1} & P_n \\ P_{n-1} & P_n & P_{n+1} \\ P_n & P_{n+1} & P_{n+2} \end{vmatrix} = 0, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Să presupunem că $P_n \neq 0$, $n = 2, 3, \ldots$, atunci trebue să avem

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} P_{n-2} & P_{n-1} & P_n \\ P_{n-1} & P_n & P_{n+1} \\ P_n & P_{n+1} & P_{n+2} \end{vmatrix} = 0, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Din această egalitate se vede că dacă f, g sunt astfel ca $P_2 = fP_1 + gP_0$, $P_3 = fP_2 + gP_1$ vom avea şi $P_n = fP_{n-1} + gP_{n-2}$, $n = 4, 5, \ldots$

Putem dar enunţa următoarea proprietate:

XII. *Soluţia generală a sistemului* (2), *cu condiţia ca* $P_n \neq 0$, $n = 2, 3, \ldots$, *este dată de polinoamele care verifică o relaţie de recurenţă de ordinul al doilea de forma*

$$(23) \qquad P_n = UP_{n-1} - BP_{n-2} \quad , \quad n = 2, 3, \ldots$$

---

1) In numărul trecut al *Gazetei* din greşală numărul problemei a fost 2309. Greşeala provine din faptul că la rezolvarea ei în vol. 40 p. 500 s'a dat din eroare acest număr problemei 3209.

unde polinoamele P_0, P_1, U *trebue să verifice egalitatea*

$$P_1^2 - UP_0P_1 + BP_0^2 + A = 0.$$

Pentru ca să existe efectiv o astfel de soluţie e necesar şi suficient ca polinomul $(U^2 - 4B)\,P_0^2 - 4A$ să fie un patrat perfect.

9. Să căutăm acum o soluţie în care $P_n \neq 0$, $n = 0, 1, \ldots, m-1$, $P_m = 0$. Putem scrie egalităţile (22) pentru $n = 2, 3, \ldots, m-1$ şi rezultă că

$$(24) \qquad P_n = fP_{n-1} - BP_{n-2}\ , \quad n = 2, 3, \ldots\ m+1,$$

f fiind o funcţie raţională convenabilă.

Polinoamele P_n, $n = 2, 3, \ldots, m+1$ se pot exprima cu ajutorul polinoamelor $T_n(x)$ în felul următor

$$(25) \qquad P_n = (\sqrt{B})^{n-1}\left[T_{n-1}\left(\frac{f}{\sqrt{B}}\right)P_1 - \sqrt{B}T_{n-2}\left(\frac{f}{\sqrt{B}}\right)P_0\right].$$

Pentru ca acest caz să fie posibil trebue ca polinoamele P_0, P_1 şi funcţia raţională f să fie legate prin relaţiile

$$(26) \qquad T_{m-1}\left(\frac{f}{\sqrt{B}}\right)P_1 - \sqrt{B}T_{m-2}\left(\frac{f}{\sqrt{B}}\right)P_0 = 0$$

$$(27) \qquad P_1^2 - fP_0P_1 + BP_0^2 + A = 0.$$

Mai mult, $P_{m-1}^2 = -AB^{m-2}$ şi rezultă că $-AB^{m-2}$ trebue să fie un patrat perfect, adică $-A$ sau $-AB$ trebue să fie un patrat perfect după cum m este par sau impar. In fine se vede că *şirul* $P_{m+1}, P_{m+2}, \ldots$ *este un şir regulat* cu acelaşi polinom B.

Pentru $m = 0$ trebue să păstrăm numai relaţia (26) şi rezultatul se aplică. Avem $P_1 = \sqrt{-A}$.

Pentru $m = 1$ păstrăm numai relaţia (26) şi trebue ca $-AB$ să fie un patrat perfect. Avem $P_2 = \sqrt{-AB}$.

Se vede deasemenea că rezultatul precedent e aplicabil şi pentru $m = 2$. In acest caz $P_1 = \sqrt{-A}$, $P_3 = -BP_2$.

In definitiv deci, pentru a găsi soluţiile excepţionale, adică acelea care nu sunt de forma (23), trebue să examinăm şirurile regulate, adică acelea care verifică sistemul (3).

Inainte însă putem observa că:

XIII. *Dacă nici unul din polinoamele* $-A$, $-AB$ *nu este un patrat perfect, singura soluţie a sistemului* (2) *e dată de polinoamele care sunt legate prin o relaţie de recurenţă de ordinul al doilea de forma* (23).

Se poate vedea pe un exemplu că acest caz e efectiv posibil De exemplu dacă $A = x^2 - x - 1$, $B = x$, avem o soluție pentru

$$P_0 = 1 \quad , \quad P_1 = \frac{x+2}{2} \quad , \quad U = 2x.$$

10. Să rezolvăm deci sistemul (3). Inainte de toate proprietatea XII ne dă :

XIV. *Soluția generală a sistemului* (3), *cu condiția ca* $P_n \neq 0$, $n = 2, 3, \ldots$, *este dată de polinoamele care verifică o relație de recurență de forma*

$$(28) \qquad P_1 = UP_0 \quad , \quad P_n = UP_{n-1} - BP_{n-2}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

sau

$$(29) \qquad P_1 = 0 \quad , \quad P_n = UP_{n-1} - BP_{n-2}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

U *fiind un polinom diferit de zero.*

S'ar putea, natural ca printre soluțiile de forma (28) și (29) să fie și de acelea în care să avem polinoame nule. Rămâne să examinăm alte soluții în care un polinom P_m e nul.

Pentru șirurile regulate condiția (27) se scrie

$$P_1(P_1 - fP_0) = 0.$$

Să presupunem întâi că B nu este un patrat perfect.

Să luăm întâi $P_1 = 0$. Condiția (26) ne arată că nu putem avea decât $f = 0$ și m impar. Trebue atunci să avem $P_1 = P_3 = P_5 = \ldots = P_m = 0$ și formula (25) ne dă $P_n = -B^{\frac{n}{2}} P_0$, pentru n par și $\leqq m + 1$.

Să luăm acum $P_1 = fP_0$. Condiția (26) ne dă

$$fT_{m-1}\left(\frac{f}{\sqrt{B}}\right) - \sqrt{B}T_{m-2}\left(\frac{f}{\sqrt{B}}\right) = \sqrt{B}T_m\left(\frac{f}{\sqrt{B}}\right) = 0$$

și constatăm că avem tot rezultatul precedent. In definitiv

XV. *Șirul regulat cel mai general pentru care* B *nu este un patrat perfect este acela în care*

$$P_{2n-1} = 0 \quad , \quad P_{2n} = -B^n P_0 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots, m$$

$$P_n = UP_{n-1} - BP_{n-2} \quad , \quad n = 2m+1, \; 2m+2, \ldots$$

unde U *este un polinom diferit de zero.*

In particular, avem cazurile extreme $m = 1$ şi $P_{2n-1} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Afară de aceste cazuri e de observat că şirul (1) nu verifică o relaţie de recurenţă de forma (19). De altfel aceste cazuri extreme intră în cazul (29) ($U \neq 0$ şi $U = 0$ respectiv).

11. Dacă B este un patrat perfect lucrurile se petrec altfel. In acest caz putem avea încă alte soluţii diferite de cele precedente. Se vede imediat din condiţiile (26) că dacă $P_m = 0$, avem o soluţie de forma $P_n = c_n (\sqrt{B})^n P_0$, $n = 0, 1, \ldots, m+1$. Deducem de aici că:

XVI. *Soluţia generală a sistemului* (3) *în cazul când* B *este un patrat perfect, este*

$$(30) \qquad P_n = c_n (\sqrt{B})^n P_0 \quad , \quad n = 0, 1, \ldots, m+1$$

$$P_{m+2} = UP_{m+1}, \quad P_n = UP_{n-1} - BP_{n-2}, \quad n = m+3, \; m+4, \ldots$$

unde $c_0, c_1, \ldots, c_{m+1}$ *este un şir* (C) *verificând sistemul* (11), *iar* U *un polinom diferit de zero.*

Avem şi aici un caz limită când relaţiile (30) sunt toate satisfăcute pentru $n = 0, 1, \ldots, c_0, c_1, \ldots$ fiind un şir (C) infinit.

In felul acesta am rezolvat complet sistemul (3) şi ştim să găsim toate soluţiile sistemului (2).

IV.

12. Vom justifica acum titlul acestui articol. In problema 3209 se cere să se determine polinoamele (1) astfel ca să avem

$$(31) \qquad P_{n+k} P_{n-k} - P_n^2 = (-1)^{n-k} x^{n-k+1} P_{k-1}^2,$$
$$n = k, \; k+1, \ldots$$

k fiind un număr natural.

Soluţia acestei probleme, publicată în G. M. Vol. 40, pp. 500—504, conţine mai multe scăpări din vedere.

Fie $k = 1$. Avem atunci sistemul

$$(32) \qquad P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^{n-1} x^n P_0^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Şirul (1) este deci regulat. Suntem în cazul când $B = -x$ nu este un patrat perfect. Soluţia generală este dată de proprietatea XV. In G. M. loc. cit. nu sunt date decât soluţiile de forma (28). Afară de aceasta, în soluţia dată, se deduce din

$$(33) \qquad P_2 P_0 - P_1^2 = x P_0^2$$

că $P_1 = RP_0$ admiţându-se, în mod tacit, că R este un polinom.

Acest lucru însă *trebuia demonstrat,* căci din (33) nu rezultă decât că P_1^2 se divide cu P_0. Se poate demonstra direct pe relaţiile (32) că P_1 se divide cu P_0, acest lucru rezultă însă şi din cele ce preced. Soluţia generală a sistemului (32) se poate pune sub forma următoare

$$P_{2n-1} = 0 \quad , \quad P_{2n} = (-1)^{n-1} x^n P_0 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots, m$$

$$P_n = -(\sqrt{-x})^n T_{n-2m}\left(\frac{U}{\sqrt{-x}}\right) P_0 \quad , \quad n = 2m, 2m+1, \ldots$$

U fiind un polinom. Când $m = 0$ luăm numai ultimele formule.

Să mai observăm că, contrar celor spuse la soluţia problemei 3209, *relaţiile* (31) *pentru* $k > 1$ *nu sunt o consecinţă a relaţiilor* (32).

Să ne ocupăm acum de cazul $k > 1$. In această parte soluţia problemei 3209, din G. M. loc. cit., e complet greşită. Cele c preced permit să rezolvăm problema şi în acest caz. In acest caz sistemul (31) e echivalent cu următoarele k sisteme

$$P_{(n+1)k+i} P_{(n-1)k+i} - P_{nk+i}^2 = (-1)^{(n-1)k+i} x^{(n-1)k+i+1} P_{k-1}^2$$

$$n = 1, 2, \ldots, \quad i = 0, 1, \ldots, \quad k - 1$$

care ne determină şirurile

$$P_i, \; P_{i+k}, \; P_{i+2k}, \ldots, \; P_{i+nk}, \ldots \qquad i = 1, 2, \ldots, \; k - 1.$$

Să ne ocupăm, de exemplu, de cazul $k = 2$. Avem sistemele

$$(34) \qquad P_{2n+2} P_{2n-2} - P_{2n}^2 = x^{2n-1} P_1^2 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$(35) \qquad P_{2n+3} P_{2n-1} - P_{2n+1}^2 = -x^{2n} P_1^2 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Sistemul (34) e de forma (2) în care $A = xP_1^2$, $B = x^2$, deci nici unul din polinoamele $-A$, $-AB$ nu este un patrat perfect. Soluţia generală a acestui sistem este deci

$$P_{2n} = UP_{2n-2} - x^2 P_{2n-4} \quad , \quad n = 2, 3, \ldots$$

unde avem

$$P_2^2 - UP_0 P_2 + x^2 P_0^2 + xP_1^2 = 0.$$

Sistemul (35) este de forma (3) unde $B = x^2$ este un patrat perfect. Soluţia generală a acestui sistem este deci

$$P_{2n+1} = c_n x^n P_1 \quad , \quad n = 0, 1, \ldots, m+1$$

$$P_{2m+5} = U_1 P_{2m+3} \quad , \quad P_{2n+1} = U_1 P_{2n-1} - x^2 P_{2n-3},$$

$$n = m + 3, \; m + 4, \ldots$$

Aici U şi U_1 sunt două polinoame şi $c_0, c_1, \ldots$ este un şir (C). Iată de exemplu, o soluţie care nu verifică sistemul (32)

$$P_0 = P_1 = 1 \quad , \quad P_2 = x$$

$$P_{2n+1} = x^n T_n\left(\frac{U_1}{x}\right) \quad , \quad P_{2n+2} = x^{n+1}\left[T_n\left(\frac{2x+1}{x}\right) - T_{n-1}\left(\frac{2x+1}{x}\right)\right]$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

U_1 fiind un polinom.

13. Inainte de a termina acest articol să spunem ceva despre o altă problemă publicată în G. M. şi propusă de regretatul A. ANGELESCU. E vorba de problema 3169, a cărei soluţie s'a publicat în G. M. Vol. 40, pp. 465—470. In această problemă se cerea să se determine polinoamele (1), fiecare fiind de grad egal cu indicele corespunzător [1]), astfel ca să avem

$$P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2 = -x^{2n} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Suntem în cazul unui sistem (2) în care $A = -x^2$, $B = x^2$, deci ambele polinoame $-A$, $-AB$ sunt patrate perfecte. Cele ce preced permit rezolvarea completă a problemei. Şi în cazul acestei probleme s'au pierdut soluţiuni din cauză că la rezolvarea ei s'a făcut ipoteza, cu nimic justificată, că polinoamele sunt legate prin o relaţie de recurenţă liniară de ordinul al doilea.

Dacă $P_0 = 0$, avem $P_1^2 = x^2$ şi şirul $P_1, P_2, \ldots$ este regulat cu $B = x^2$ patrat perfect.

Dacă $P_0^2 = 1$, şirul $P_0, P_1, \ldots$ este regulat cu $B = x^2$ patrat perfect.

In ambele aceste cazuri există soluţii *care nu sunt legate prin o relaţie de recurenţă liniară de ordinul al doilea.*

O astfel de soluţie este

$$P_0 = 1 \quad , \quad P_1 = \sqrt{2x} \quad , \quad P_2 = x^2,$$

$$P_{3n} = 0 \ , \ P_{3n+1} = (-1)^n x^{3n+1} \ , \ P_{3n+2} = (-1)^n x^{3n+2},$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

sau

$$P_n = c_n x^n \quad , \quad n = 0, 1, \ldots$$

unde $c_0, c_1, \ldots$ este un şir (C).

---

1) Nu neapărat de grad *efectiv* egal cu indicile.

Dacă $P_0^2 \neq 0, 1$, avem încă soluţii care nu sunt semnalate în G. M. loc. cit. Astfel este soluţia

$$P_0 = 3 \ , \ P_1 = 2x \ , \ P_2 = x^2 \ , \ P_3 = 0 \ , \ P_4 = -x^4,$$

$$P_n = (ax + b)\, P_{n-1} - x^2 P_{n-2} \ , \ n = 5, 6, \ldots$$

Las pe seama cetitorilor să formeze soluţia completă a problemei.

Observare finală. In tot acest articol nu am făcut nici o ipoteză asupra corpului de numere căruia aparţin coeficienţii polinoamelor. S'ar putea ca într'un corp mai restrâns unele soluţii să dispară. S'ar putea întâmpla, de exemplu, ca $-A$ sau $-AB$ să fie un patrat perfect în corpul complex dar nu în corpul real sau în corpul real dar nu în corpul raţional.

TIBERIU POPOVICIU.

O PROBLEMĂ DE GEOMETRIE A TRIUNGHIULUI

(Urmare dela pag. 135)

Dacă din picioarele A', B', C' ale cevienelor ducem segmentele perpendiculare pe laturi, date de (7') atunci dreptele AM, BN, CP se întâlnesc într'un punct U, iar dacă luăm segmentele date de (8') vom avea un alt punct comun V. Când k variază punctele U şi V descriu două locuri geometrice pe care ne propunem să le găsim. Pentru aceasta ar trebui să ducem valorile lui m şi n în ecuaţiile dreptelor (AM) şi (BN) şi ele vor depinde atunci de un singur parametru k, ce trebue eliminat. Putem proceda însă şi altfel: vom scoate valorile lui m şi n din ecuaţiile dreptelor şi le vom introduce în primele două rapoarte din (7). Avem:

$$(9) \qquad m = 2S \frac{\beta x_3 - \gamma x_2}{(\beta + \gamma)(x_2 c \cos B - x_3 b \cos C)};$$

$$n = 2S \frac{\gamma x_1 - \alpha x_3}{(\gamma + \alpha)(x_3 a \cos C - x_1 c \cos A)}$$

care duse în (7) ne dă :

$$\frac{\alpha(\beta x_3 - \gamma x_2)}{a(x_2 c\cos B - x_3 b\cos C)} = \frac{\beta(\gamma x_1 - \alpha x_3)}{b(x_3 a\cos C - x_1 c\cos A)} \quad \therefore$$

$$(10)\quad \alpha a(\beta c\cos B - \gamma b\cos C)\, x_2 x_3 + \beta b(\gamma a\cos C - \alpha c\cos A)\, x_3 x_1 + \gamma c(\alpha b\cos A - \beta a\cos B)\, x_1 x_2 = 0.$$

Deci locul geometric al punctului U este o conică circumscrisă triunghiului. Se vede imediat că ea trece prin ortocentrul $H\left(\frac{a}{\cos A}, \frac{b}{\cos B}, \frac{c}{\cos C}\right)$ și prin $\omega(\alpha, \beta, \gamma)$, *este deci iperbola echilateră circumscrisă, determinată de punctul* ω.

Locul geometric al lui V se obține ducând valorile lui m și n din (9) în primele două rapoarte din (8). Avem :

$$\frac{\beta x_3 - \gamma x_2}{(x_2 c\cos B - x_3 b\cos C)\cos A} = \frac{\gamma x_1 - \alpha x_3}{(x_3 a\cos C - x_1 c\cos A)\cos B} \quad \therefore$$

$$(11)\quad (\beta c\cos B - \gamma b\cos C)\cos A \,.\, x_1 + (\gamma a\cos C - \alpha c\cos A)\cos B \,.\, x_2 + (\alpha b\cos A - \beta a\cos B)\cos C \,.\, x_3 = 0$$

deci ecuația unei drepte ce trece prin ortocentru și prin punctul ω.

* * *

Cazuri particulare. 1°. Dacă ω coincide cu punctul N al lui GERGONNE avem în primul caz:

$$m = k\frac{a}{\frac{1}{p-a}\left(\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right)} = k(p-a)(p-b)(p-c) = \lambda; \qquad n = \lambda \;;\; p = \lambda$$

deci $m = n = p$ (Teorema lui KARYA).

In al doilea caz :

$$m = k.\frac{\cos A}{\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}} = k\,\frac{\cos A}{a}(p-b)(p-c) =$$

$$k'\,\frac{\cos A}{a(p-a)} = k''\,\frac{1}{(p-a)\,\mathrm{tg}A}.$$

2°. ω coincide cu centrul de greutate G(1, 1, 1).

In primul caz avem:

$$m = k\frac{a}{2} = k'a \quad ; \quad n = k'b \quad ; \quad p = k'c$$

deci m, n, p sunt proporţionale cu laturile respective (problema 5112).

In al doilea caz:

$$m = k\frac{\cos A}{2} = k'R\cos A = k'\overline{OA''} \text{ (A'' mijlocul laturei BC)}$$

$$n = k'.\overline{OB''} \quad ; \quad p = k'\overline{OC''}. \text{ (Teorema lui FRANKE).}$$

3°. ω coincide cu $I(a, b, c)$. In primul caz avem:

$$m = k\frac{a}{a(b+c)} = k\frac{1}{b+c} \quad ; \quad n = k\frac{1}{c+a} \quad ; \quad p = k\frac{1}{a+b}.$$

In cazul al doilea:

$$m = k\frac{\cos A}{b+c} \quad ; \quad n = k\frac{\cos B}{c+a} \quad ; \quad p = k\frac{\cos C}{a+b}.$$

După cum se vede dacă luăm pentru m, n, p valorile (7') obţinem o generalizare a teoremei lui KARYA, iar dacă luăm valorile date de (8') obţinem o generalizare a teoremei lui FRANKE.

GH. D. SIMIONESCU.

ASUPRA UNOR CERCURI ASOCIATE TRIUNGHIULUI

1°. Ne propunem a studia *locul geometric al centrului de greutate* P *al maselor* m_1, m_2, m_3 *aplicate simetricelor* T_1, T_2, T_3 *ale unui punct* T *în raport cu laturile* A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 *ale unui triunghiu, atunci când* T *descrie cercul circumscris acestui triunghiu.*

Fie O centrul şi R raza cercului $A_1A_2A_3$; H ortocentrul, G centrul de greutate şi O_9 centrul cercului celor 9 puncte ale triunghiului $A_1A_2A_3$.

Se ştie că punctele T_1, T_2, T_3 aparţin unei drepte Δ ce trece prin H şi că locul acestor puncte sunt cercurile Γ_1, Γ_2, Γ_3 simetrice ale cercului $A_1A_2A_3$ faţă de laturile A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Cercurile Γ_1, Γ_2, Γ_3 trec prin H.

Luând pe H ca origină a unui sistem de coordonate dreptunghiulare, cercurile Γ_1, Γ_2, Γ_3 au ecuații de forma

$$x^2 + y^2 - 2\alpha_i x - 2\beta_i y = 0. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

O dreaptă

$$y = \lambda x \qquad (1)$$

trecând prin H întâlnește cercurile Γ în puncte T_i ale căror abscise sunt date de

$$(1 + \lambda^2)\, x_i = 2\alpha_i + 2\lambda\beta_i .$$

Dacă se pune

$$\mu_i = \frac{m_i}{m_1 + m_2 + m_3}$$

centrul de greutate P al maselor m_1, m_2, m_3 aplicate în punctele T_1, T_2, T_3 are abscisa dată de

$$\xi (1 + \lambda^2) = 2 \Sigma \mu_i \alpha_i + 2\lambda \Sigma \mu_i \beta_i$$

adică abscisa punctului în care dreapta (1) taie cercul

$$x^2 + y^2 - 2x \Sigma \mu_i \alpha_i - 2y \Sigma \mu_i \beta_i = 0. \qquad (2)$$

Deci locul punctului P este cercul (2), pe care-l notăm Γ și care trece prin H.

Dar, cercurile Γ_1, Γ_2, Γ_3 au centrele în simetricele C_1, C_2, C_3 ale lui O față de mijloacele M_1, M_2, M_3 ale laturilor triunghiului $A_1A_2A_3$. Coordonatele centrului ω al cercului Γ sunt

$$\Sigma \mu_i \alpha_i , \quad \Sigma \mu_i \beta_i .$$

Deci ω este punctul care are ca coordonate baricentrice în triunghiul $C_1C_2C_3$ pe m_1, m_2, m_3; ω este deci simetricul lui O față de punctul ω', care are aceleași coordonate baricentrice în triunghiul $M_1M_2M_3$. Dacă în fine N este punctul de coordonate baricentrice m_1, m_2, m_3 în triunghiul $A_1A_2A_3$ atunci ω' este punctul ce se obține prelungind pe NG cu jumătate din lungimea sa. Considerând triunghiul $N\omega\omega'$ tăiat de transversala OGO_9 se recunoaște în fine că ω este simetricul lui N față de O_9.

Se obține astfel următoarea teoremă:

Dacă punctul T *descrie cercul circumscris triunghiului* $A_1A_2A_3$, *centrul de greutate a trei mase date* m_1, m_2, m_3, *aplicate simetricelor lui* T *față de laturile triunghiului, descrie cercul, simetric*

față de centrul cercului celor 9 puncte, al cercului care trece prin centrul cercului circumscris lui $A_1A_2A_3$ *și care are drept centru punctul de coordonate baricentrice* m_1, m_2, m_3 *în triunghiul* $A_1A_2A_3$.

Toate cercurile obținute trec prin ortocentru.

2°. Când $m_1 = m_2 = m_3$, punctul N este centrul de greutate al triunghiului $A_1A_2A_3$ și cercul obținut este acela care are drept diametru segmentul cuprins între ortocentru și centrul de greutate; se obține astfel această curioasă definiție a cercului ortocentroidal [1]):

Cercul ortocentroidal al unui triunghiu este locul centrului de greutate a trei mase egale aplicate simetricelor unui punct de pe cercul circumscris, față de laturile triunghiului.

Din cele dela 2° rezultă că unghiul HPO_9 este totdeauna drept. Deci:

Centrul de greutate a trei mase egale, aplicate în simetricele unui punct de pe cercul circumscris, față de laturile triunghiului, este proiecția centrului cercului celor nouă puncte pe dreapta pe care se află aceste simetrice.

3°. La două puncte T și T′ a cercului $A_1A_2A_3$ corespund, în cazul general, două drepte $T_1T_2T_3$ și $T_1'T_2'T_3'$ paralele cu dreptele lui SIMSON ale punctelor T și T′ și se știe că unghiul acestor drepte este jumătatea unghiului TOT′.

Urmează că dacă P′ este centrul de greutate al maselor m_1, m_2, m_3 aplicate în T_1', T_2', T_3', unghiul $P\omega P'$ este egal cu unghiul TOT′.

Deci teorema:

Dacă P *și* P′ *sunt centrele de greutate a maselor* m_1, m_2, m_3 *aplicate în simetricele punctelor* T, T′ *de pe cercul* $A_1A_2A_3$, *față de laturile acestui triunghiu, și dacă* N *este punctul de coordonate baricentrice* m_1, m_2, m_3 *în triunghiul* $A_1A_2A_3$, *raportul segmentelor* PP′ *și* TT′ *este constant egal cu raportul* ON/R, *unde* O *este centrul și* R *raza cercului* $A_1A_2A_3$.

R. GOORMAGHTIGH.
Bruges-Belgia.

---

1) *Mathesis* 1890, pag. 166 și 1893, pag. 33: *Asupra centrului ortocentroidal.*

O ALTĂ DEMONSTRAȚIE A UNEI CHESTIUNI CLASICE ELEMENTARE CU AJUTORUL GEOMETRIEI ȘI MECANICEI

In fascicola 11—12 a „Buletinului de Matematici și de Fizică", pure și aplicate, al Școlii Politehnice din București, dedicată D-lor profesori D. POMPEIU și GH. ȚIȚEICA, cu ocazia împlinirii vârstei de 60 ani, D-l profesor I. IONESCU a dat o foarte interesantă demonstrație a teoremei clasice *„un triunghiu este isoscel dacă are două bisectoare interioare egale"* utilizând proprietăți geometrice și mecanice.

Ne propunem să dăm, în cele ce urmează, o altă demonstrație acestei teoreme, utilizând același procedeu, care se arată fecund, extinzând în același timp problema și în ceea ce privește înălțimile și medianele.

1. Fie ABC triunghiul în care avem:

$$(1) \qquad \overline{BB'} = \overline{CC'}$$

și în care să presupunem că avem inegalitatea:

$$(2) \qquad \hat{B} > \hat{C}.$$

Să considerăm sistemul S_1 format din vectorii $\vec{BB'}$ și $\vec{CC'}$. Acest sistem poate fi înlocuit cu sistemul echivalent format din vectorii:

$$\vec{BB''}\ ,\ \vec{BC} \quad \text{și} \quad \vec{CC''}\ ,\ \vec{CB},$$

cari sunt componentele lui $\vec{BB'}$ și $\vec{CC'}$ după direcțiunea laturilor triunghiului ABC. Sistemul S_1 este echivalent, prin urmare, cu sistemul S_2 format din vectorii:

$$\vec{BB''} \quad \text{și} \quad \vec{CC''};$$

iar conform inegalității (2) avem și

$$(3) \qquad \overline{BB''} > \overline{CC''}.$$

2. Rezultanta sistemului S_1 trece prin punctul I de întâlnire a vectorilor $\vec{BB'}$ și $\vec{CC'}$, și, conform egalității (1), face unghiuri egale cu componentele $\vec{BB'}$ și $\vec{CC'}$. Rezultanta sistemului S_2 trece

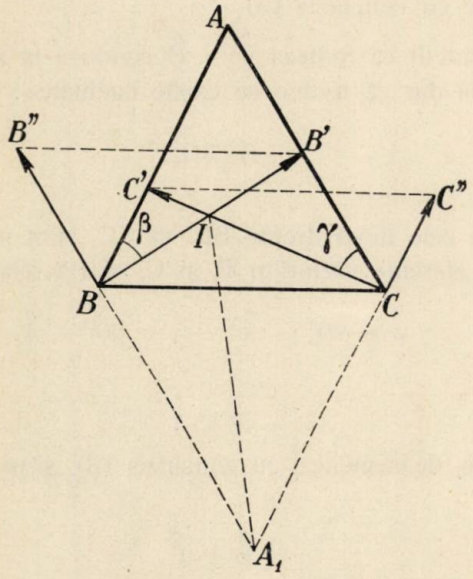
prin punctul A_1, de întâlnire a vectorilor $\vec{BB''}$ şi $\vec{CC''}$, şi, conform inegalităţii (3), face un unghiu mai mic cu componenta $\vec{BB''}$ decât cel cu componenta $\vec{CC''}$. Cele două sisteme fiind echivalente, rezultanta comună este îndreptată după dreapta A_1I.

Conform egalităţii (1) avem dar:

$$(4) \qquad \widehat{BIA_1} = \widehat{CIA_1};$$

iar conform inegalităţii (3):

$$(5) \qquad \widehat{BA_1I} < \widehat{CA_1I}.$$



3. Din triunghiurile BA_1I şi CA_1I rezultă, conform relaţiilor (4) şi (5), inegalitatea:

$$(6) \qquad \widehat{IBA_1} > \widehat{ICA_1}.$$

Cu notaţiile de pe figura alăturată avem:

$$(7) \qquad \begin{cases} \widehat{IBA_1} = \hat{C} + \hat{B} - \hat{\beta} \\ \widehat{ICA_1} = \hat{B} + \hat{C} - \hat{\gamma}. \end{cases}$$

Prin urmare ipoteza (2) conduce la inegalitatea:

$$\hat{\beta} < \hat{\gamma}. \tag{8}$$

4. *a)* Dacă cele două drepte BB′ şi CC′ sunt bisectoarele interioare ale unghiurilor $\hat{B}$ şi $\hat{C}$, rezultă că:

$$\hat{\beta} = \frac{1}{2}\hat{B}\ ,\quad \hat{\gamma} = \frac{1}{2}\hat{C}, \tag{9}$$

şi conform ipotezei (2)

$$\hat{\beta} > \hat{\gamma} \tag{10}$$

în contradicţie cu concluzia (8).

(Este evident că ipoteza $\hat{C} > \hat{B}$ conduce la aceeaşi contradicţie). Rezultă dar că trebue să existe egalitatea:

$$\hat{B} = \hat{C}$$

ccedd.

b) Dacă cele două drepte BB′ şi CC′ sunt înălţimile triunghiului ABC, aferente vârfurilor B şi C, există relaţiile:

$$\hat{\beta} = 90^0 - \hat{A}\ ,\quad \hat{\gamma} = 90^0 - \hat{A} \tag{11}$$

adică:

$$\hat{\beta} = \hat{\gamma} \tag{12}$$

în contradicţie, deasemenea, cu concluzia (8), şi în acest caz avem dar relaţia:

$$\hat{B} = \hat{C}$$

ccedd.

c) Dacă cele două drepte BB′ şi CC′ sunt medianele triunghiului ABC, aferente vârfurilor B şi C, rezultă că punctele B′ şi C′ sunt pe o aceeaşi paralelă la latura BC, B şi C fiind de o parte a acestei paralele, iar vârful A de cealaltă parte. In acest caz egalitatea (2) arată că punctul B′ este mai aproape de perpendiculara ridicată pe mijlocul laturei BC decât punctul C′ şi, prin urmare, se poate scrie inegalitatea:

$$\widehat{BB'C} > \widehat{CC'B}. \tag{13}$$

Din triunghiurile BIC' şi CIB', rezultă, pe baza inegalităţii (13) şi inegalitatea:

$$(14) \qquad \hat{\beta} > \hat{\gamma}.$$

Rezultat în contradicţie cu concluzia (8). Prin urmare şi în acest caz trebue să existe egalitatea

$$\hat{B} = \hat{C}$$

ccedd.

ALEXANDRU I. GUŢU.

PROGRAMA ANALITICĂ
HOTĂRÎTĂ PENTRU CONCURSUL «GAZETEI MATEMATICE» DIN ANUL 1941

Clasa IV-a. Toată materia prevăzută de programa analitică.

Clasa V-a. **Algebra.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. La radicali se va face raţionalizarea numitorilor care conţin radicali de ordinul al doilea şi superiori.

2. La sistemele de ecuaţii de gradul I se vor cere metode particulare de rezolvare şi sisteme reductibile la gradul I.

3. Transformarea expresiunilor de forma: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

Geometria plană. Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Teorema lui MENELAUS şi CEVA şi reciprocele lor.

2. Teoremele lui PTOLOMEU pentru patrulatere inscriptibile.

3. Cercuri ortogonale. Cercul celor nouă puncte. Ax şi centru radical.

4. Relaţia metrică a lui STEWART. Aplicaţiuni.

Clasa VI-a. **Geometria în spaţiu.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Unghiuri triedre.

2. Volumul produs de un sector poligonal plan ce se roteşte în jurul unei axe. Volumul segmentului sferic (mărginit de zonă sau calotă).

Trigonometria. Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Aria unui triunghiu în raport cu elementele date.
2. Razele cercurilor: circumscris, înscris şi exînscrise.
3. Identităţi, ecuaţii şi sisteme trigonometrice.
4. Problema hărţii.

Clasa VII-a. **Algebra.** Toată materia prevăzută de programa analitică, afară de aplicaţiile la cinematică. In plus:

1. Serii cu termeni pozitivi, seria lui *e*. Principalele criterii de convergenţă. Logaritmi neperieni.
2. Derivata funcţiunii logaritmice şi exponenţiale.
3. Nedeterminări. Regula lui HÔSPITAL.

Geometria descriptivă. Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Metode: schimbarea de plane de proiecţie şi rabaterea.
2. Diviziuni armonice, fascicole armonice. Pol şi polară în raport cu un unghiu şi în raport cu un cerc. Polare reciproce.
3. Teoremele lui PASCAL şi BRIANCHON. Patrulatere complete.

Clasa VIII-a. **Algebra.** Toată materia prevăzută de programa analitică, afară de capitolul de calcul integral. In plus:

1. Cantităţi complexe, teorema lui MOIVRE. Ecuaţii binome.

Geometria analitică. Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Pol şi polară.

Mecanica. Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Cinematica.

*

Orice candidat trebue să cunoască materia respectivă a clasei precedente cu adăogirile prevăzute în prezenta programă.

* * *

Anul I al Politechnicei din Bucureşti.

Candidaţii vor fi examinaţi din materia predată până la vacanţa Paştelui la două din materiile: Algebra şi Analiză matematică. Geometrie analitică sau Mecanică.

RAPORTUL COMISIUNEI

PENTRU

ACORDAREA PREMIULUI „NICOLAE G. BOTEA"

Art. 1 al regulamentului premiului prevede acordarea sa celei mai bune lucrări din ultimul volum al *Gazetei Matematice* cu subiect de geometria triunghiului şi a tetraedrului, domeniu matematic atât de iubit de regretatul nostru coleg NICOLAE G. BOTEA. Autorul trebue să fie elev sau student.

In volumul XLV al *Gazetei Matematice* se află un singur articol împlinind condiţiile de mai sus, articolul D-lui IULIAN PETRESCU : *„Câteva consideraţii de geometria triunghiului"*.

Ocupându-se de iperbola echilateră circumscrisă unui triunghiu, D-sa prezintă demonstraţii apreciate bine de redacţie şi vădeşte orientare în geometria triunghiului.

Apoi D-lui IULIAN PETRESCU i s'a publicat în volumul XLV al *Gazetei Matematice* două probleme propuse: 5227 şi 5275, de asemenea de geometrie.

Pentru calitatea lucrărilor menţionate, propunem să se acorde D-lui IULIAN PETRESCU, elev la Liceul „G. Lazăr" din Bucureşti, premiul „NICOLAE G. BOTEA" pe anul 1940, constând din următoarele volume :

1. N. ABRAMESCU : Curs de Geometrie Analitică.
2. T. ANGHELUŢĂ : Curs de Algebră Superioară.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA
PREMIULUI „NICOLAE G. BOTEA"
Ing. E. G. BOTEA, Prof. C. IONESCU-BUJOR,
Ing. D. STOICA.

Acest raport s'a citit şi s'a aprobat în Adunarea Generală dela 29 August 1940.

NOTE MATEMATICE

10. *Asupra problemei de construcție din nota 55, Vol. XLV, „Gazeta Matematică“* [1]).

4°. *Fie* O *pe bisectoarea exterioară, între* B *și piciorul ei* B″. In cazul figurei B″ este pe prelungirea lui AC, deci $\alpha < A$. Procedând ca la 2° găsim

$$\sin(A-\alpha) = \sin\alpha \cos\frac{B}{2}$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{\sin A}{\cos A + \cos\frac{B}{2}} = \frac{BS}{AS + AX'} \tag{3}$$

X′ fiind proiecția lui A pe BB″. Avem deci totdeauna o soluție între B și B″.

5°. O *se află pe prelungirea lui* B″B. In acest caz, pentru figura considerată

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2} \tag{4}$$

și găsim

$$\operatorname{tg}\alpha_5 = \frac{\sin A}{\cos\frac{B}{2} - \cos A} = \frac{BS}{AX' - AS} \tag{5}$$

care este totdeauna posibilă cu restricția (4).

Se arată ca la 2° condiția ca AO să fie paralelă cu BB″.

6°. In fine să presupunem că O *ar fi pe prelungirea lui* BB″. In acest caz găsim

$$\operatorname{tg}\alpha_6 = \frac{\sin A}{\cos A - \cos\frac{B}{2}} = \frac{BS}{AS - AX'} \tag{6}$$

cu condițiunea

$$A < \alpha < \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2} = \frac{A}{2} + \frac{C}{2}.$$

Se observă că $\operatorname{tg}\alpha_5$ și $\operatorname{tg}\alpha_6$ sunt egale și de semne contrare, deci

$$\alpha_5 + \alpha_6 = \pi$$

1) Urmare la nota cu același titlu dela pag. 138. A se urmări figura dela pag. 139.

şi cum unghiurile α_5, α_6 au vârful A şi latura AB comună, urmează că O_4A şi O_5A sunt în prelungire. Deci dacă O se găseşte în cazul 5°, el nu mai există în cazul 6° şi invers.

Vom arăta cu alt prilej, pe o cale pur geometrică, dacă şi când anume se obţine soluţia 5° sau 6°.

In concluzie se vede că dacă notăm cu h_b înălţimea din B, cu c' proiecţia lui AB pe AC şi cu d_a, d_a' distanţele dela A la bisectoarele unghiului B, problema are totdeauna 4 soluţiuni pentru α, soluţiuni date de formulele generale

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h_b}{c' \pm d_a} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{h_b}{c' \pm d_a'}.$$

După cum se vede soluţia pe această cale este prea lungă pentru simplicitatea problemei, de altfel foarte frumoasă şi interesantă. In soluţia pur geometrică ce am dat la pag. 358, Vol. XLIV *Gazeta Matematică* precum şi în soluţia ce s'a dat la pag. 198, Vol. VI *Ştiinţă şi progres*, s'au întrebuinţat pe două căi diferite locurile geometrice obţinute prin consideraţiuni elementare de omotetie şi s'au găsit fără nici-o ambiguitate cele 4 soluţiuni la intersecţia bisectoarelor cu 2 drepte, fără a fi nevoie de vre-o examinare topologică a diferitelor cazuri de figură.

Problema se poate rezolva şi algebric, dând loc la un interesant exerciţiu de discuţie, după cum am spus şi în nota dela pag. 358, Vol. XLIV.

G-L GH. BUICLIU.

16. *Notă de analiză nedeterminată multigradă.* D-l A. MÓESSNER semnalează, în *Gazeta Matematică*, Vol. XLIV, pag. 580, următoarea teoremă:

Dacă avem multigrada

$$a_1, a_2, a_3 \overset{n}{=} b_1, b_2, b_3 \qquad (n = 1, 2)$$

vom avea deasemeni şi

$$a_1, a_2, a_3, \frac{2S_1}{3} - a_1, \frac{2S_1}{3} - a_2, \frac{2S_1}{3} - a_3, \overset{n}{=}$$

$$b_1, b_2, b_3, \frac{2S_1}{3} - b_1, \frac{2S_1}{3} - b_2, \frac{2S_1}{3} - b_3,$$

$$(n = 1, 2, 3, 4, 5)$$

cu condiţia $S_1 = \Sigma a_i = \Sigma b_i$.

Această teoremă nu este decât un caz particular al următoarei teoreme, care se găseşte la pag. 55 *c.* în teza mea „*Recherches sur les égalités multigrades*“, prezentată universităţii din Bruxelles în 1939:

Dacă avem egalitatea multigradă

$$a_1, a_2, \ldots a_{n+1} \overset{x}{=} b_1, b_2, b_{n+1} \qquad (x = 1, 2, \ldots n)$$

cu $n+1$ *termeni în fiecare membru, unii termeni putând fi chiar nuli, şi dacă*

$$S_1 = \Sigma a_i = \Sigma b_i$$

atunci vom avea deasemeni

α) *Dacă* n *este pereche:*

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}, \frac{2S_1}{n+1} - a_1, \frac{2S_1}{n+1} - a_2, \ldots, \frac{2S_1}{n+1} - a_{n+1} \overset{x}{=}$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}, \frac{2S_1}{n+1} - b_1, \frac{2S_1}{n+1} - b_2, \ldots, \frac{2S_1}{n+1} - b_{n+1}.$$

β) *Dacă* n *este nepereche:*

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}, \frac{2S_1}{n+1} - b_1, \frac{2S_1}{n+1} - b_2, \ldots, \frac{2S_1}{n+1} - b_{n+1} \overset{x}{=}$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}, \frac{2S_1}{n+1} - a_1, \frac{2S_1}{n+1} - a_2, \ldots, \frac{2S_1}{n+1} - a_{n+1}$$

$$(x = 1, 2, \ldots, n, n+1, n+2, n+3).$$

Această teoremă este o consecinţă a următoarei (Loc. cit. pag. 55 *a*):

O egalitate multigradă de câte $n+1$ *termeni în fiecare membru, având suma termenilor din fiecare membru nulă şi fiind verificată pentru primele* n *grade, este verificată şi până la gradul* $n+2$ *inclusiv.*

Fie, deci:

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \overset{x}{=} b_1, b_2, \ldots, b_{n+1} \qquad (x = 1, 2, \ldots, n)$$

avem

$$a_1 - \frac{S_1}{n+1}, a_2 - \frac{S_1}{n+1}, \ldots, a_{n+1} - \frac{S_1}{n+1} \overset{x}{=}$$

$$b_1 - \frac{S_1}{n+1}, b_2 - \frac{S_1}{n+1}, \ldots, b_{n+1} - \frac{S_1}{n+1}$$

$$(x = 1, 2, \ldots, n-1, n, n+2).$$

Această egalitate este deci adevărată în particular:

α) Dacă n este pereche, pentru toate valorile perechi ale exponentului dela 2 la $n+2$.

β) Dacă n este nepereche pentru toate valorile neperechi ale exponentului dela 1 la $n+2$.

Vom da demonstrația numai pentru cazul α), căci ea este analoagă și pentru cazul β).

O teoremă cunoscută, permite de a deduce din o egalitate multigradă adevărată pentru valorile 2, 4, ..., $2n$ ale exponentului o altă egalitate multigradă pentru toate valorile întregi 1, 2, ..., $2n$, $2n+1$ ale exponentului.

Prin aplicarea acestei ultime teoreme (a se vedea și teza citată la început, pag. 18 teorema IV) vom găsi

$$a_1+A-\frac{S_1}{n+1},\ a_2+A-\frac{S_1}{n+1},\ldots,\ a_{n+1}+A-\frac{S_1}{n+1},$$

$$-a_1+A+\frac{S_1}{n+1},\ -a_2+A+\frac{S_1}{n+1},\ldots,\ -a_{n+1}+A+\frac{S_1}{n+1}\overset{x}{=}$$

$$b_1+A-\frac{S_1}{n+1},\ b_2+A-\frac{S_1}{n+1},\ldots,\ b_{n+1}+A-\frac{S_1}{n+1},$$

$$-b_1+A+\frac{S_1}{n+1},\ -b_2+A+\frac{S_1}{n+1},\ldots,\ -b_{n+1}+A+\frac{S_1}{n+1}$$

$$(x=1,\ 2,\ldots,\ n+2,\ n+3).$$

A fiind un întreg arbitrar.

Dacă dăm lui A valoarea $\frac{S_1}{n+1}$, vom avea

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{n+1},\ \frac{2S_1}{n+1}-a_1,\ \frac{2S_1}{n+1}-a_2,\ldots,\ \frac{2S_1}{n+1}-a_{n+1}\overset{x}{=}$$

$$b_1,\ b_2,\ldots,\ b_{n+1},\ \frac{2S_1}{n+1}-b_1,\ \frac{2S_1}{n+1}-b_2,\ldots,\ \frac{2S_1}{n+1}-b_{n+1}$$

$$(x=1,\ 2,\ldots,\ n,\ n+1,\ n+2,\ n+3).$$

In cazul β), se întrebuințează teorema V a tezei mele (pag. 18).

Exemple numerice. Dau următoarele 4 exemple numerice:

I. $7, 7, 28 \overset{x}{=} 1, 16, 25$; $(x = 1, 2)$, $\frac{2S_1}{3} = 28$

$$7, 7, 28, 21, 21, 0 \overset{x}{=} 1, 16, 25, 27, 12, 3$$

sau

$$7, 7, 21, 21, 28, \overset{x}{=} 1, 3, 12, 16, 25, 27. \quad (x = 1, 2, 3, 4, 5)$$

cu

$$S_1 = 84 \ ; \ S_2 = 1764 \ ; \ S_3 = 41160.$$

II. Din $1, 52, 65, 90 \overset{x}{=} 2, 45, 76, 85$; $(x = 1, 2, 3)$; $\frac{2S_1}{4} = 104$

se găseşte

$$1, 19, 38, 48, 47, 29, 10, 0 \overset{x}{=} 3, 8, 26, 49, 45, 40, 22, (-1)$$

sau adăugând 2 la toţi termenii şi scriindu-i în ordine crescândă:

$$2, 3, 12, 21, 31, 40, 49, 50 \overset{x}{=} 1, 5, 10, 24, 28, 42, 47, 51$$

$$(x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

IV. $1, 20, 26, 58, 63, 87 \overset{x}{=} 3, 12, 41, 43, 70, 86$

$$(x = 1, 2, 3, 4, 5) \ ; \ \frac{2S_1}{6} = 85$$

sau adăugând 3 la fiecare termen

$$1, 6, 15, 25, 30, 44, 46, 62, 68, 73, 87, 89 \overset{x}{=}$$

$$2, 4, 18, 23, 29, 45, 47, 61, 66, 76, 85, 90$$

$$(x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8).$$

Pentru detalii, trimit cititorii la teza citată, paginele $56g - k$.

A. GLODEN.

17. *Asupra problemei 4479.* După redijarea acestei probleme, răsfoind „Exercices de géométrie moderne“ par G. PAPELIER (IX géométrie projective pag. 12) am dat peste exerciţiul 26 cu următorul enunţ:

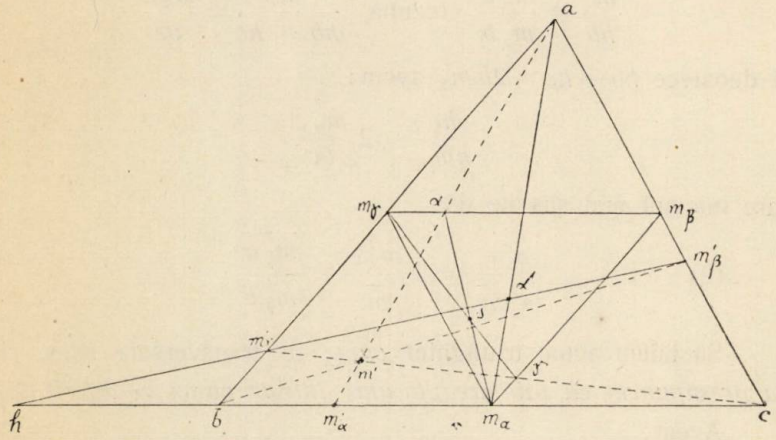
„*Se dă un triunghiu* ABC *şi două puncte* D *şi* E *în planul său. Dreptele* AD, BD, CD *întâlnesc laturile* BC, CA, AB *respectiv în punctele* A′, B′, C′ *şi dreptele* AE, BE, CE *întâlnesc laturile* B′C′, C′A′, A′B′ *ale triunghiului* A′B′C′ *respectiv în* A″B″C″.

Să se demonstreze că dreptele A′A″, B′B″, C′C″ *sunt concurente*".

Păstrând în cele ce urmează notaţiile problemei 4479 se recunoaşte că dreptele A′A″, B′B″, C′C″ de mai sus sunt identice cu dreptele $M_a m_a$, $M_b m_b$, $M_c m_c$, deci cu primele trei din cele şase drepte concurente.

Soluţia ce se dă, în tratatul citat, exerciţiului 26, mi-a sugerat o soluţie *geometrică* a problemei 4479, mai elementară decât cea a D-lui I. I. ŢIŢEICA, dar fără bogăţia soluţiei D-sale.

Se ştie că laturile triunghiului pedal $M_a M_b M_c$ întâlnesc laturile triunghiului ABC în trei puncte aşezate pe o dreaptă Δ.



Să proectăm figura pe un plan astfel ca dreapta Δ să fie aruncată la infinit. Triunghiul ABC se proectează după triunghiul *abc*, triunghiul $M_a M_b M_c$ devine triunghiul complementar $m_\alpha m_\beta m_\gamma$ al lui *abc*, iar triunghiul $M'_a M'_b M'_c$ devine triunghiul pedal $m'_\alpha m'_\beta m'_\gamma$ al unui punct oarecare *m′*, proecţia punctului M′. Punctele m_a, m_b, m_c; m'_a, m'_b, m'_c se proectează respectiv în α, β, γ; α', β', γ'.

In „PAPELIER" se demonstrează că dreptele $m_\alpha\alpha$, $m_\beta\beta$, $m_\gamma\gamma$ sunt concurente. Să notăm cu *s* (proecţia punctului S) punctul lor comun.

Problema 4479 este demonstrată dacă arătăm că dreptele $m'_\alpha\alpha'$, $m'_\beta\beta'$, $m'_\gamma\gamma'$ *sunt concurente tot în* s.

Pentru aceasta *este deajuns să arătăm că dreapta* $m'_\alpha s$ *trece prin* α', căci la fel se va arăta că dreapta $m'_\beta s$ trece prin β', etc.

Să tăiem triunghiul $am_\alpha c$ cu transversala $m'_\beta m'_\gamma$, care întâlneşte latura bc în h, conjugatul armonic al lui m'_α faţă de b şi c. După teorema lui MENELAUS avem:

$$(1)\quad \frac{\overline{\alpha' a}}{\overline{\alpha' m_\alpha}} \times \frac{\overline{hm_\alpha}}{\overline{hc}} \times \frac{\overline{m'_\beta c}}{\overline{m'_\beta a}} = 1 \quad \therefore \quad \frac{\overline{\alpha' a}}{\overline{\alpha' m_\alpha}} = \frac{\overline{hc}}{\overline{hm_\alpha}} \cdot \frac{\overline{m'_\beta a}}{\overline{m'_\beta c}}.$$

Insă din:

$$\frac{\overline{hc}}{\overline{hb}} = \frac{m'_\alpha c}{m'_\alpha b} \quad \text{rezultă} \quad \frac{hc}{hb + hc} = \frac{m'_\alpha c}{bc}$$

şi deoarece $hb + hc = 2h\,m_\alpha$ avem:

$$\frac{hc}{hm_\alpha} = 2\,\frac{m'_\alpha c}{bc}$$

care înlocuit mai sus ne dă:

$$(2)\qquad \frac{\overline{\alpha' a}}{\overline{\alpha' m_\alpha}} = 2\,\frac{\overline{m'_\alpha c}}{\overline{bc}} \times \frac{\overline{m'_\beta a}}{\overline{m'_\beta c}}.$$

Să tăiem acum triunghiul $a\alpha m_\alpha$ cu transversala $m'_\alpha s$, *care să presupunem că taie dreapta* am_α *într'un punct* α'_1 *diferit de* α'.

Avem:

$$\frac{\overline{\alpha'_1 a}}{\overline{\alpha'_1 m_\alpha}} \times \frac{\overline{sm_\alpha}}{\overline{s\alpha}} \times \frac{\overline{m'_\alpha \alpha}}{\overline{m'_\alpha a}} = 1$$

$$(3)\quad \therefore \quad \frac{\overline{\alpha'_1 a}}{\overline{\alpha'_1 m_\alpha}} = \frac{\overline{s\alpha}}{\overline{sm_\alpha}} \times \frac{\overline{m'_\alpha a}}{\overline{m'_\alpha \alpha}} = 2\,\frac{\overline{s\alpha}}{\overline{sm_\alpha}}$$

deoarece

$$\frac{\overline{m'_\alpha a}}{\overline{m'_\alpha \alpha}} = 2.$$

Triunghiul $\alpha m_\alpha m_\beta$ tăiat de transversala $m_\gamma s_\gamma$ ne dă:

$$\frac{\overline{s\alpha}}{\overline{sm_\alpha}} \times \frac{\overline{\gamma m_\alpha}}{\overline{\gamma m_\beta}} \cdot \frac{\overline{m_\gamma m_\beta}}{\overline{m_\gamma \alpha}} = 1$$

$$(4) \quad \therefore \quad \frac{\overline{s\alpha}}{\overline{sm_\alpha}} = \frac{\overline{\gamma m_\beta}}{\overline{\gamma m_\alpha}} \times \frac{\overline{m_\gamma \alpha}}{\overline{m_\gamma m_\beta}} = \frac{\overline{m'_\gamma a}}{\overline{m'_\gamma b}} \times \frac{\overline{bm'_\alpha}}{\overline{bc}}$$

deoarece dreptele paralele ab şi $m_\alpha m_\beta$ tăiate de cm'_γ ne dau:

$$\frac{\overline{\gamma m_\beta}}{\overline{\gamma m_\alpha}} = \frac{\overline{m'_\gamma a}}{\overline{m'_\gamma b}}, \text{ etc.}$$

Ducând rezultatul din (4) în (3) căpătăm:

$$(5) \qquad \frac{\overline{\alpha'_1 a}}{\overline{\alpha'_1 m_\alpha}} = -2\frac{\overline{m'_\alpha b}}{\overline{bc}} \times \frac{\overline{m'_\gamma a}}{\overline{m'_\gamma b}}.$$

In triunghiul abc cevienele punctului m' ne dau:

$$\frac{\overline{m'_\alpha b}}{\overline{m'_\alpha c}} \times \frac{\overline{m'_\beta c}}{\overline{m'_\beta a}} \times \frac{\overline{m'_\gamma a}}{\overline{m'_\gamma b}} = -1$$

$$(6) \quad \therefore \quad -\overline{m'_\alpha b} \times \frac{\overline{m'_\gamma a}}{\overline{m'_\gamma b}} = \overline{m'_\alpha c} \times \frac{m'_\beta a}{m'_\beta c}.$$

Comparând relaţiile (2), (5) şi (6) rezultă:

$$\frac{\overline{\alpha' a}}{\overline{\alpha' m_\alpha}} = \frac{\overline{\alpha'_1 a}}{\overline{\alpha'_1 m_\alpha}}$$

ceea ce arată că punctele α'_1 şi α' coincid.

q. e. d.

GH. D. SIMIONESCU.

18. *Ecuaţia tangenţială a hipocicloidei cu trei rebrusmente în coordonate baricentrice.* Fie dreapta

$$(\Delta) \quad p\alpha + q\beta + r\gamma = 0$$

care taie laturile triunghiului ABC în A_1, B_1, C_1. Acestei drepte îi corespunde un punct al lui MIQUEL

$$M\left[\frac{a^2}{p(q-r)}, \frac{b^2}{q(r-p)}, \frac{c^2}{r(p-q)}\right]$$

punctul comun al cercurilor ABC, AB_1C_1, BC_1A_1 şi CA_1B_1. Scriind dreapta MA_1 şi calculând unghiul $\varphi = MA_1B$ se găseşte

$$\operatorname{tang}\varphi = \pm \frac{4S(p-q)(q-r)(r-p)}{\Sigma a^2(q+r)(p-q)(r-p)}.$$

Dacă $\varphi = \pi/2$, ecuaţia:

$$\Sigma a^2(q+r)(p-q)(r-p) = 0$$

reprezintă condiţia ca (Δ) să fie dreaptă a lui SIMSON. Deci ecuaţia tangenţială a hipocicloidei cu trei rebrusmente.

ION C. VASILIU.

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timişoara. Anul XX. Nr. 9. Noemvrie 1940. Relaţiuni într'un poligon regulat de MIHAIL BOTEZ. Curbe armonice de C. BORŞ.

N. M. *Transformarea prin polare reciproce.* Monografia Nr. 9 din Biblioteca revistei „Pozitiva". Arad 1940.

Équilibre avec frottement sur une surface fixe, par M. GHERMĂNESCU (extrait du „Bulletin scientifique de l'école polytéchnique de Timişoara"). Fiind date o suprafaţă $(S) \equiv F(x, y, z) = 0$ şi un punct material $M(x, y, z)$ care se deplasează pe această suprafaţă sub acţiunea unei forţe F ai cărei parametri directori sunt a, b, c era cunoscut că avem echilibru în acel punct în care F face cu normala la suprafaţă un unghiu mai mic decât φ, unde φ este unghiul de frecare al suprafeţei în punctul considerat.

Într'o broşură de 16 pag., format 24 cm/17 cm., cu 15 paragrafe, D-l prof. M. GHERMĂNESCU îşi propune şi reuşeşte să determine pe (S) regiunile în care există echilibru.

Pentru cazul când F are o direcţiune absolut oarecare, se asociază suprafeţei (S) sfera (σ) cu centru în origină şi astfel încât fiecărui punct $M(x, y, z)$ depe (S) să-i corespundă câte un punct $m(X, Y, Z)$ depe (σ), unde X, Y, Z sunt cosinuşii directori ai normalei în M la (S). Găsirea regiunilor de echilibru pe (S) revine la găsirea regiunilor pe (σ).

Începând dela § 4 inclusiv şi până la sfârşit, această reprezentare sferică, întrucât ne putem dispensa de ea în cazul când cunoaştem o relaţie $\Phi(a, b, c, x, y, z) \gtrless 0$ între direcţia lui F şi poziţia lui M sau când forţele F au direcţii particulare (forţe centrale, paralele), este părăsită.

§ 4 şi 5 se ocupă cu găsirea regiunilor de echilibru având relaţia $\Phi(a, b, c, x, y, z) \gtrless 0$; § 6 tratează cazul în care parametrii a, b, c, depind de poziţia lui M pe (S); la § 7, 8 forţele F sunt presupuse centrale, iar la § 9 ele sunt paralele. La § 10, 11, 12, 13, 14 se examinează cazurile în care (S) este o cuadrică oarecare. In fine § 15 menţionează cazul în care unghiul de fiecare φ variază pe (S) dela un punct la altul.

Intregul studiu este caracterizat de relaţiunile:

$$\left(\Sigma a F'_x\right)^2 - \left(\Sigma a^2\right)\left(\Sigma F'^2_x\right)\cos^2\varphi \geqslant 0$$

şi

$$a F'_x + b F'_y + c F'_z \gtrless 0,$$

prima exprimând la origină că unghiul dintre F şi normală este mai mic decât φ, iar a doua arătând că avem echilibru când M se deplasează pe partea exterioară sau interioară a lui (S).

Aprofundarea acestui studiu cere cititorului în special cunoştinţe de Geometrie analitică în spaţiu. Calculele sunt conduse cu o abilă competinţă. La tipărire s'au strecurat unele greşeli mărunte. Sperăm că într'o viitoare ediţie se vor corecta aceste greşeli.

Lucrarea D-lui M. G. pe lângă calităţi de noutate şi adevăr pur matematic, este valoroasă şi pentru aplicaţiile ei, dintre care este şi în G. M. propusă una.

VIRGIL GHIŢESCU.

CERERI

297. In 1874 DIMITRIE PETRESCU, fost profesor la Universitatea din Bucureşti a tipărit „*Elemente de Geometrie*", despre care se afirmă că ar fi traduse după un tratat francez. Ce se ştie precis în această privinţă?

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

E. DELSOL. Principes de géométrie. Paris 1903.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

M. NOETHER, H. POINCARÉ, C. SEGRE. Relazione del Concorso Internazionale per le „*Medaglia Guccia*". Roma 1908.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2330. *Să se determine coeficienții întregi și pozitivi* p *și* q, *astfel ca ecuațiile*

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{și} \quad x^2 + qx + p = 0$$

să aibă în același timp rădăcini egale.

S. KAUFMANN.

Soluția. Dacă p este nul, prima ecuație are rădăcini imaginare oricare ar fi q. Dacă q e nul, a doua ecuație are rădăcini imaginare. Deci considerăm numai valorile mai mari ca zero ale lui p și q.

Pentru satisfacerea condițiilor enunțului, trebue ca mai întâi $p^2 - 4q$ și $q^2 - 4p$ să fie simultan patrate perfecte.

Expresiunea $p^2 - 4q$, unde q este pozitiv, fiind de paritatea lui p va fi cel mult $(p-2)^2$, căci dacă ar fi $(p-1)^2$ am avea

$$p^2 - 4q = (p-1)^2 \quad \therefore \quad 4q = 2p - 1$$

imposibil în numere întregi. Deci

$$p^2 - 4q \leqslant (p-2)^2 \quad \therefore \quad q \geqslant p - 1. \qquad (1)$$

La fel

$$q^2 - 4p \leqslant (q-2) \quad \therefore \quad p \geqslant q - 1. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă

$$p - 1 \leqslant q \leqslant p + 1.$$

Deci q nu poate fi decât unul din numerele $p-1$, p sau $p+1$. Examinăm fiecare valoare în parte.

1°. $q = p - 1$. Ecuațiile devin

$$x^2 + px + p - 1 = 0 \quad \text{și} \quad x^2 + (p-1)x + p = 0.$$

Prima ecuație are rădăcinile întregi $1 - p$ și -1. Realizantul ecuației a doua dă condiția

$$R = (p-1)^2 - 4p = (p-3)^2 - 8 \geqslant 0$$

$$\therefore \quad p \geqslant 3 + \sqrt{8} \quad \text{sau} \quad p \geqslant 6.$$

Cum R este de paritatea lui $p - 3$, avem

$$(p-3)^2 - 8 \leqslant (p-5)^2 \quad \therefore \quad p \leqslant 6.$$

Deci p nu poate fi decât 6, valoare care răspunde problemei căci ecuaţiile

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \quad \text{şi} \quad x^2 + 5x + 6 = 0$$

au simultan, rădăcinele numere întregi.

2°. $p = q$, cele 2 ecuaţii se reduc la una singură cu realizantul

$$p^2 - 4p = (p-2)^2 - 4 > 0 \quad \therefore \quad p \geqslant 4.$$

Acest realizant fiind de paritatea lui $p - 2$, trebue ca $p \leqslant 4$. Deci $p = 4$, care duce la ecuaţia

$$x^2 + 4x + 4 = 0.$$

3°. $q = p + 1$. Este acelaşi caz cu 1°, căci totul revine la a schimba pe q şi p între ei.

Notă. 1°. Sunt trecuţi ca rezolvitori ai acestei probleme:

— pe copertele Vol. XXI: V. CEAUŞOGLU, H. CUŞUTA, H. HRISTEA, S. GOROVEI, AL. MANOLIU şi M. REINHORN.

— pe copertele Vol. XXII: I. G. LINTEŞ şi L. TEODORIU.

2°. Fâcând acelaşi raţionament, ca în soluţia dată precedent, se găseşte că problema nu are soluţie în cazul p şi q negativi. Dacă p şi q sunt de semne contrare, de exemplu $p < 0$ şi $q > 0$ atunci găsim soluţia

$$q = p' - 1 \quad \text{unde} \quad p' = -p > 0.$$

Ecuaţiile

$$x^2 + p'x - p' - 1 = 0 \quad \text{şi} \quad x^2 - (p' + 1)x - p' = 0$$

au totdeauna rădăcinile întregi.

3°. Problema se poate rezolva, pe cale generală, punând condiţiile enunţului sub forma

$$p^2 - 4q = u^2 \quad , \quad q^2 - 4p = v^2$$

şi rezolvând acest sistem în numere întregi pozitive pentru p şi q. Se ajunge la acelaşi rezultat.

Vom publica cu plăcere, sub forma de notă, rezolvarea în numere întregi a sistemului (1), dacă ni se va trimite.

G-L G. B.

PROBLEMA 4000. *Fie:*

$$u_n = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{2n} - 1$$

e *fiind baza logaritmilor neperieni. Să se arate că seria* u_n *este convergentă.*

ŞERBAN A. GHEORGHIU.

Avem:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\ldots}$$

$$\therefore\ u_n = \frac{e}{e}\left[1+\frac{1}{1!}\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\ldots\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\ldots\right)^2+\ldots\right]+\frac{1}{2n}-1.$$

Sau:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 u_n = \frac{11}{24}\cdot$$

Seria propusă este deci convergentă.

q. e. d.

S'au primit soluțiuni bune dela D-nii: ARȘAVSCHI ALEXE, I. D. CÂRSTOIU și ȘTEFAN E. OLTEANU.

PROBLEMA 4781. *Dacă între coeficienții* a_0, a_1, a_2 *ai ecuației*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

avem relația

$$(1) \qquad 4n\,a_0 a_2 - 3(n-1)\,a_1^2 \geqslant 0,$$

ecuația are neapărat rădăcini imaginare.

M. GHERMĂNESCU.

1. *Soluție* dată de D-nii: HERMAN V., PREDOESCU TR., RIPIANU D., ROȘCULEȚ M. și TILICĂ ȘT.

Vom presupune $a_0 > 0$, ceea ce este totdeauna posibil. Pentru ca ecuația dată să aibă rădăcini imaginare, este suficient ca una din derivatele sale să aibă rădăcini imaginare. Anulând derivata de ordinul $n-2$, obținem, după simplificări, ecuația

$$n(n-1)\,a_0 x^2 + 2(n-1)\,a_1 x + 2a_2 = 0,$$

care are rădăcini imaginare dacă

$$(2) \qquad (n-1)\,a_1^2 < 2n\,a_0 a_2,$$

inegalitate evident satisfăcută în condiţiunile enunţului, căci deducem

$$(n-1)\,a_1^2 \leqslant \frac{4}{3}\,n a_0 a_2 < 2n\,a_0 a_2 .$$

2. *Soluţie* dată de D-nii: D. MAVRODIN şi I. BUZINCU. Facem schimbarea de necunoscută

$$x = X - \frac{a_1}{n a_0},$$

ecuaţia devine

$$a_0 X^n + \frac{2n\,a_0 a_2 - (n-1)\,a_1^2}{2n a_0} X^{n-2} + \ldots = 0.$$

Această ecuaţie, având o *lacună* de un termen, are rădăcini imaginare dacă termenii între care e cuprinsă lacuna sunt de *acelaşi* semn. Ori, cum $a_0 > 0$, este suficient să arătăm că

$$2n\,a_0 a_2 - (n-1)\,a_1^2 \geqslant 0,$$

ceea ce rezultă imediat, ca la prima soluţie.

Notă. 1. D-l MIRCEA A. NEGREA a trimis o soluţie bazată pe relaţiunile între rădăcini şi coeficienţi.

2. D-nii I. I. ŢITEICA şi P. COJOCARU au dat soluţii bazându-se pe cele stabilite în problema 4472, respectiv 4733.

M. G.

PROBLEMA 5097. *Să se demonstreze că avem:*

$$\lim_{n \to \infty} (n!)^{\frac{1}{n}} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}\right]^2 = \frac{1}{\pi e}.$$

ŞERBAN GHEORGHIU.

n fiind destul de mare, se aplică formula lui STIRLING:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1+\varepsilon}{12n}\right).$$

Se obţine succesiv :

$$(n!)^{\frac{1}{n}} = ne^{-1}(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\left(1+\frac{1+\varepsilon}{12n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2 = \frac{[(2n)!]^2}{2^{4n}(n!)^4},$$

$$\therefore \left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2 = \frac{(2n)^{4n}\cdot e^{-4n}\cdot 4\pi n\cdot\left(1+\frac{1+\varepsilon'}{24n}\right)^2}{2^{4n}\cdot n^{4n}\cdot e^{-4n}(2\pi n)^2\left(1+\frac{1+\varepsilon}{12n}\right)^4}$$

$$= \frac{1}{\pi n}\cdot\frac{\left(1+\frac{1+\varepsilon'}{24n}\right)^2}{\left(1+\frac{1+\varepsilon}{12n}\right)^4}.$$

Rezultă deci :

$$\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}}\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2 = \frac{1}{\pi e}.$$

q. e. d.

S'au primit soluţiuni bune dela D-nii: TILICĂ C. ŞTEFAN (elev ofiţer geniu) şi IONEL I. STAMATE (student Cluj).

PROBLEMA 5098. *In planul axelor de coordonate xOy se consideră punctul* N *şi dreapta* (D); *fie* P *mobil pe* (D); *perpendiculara din* O, *originea axelor, pe* NP *taie paralela din* P *la* Oy *în* M; *locul lui* M *este o iperbolă trecând prin origine.*

Caz particular când (D) *e paralelă cu* Ox.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie analitică dată de D-nii: M. GRUMĂZESCU (S.-lt), PANTELIMON V. CONSTANTIN, ACHILE PETRESCU, MIRCEA D. POPA (lic. militar, Iaşi), MIREL D. STOENESCU (lic. militar M-rea Dealu).

Fie

(D) $y = mx + n$; $N(a, b)$; $P(\lambda, m\lambda + n)$.

Locul lui M se află intersectând dreptele

$$x = \lambda \qquad y = \frac{\lambda - a}{b - \lambda m - n} x$$

de unde se află imediat

$$x^2 + mxy - ax - (b - x)\, y = 0.$$

Locul este deci o iperbolă ce trece prin origine, cu centrul dat de

$$f'_x = 2x + my - a = 0 \qquad f'_y = mx - (b - n) = 0$$

deci $$c\left[\frac{b-n}{m} \ , \ \frac{am - 2(b-n)}{m^2}\right].$$

Paralela din c la Oy şi din N la Ox se taie pe D. Asimptotele iperbolei sunt date în direcţie, de

$$x^2 + mxy = 0 \quad \therefore \quad x(x + my) = 0$$

deci una e paralelă cu Oy şi a doua e perpendiculară pe D.

Când (D) e paralelă cu Ox, ecuaţia se reduce la

$$x^2 - ax - (b - n)\, y = 0$$

adică o parabolă trecând prin origine cu axa $2x = a$.

Observare. Fie încă I un punct în plan; P fiind mobil pe D, este uşor de observat că fascicolele de centre O şi I sunt omografice; în adevăr o rază ce trece prin I taie pe D în P şi raza omoloagă este perpendiculara din O pe NP şi invers; intersecţia M a acestor raze descrie deci o conică ce trece prin O şi I; perpendiculara din O la D şi paralela din I la D se taie în y, alt punct al locului corespunzător lui P la infinit pe D.

Când I este punctul la infinit al axei Oy deci razele IM paralele cu Oy, conica are o direcţie reală la infinit după Oy; deasemenea I ajunge la infinit pe perpendiculara pe D şi corespunde astfel celei de a doua direcţii asimptotice reale; conica este deci o iperbolă.

Când DH Ox, $I \equiv y$ şi conica având o singură direcţie asimptotică este o parabolă cu axa paralelă cu Oy.

A soluţionat problema în acest sens D-l IOAN V. JAREGHIE (liceul militar Iaşi).

PROBLEMA 5112. *Fie* A', B', C' *mijloacele laturilor unui triunghiu oarecare* ABC. *Pe mediatoarele laturilor sale se poartă segmentele* A'M, B'N, C'P *îndreptate către exteriorul (interiorul) triunghiului, respectiv proporţionale cu laturile* BC, CA, AB.

1°. *Să se arate că dreptele* AM, BN, CP *sunt concurente într'un punct* K.

2°. *Să se afle locul lui* K *atunci când factorul de proporţionalitate variază.*

ION STĂNCULESCU.

Soluţia I-a. Conform enunţului avem:

$$\frac{\overline{A'M}}{a} = \frac{\overline{B'N}}{b} = \frac{\overline{C'P}}{c}$$

ceea ce arată că triunghiurile isoscele MBC, NCA, PAB sunt asemenea. Rezultă:

$$\sphericalangle A'BM = \sphericalangle B'CN = \sphericalangle C'AP = \alpha.$$

Să notăm

$$\sphericalangle CAM = \omega_1 \; ; \; \sphericalangle MAB = \omega_1' \; ; \; \sphericalangle ABN = \omega_2 \; , \; \sphericalangle NBC = \omega_2' ;$$

$$\sphericalangle BCP = \omega_3 \; , \; \sphericalangle PCA = \omega_3' .$$

Din triunghiurile AMC şi AMB deducem:

$$\frac{\overline{MC}}{\sin\omega_1} = \frac{\overline{AM}}{\sin(C+\alpha)} \text{ şi } \frac{\overline{MB}}{\sin\omega_1'} = \frac{\overline{AM}}{\sin(B+\alpha)}.$$

Impărţind relaţiile şi ţinând seama că $\overline{MB} = \overline{MC}$ găsim:

$$\frac{\sin\omega_1}{\sin\omega_1'} = \frac{\sin(C+\alpha)}{\sin(B+\alpha)}.$$

In mod analog:

$$\frac{\sin\omega_2}{\sin\omega_2'} = \frac{\sin(B+\alpha)}{\sin(A+\alpha)} \text{ şi } \frac{\sin\omega_3}{\sin\omega_3'} = \frac{\sin(A+\alpha)}{\sin(C+\alpha)}.$$

Inmulţind aceste trei relaţii găsim:

$$\frac{\sin\omega_1}{\sin\omega_1'} \times \frac{\sin\omega_2}{\sin\omega_2'} \times \frac{\sin\omega_3}{\sin\omega_3'} = 1$$

adică relaţia trigonometrică a lui CEVA, care ne arată că AM, BN, CP sunt concurente.

Observare. In geometria triunghiului 5.30 se stabileşte următoarea proprietate: „Pe laturile unui triunghiu se construesc în exterior sau interior trei triunghiuri isoscele asemenea. Triunghiul format de vârfurile acestor triunghiuri este omologic cu triunghiu de referinţă". In cazul nostru MNP este omologic cu ABC deci AM, BN, CP *sunt concurente.*

Un caz particular este când M, N, P formează primul triunghiu al lui BROCARD (Geom. tr. 8.3). La 8.5 se arată că AM, BN, CP concură în izotomicul punctului simedian K.

2°. In F. G. M. 1773, pag. 863 găsim că locul lui K este *hiperbola lui* KIEPERT, căreia aparţin: cele 2 centre isogoane, M, M' ($\alpha = \pm 60^0$) ortocentrul H ($\alpha = 90^0$) centrul de greutate G ($\alpha = 0$) şi izotomicul punctului simedian ($\alpha = \omega$, unghiul lui BROCARD).

— K a fost găsit de VECTEN pentru $\alpha = 45^0$ când triunghiurile erau şi dreptunghice.

CONSTANTIN V. PANTELIMON
Clasa 8-a
Liceul Militar Iaşi.

Soluţia II-a analitică. 1°. Luând ca axe latura BC şi mediatoarea MA' avem ecuaţiile dreptelor (h este înălţimea vârfului A, iar λ coeficientul de proporţionalitate):

$$(AM)\quad (h+\lambda a)\,x-\left(\frac{a}{2}-b\cos C\right)y-\lambda a\left(\frac{a}{2}-b\cos C\right)=0$$

$$(BN)\quad \left(\frac{h}{2}+b\lambda\cos C\right)x-\left(\frac{a+c\cos B}{2}+\lambda h\right)y+\frac{a}{2}\left(\frac{h}{2}+\lambda b\cos C\right)=0$$

$$(CP)\quad \left(\frac{h}{2}+\lambda c\cos B\right)x+\left(\frac{a+b\cos C}{2}+\lambda h\right)y-\frac{a}{2}\left(\frac{h}{2}+\lambda c\cos B\right)=0.$$

Adunând ultimele două ecuaţii găsim pe prima, deci cele trei drepte sunt concurente.

2°. Eliminând pe λ găsim ecuaţia locului geometric:

$$h(x^2-y^2)+2a\,\frac{bc\cos(B-C)-a^2}{b^2-c^2}\,xy+a^2y-\frac{a^2h}{4}=0$$

iperbola echilateră circumscrisă, ce trece prin centrul de greutate.

S'a primit o bună soluţie analitică dela D-l S-LT. GRIG. MARTEŞ.

Observare. Generalizarea acestei probleme, care e de felul problemei lui KARIYA, am dat-o în articolul „O problemă de geometrie a triunghiului" din care o parte a apărut în numărul trecut, iar sfârşitul în acest număr al G. M.

G. D. S.

PROBLEMA 5135. *Care este numărul numerilor prime cu 1939, suma şi produsul lor, din şirul natural al primelor 100 numere?*

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

Soluţia I-a dată de D-nii: P. P. DRĂGHICESCU, C. PANTELIMON, A. N. POPA, AL. I. ROHR şi S. R. TURCU (Lic. Militar Iaşi).

Avem: $1939 = 7.277$, prin urmare numerile neprime cu 1939 din şirul natural al primelor 100 numere, sunt acele divizibile cu 7, adică:

1, **7**, 14, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98.

Avem deci 14 numere, atunci numărul numerelor prime cu 1939, va fi:

$$100 - 14 = 86.$$

Suma acestor numere este:

$$(1+2+3+\ldots+100) - 7(1+2+3+\ldots+14)$$
$$= 5050 - 735 = 4315.$$

Produsul lor va fi:

$$\frac{1.2.3\ldots100}{1.2.3\ldots14.7^{14}} = \frac{100!}{14!7^{14}}.$$

Soluţia II-a dată de D-l M. AL. VASILESCU-STABU (cl. VII-a R. Lic. Gh. Lazăr, Bucureşti).

Dacă ţinem seamă ca $1939 = 7.277$ şi aplicăm formulele date în G. M. XLI, pag. 278, 279, obţinem:

$$F_{100}(1939) = 100 - \left[\frac{100}{7}\right] = 100 - 14 = 86$$

$$S_{100}(1939) = \frac{1}{2}\,100.101 - \frac{7}{2}\cdot\left[\frac{100}{7}\right]\cdot\left[1+\left[\frac{100}{7}\right]\right]$$
$$= 50.101 + 49.15$$
$$= 5050 - 735 = 4315.$$

Şi:

$$P_{100}(1939) = \frac{100!}{14!\,7^{14}}.$$

Cum avem:

$$100! = 2^{97} \cdot 3^{48} \cdot 5^{24} \cdot 7^{16} \cdot 11^{9} \cdot 13^{7} \cdot 17^{5} \cdot 19^{5} \cdot 23^{4} \cdot 29^{3} \cdot 31^{3}$$
$$37^{2} \cdot 41^{2} \cdot 43^{2} \cdot 47^{2} \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97$$

şi

$$14! = 2^{11} \cdot 3^{5} \cdot 5^{2} \cdot 7^{2} \cdot 11 \cdot 13.$$

Urmează că:

$$P_{100}(1939) = 2^{86} \cdot 3^{43} \cdot 5^{22} \cdot 11^{8} \cdot 13^{6} \cdot 17^{5} \cdot 19^{5} \cdot 23^{4} \cdot 29^{3} \cdot 31^{3}$$
$$37^{2} \cdot 41^{2} \cdot 43^{2} \cdot 47^{2} \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97.$$

Au rezolvat problema, cu mici greşeli de calcul D-nii: D. D. BOIANGIU, E. S. MODÂLCĂ, I. I. STAMATE şi M. F. VĂDUVA.

PROBLEMA 5150. *Să se afle cea mai mică valoare pozitivă a lui* k *astfel ca numărul:*

$$N = 2^{11n+12} + k \cdot 3^{2n+3}$$

să fie M.11, *oricare ar fi* n *pozitiv şi întreg.*

STELIAN CETĂŢEANU.

Soluţie dată de D-nii: D. D. BOIANGIU (cl. VIII-a Lic. Traian, T. Severin), AL. G. JILETCOVICI, C. PANTELIMON, A. N. POPA, M. D. POPA, AL. I. ROHR (Lic. militar Iaşi), ŞTEFAN C. TILICĂ (Şc. Of. Geniu), şi H. L. REISCHER (Iaşi).

Numărul dat se poate scrie succesiv, în raport de 11:

$$N = 4096 \cdot 2048^{n} + 27 \cdot 9^{n} \cdot k$$
$$= (M11 + 4)(M11 + 2)^{n} + (M11 + 5)(M11 - 2^{n}) \cdot k$$
$$= 4 \cdot 2^{n} + 5 \cdot (-2)^{n} \cdot k$$
$$= 2^{n} \cdot [4 \pm 5 \cdot k].$$

Unde semnul (+) corespunde lui n soţ şi (—) lui n nesoţ. Prin urmare va trebui să avem:

$$4 \pm 5 \cdot k = M11.$$

De aci rezultă că trebue să avem:

$k = 3$ când n este nesoț

$k = 8$ când n este soț.

Notă. D-l A. O. ȘAICHIN a rezolvat problema pe o cale mai lungă. D-nii M. AL. VASILESCU-ȘTABU și C. N. PARAIPAN au dat o soluție fracționară lui k, însă greșită.

Soluția fracționară a lui k este $\left(\frac{4}{5}\right)$ și în acest caz:

$$N = 2^{11n+12} + \frac{4}{5} \cdot 3^{2n+3}.$$

I. L.

PROBLEMA 5218. *Să se determine natura seriei cu termeni pozitivi, definiți de relația de recurență:*

$$\frac{2}{u_n} = \frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_{n-1}}$$

unde u_n este termenul general, u_0 și u_1 fiind numere date.

I. I. ȚIȚEICA.

Soluție dată de D-nii: D-TRU RIPIANU, C. D. EFTIMIE (Elev-inginer București), TEODOR ȘERBAN (Elev-inginer București), PANTELIMON V. CONSTANTIN, MIRCEA D. POPA (lic. militar Iași) și GHEORGHE D. SBÂRNEA (lic. Tecuci).

Din relația de recurență dată se deduce:

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n-2}} - \frac{1}{u_{n-1}} = \ldots = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1}.$$

Deci:

$$\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1}$$

$$\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1}$$

$$\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_0}.$$

Adunând parte cu parte obţinem:

$$\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_n}=n\left(\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_1}\right) \quad \therefore \quad u_n=\frac{u_0 u_1}{n(u_0-u_1)+u_1}.$$

Avem posibilităţile:

a) $u_0 \neq u_1$, când *se citeşte direct* că seria e de aceeaşi natură cu seria armonică, *deci divergentă;*

b) $u_0 = u_1$, când toţi termenii devin egali cu u_0, deci seria este *divergentă.*

Seria este deci, în orice caz, divergentă.

Observaţiuni. 1°. Se ştie că trei termeni consecutivi ai seriei armonice satisfac relaţia din enunţul problemei, adică sunt în progresie armonică, de unde şi numele seriei.

Problema de faţă e o reciprocă, arătând că orice serie care are trei termeni oarecare în progresie armonică, este divergentă.

2°. Pentru ca seria să fie cu termeni pozitivi e neapărat nevoe ca $u_0 > u_1$. Dar chiar dacă $u_0 < u_1$, seria e tot divergentă, căci dela un anumit rang $\left(n > \frac{u_1}{u_1-u_0}\right)$ toţi termenii devin negativi, deci se pot aplica criteriile dela seriile cu termeni pozitivi.

3°. Rezolvitorii problemei au demonstrat riguros că seria e divergentă folosind criteriul lui RAABE-DUHAMEL, sau făcând raportul între termenul general al seriei date şi termenul general, al *seriei armonice.*

Ţin să atrag atenţie că cel mai simplu criteriu de aplicat în acest caz e cel al *comparaţiei*, luând ca serie de comparaţie $v_n = \frac{u_1}{n}$ evident divergentă

In adevăr avem:

$$u_n=\frac{u_0 u_1}{nu_0-(n-1)u_1} > v_n=\frac{u_0 u_1}{u_0 n} \text{ pentru } n>1.$$

4°. S'au primit şi două soluţii eronate.

G. D. S.

PROBLEMA 5280. *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$x+y+z=3A$$

$$x\cos\theta_1+y\cos\theta_2+z\cos\theta_3=\frac{3}{2}B$$

$$x\sin\theta_1+y\sin\theta_2+z\sin\theta_3=\frac{3}{2}C$$

ştiind că $\theta_2=\theta_1+\frac{2\pi}{3}$ şi $\theta_3=\theta_1+\frac{4\pi}{3}$.

I. S. ANTONIU.

Soluție. Inmulțind prima ecuație cu $\cos\theta_3$ și scăzând-o din a doua, apoi înmulțind prima ecuație cu $\sin\theta_3$ și scăzând-o din a treia, obținem sistemul

$$\begin{aligned} x(\cos\theta_1 - \cos\theta_3) + y(\cos\theta_2 - \cos\theta_3) &= \frac{3}{2}B - 3A\cos\theta_3 \\ x(\sin\theta_1 - \sin\theta_3) + y(\sin\theta_2 - \sin\theta_3) &= \frac{3}{2}C - 3A\sin\theta_3 \end{aligned} \tag{1}$$

ținând seama de relația ce există între unghiuri, putem scrie imediat

$$\cos\theta_1 - \cos\theta_3 = 2\sin\frac{\theta_3+\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2} = \sqrt{3}\sin\theta_2$$

$$\cos\theta_2 - \cos\theta_3 = 2\sin\frac{\theta_3+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_2}{2} = -\sqrt{3}\sin\theta_1$$

$$\sin\theta_1 - \sin\theta_3 = 2\sin\frac{\theta_1-\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2} = -\sqrt{3}\cos\theta_2$$

$$\sin\theta_2 - \sin\theta_3 = 2\sin\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2} = \sqrt{3}\cos\theta_1,$$

astfel că sistemul (1) devine

$$\begin{aligned} x\sqrt{3}\sin\theta_2 - y\sqrt{3}\sin\theta_1 &= \frac{3}{2}B - 3A\cos\theta_3 \\ -x\sqrt{3}\cos\theta_2 + y\sqrt{3}\cos\theta_1 &= \frac{3}{2}C - 3A\sin\theta_3 \end{aligned} \tag{2}$$

înmulțind acum prima ecuație a sistemului (2) cu $\cos\theta_1$ și pe a doua cu $\sin\theta_1$ și adunându-le obținem

$$x\sqrt{3}\sin(\theta_2-\theta_1) = \frac{3}{2}B\cos\theta_1 + \frac{3}{2}C\sin\theta_1 - 3A\cos(\theta_1-\theta_3); \tag{3}$$

dar

$$\sin(\theta_2-\theta_1) = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\theta_1-\theta_3) = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

astfel că obținem

$$x = A + B\cos\theta_1 + C\sin\theta_1. \tag{4}$$

Dacă acum, în sistemul (2), înmulțim prima ecuație cu $\cos\theta_2$ și pe a doua cu $\sin\theta_2$ și le adunăm, eliminăm pe x. Prin calcule analoage obținem

$$y = A + B\cos\theta_2 + C\sin\theta_2 . \qquad (5)$$

Inlocuind în prima ecuație a sistemului dat, valorile lui x și y obținute, avem

$$z = 3A - x - y = A - B(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) - C(\sin\theta_1 + \sin\theta_2),$$

de unde, făcând parantezele calculabile prin logaritmi și ținând seama de relațiile date dintre unghiuri, obținem

$$z = A + B\cos\theta_3 + C\sin\theta_3 . \qquad (6)$$

Relațiile (4), (5) și (6) sunt rădăcinile sistemului dat.

Observațiuni. 1°. A rezolvat problema ca mai sus D-l GH. BOGDAN, elev în cl. VI-a, Liceul Militar Iași.

2°. D-nii AUREL N. POPA și ZAMFIR C. IVAN (cl. VI-a Liceul Militar Iași) au rezolvat problema ca mai sus, însă soluția D-lor este foarte „simplistă" : nu ne arată cum au obținut celelalte două rădăcini.

3°. D-nii P. DRĂGHICESCU și TRAIAN ILIESCU (Liceul Militar Iași), au rezolvat problema aplicând regula lui CRAMMER.

4°. Soluții „identice" și „identic" greșite au trimis D-nii : CONSTANTIN PANTELIMON și MIRCEA D. POPA, elevi în clasa VIII-a a Liceului Militar Iași.

5°. S'a mai primit o soluție și dela D-l MIRCEA L. RUSSU, student Cluj.

6°. Acest sistem de ecuații apare în electrotechnică atunci când voim a calcula, într'un sistem desechilibrat, componentele echilibrate (directă, inversă și homopolară).

I. S. A.

PROBLEMA 5329. *Să se rezolve ecuația :*

$$2\cos 2x + \cos 6x = 0.$$

G-L GH. BUICLIU.

Soluție dată de D-nii : I. A. BADEA (Lic. „A. Șaguna" Brașov), și C. GH. CRUCERU (lic. „Traian" Turnu-Severin).

Ecuația dată se mai scrie

$$\cos 2x + \cos 6x + \cos 2x = 0$$

care, transformând suma primilor 2 termeni în produs, devine

$$\cos 2x\,(1 + 2\cos 4x) = 0$$

de unde rezultă că rădăcinile ecuației date sunt aceleași cu ale ecuațiilor

$$\cos 2x = 0 \quad \therefore \quad 2x_1 = \left(2k \pm \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$1 + 2\cos 4x = 0 \quad \therefore \quad 2x_2 = \left(k \pm \frac{1}{3}\right)\pi.$$

1°. Au rezolvat problema pe această cale, fără însă a găsi formele generale exacte ale soluțiilor D-nii: P. P. DRĂGHICESCU (Lic. militar, Iași); M. D. STOENESCU (Școala ofițeri de aviație, București), C. BAKONYI (Liceul „Diaconovici Loga", Timișoara), GH. GH. BOGDAN (Liceul militar, Iași).

2°. Punând pe $\cos 6x$ în funcție de $\cos 2x$ ecuația din enunț se transformă în ecuațiile

$$\cos 2x\,(4\cos^2 2x - 1) = 0$$

a căror rezolvare este imediată. Au urmat această cale, fără însă a găsi exact toate formele generale ale soluțiilor D-nii: H. M. BODNĂRESCU, C. D. EFTIMIE (Elevi ingineri, București); E. G. FILA (Student, Cluj); FL. N. IORGULESCU, IUL. PETRESCU, N. E. MOSCOVICI (Lic. „Gh. Lazăr", București); M. V. ALDEA (Buzău); M. F. VĂDUVA (Bacalaureat, Giurgiu); I. N. GLIGOR (Lic. „Moise Nicoară", Arad); GH. D. SBÂRNEA (Bacalaureat, Tecuciu); AL. I. ROHR (Șc. Ofițeri de Geniu, București); M. S. ROSENZWEIG (Absolvent lic. „Meșotă", Brașov); M. D. POPA (Lic. militar, Iași); D. D. BOIANGIU (Lic. „Traian", T. Severin); OCT. E. GHEORGHIU (Liceul Tulcea), S. LEIBOVICI (Bacalaureat, București); M. C. NICULESCU (Lic. „T. Maiorescu", București), TREFILOV I. M.; P. C. CONSTANTIN (Șc. Of. A. c. A. București), GH. D. VOICU (Șc. Of. Aviație), I. S. ANDONIE (Colegiul Național „Sf. Sava", București) și E. S. MODÂLCĂ (student, București).

3°. Soluții parțiale, prin calcule mai greoaie au dat D-nii: E. M. ȘENCHI și M. I. ȘTEFANOVICI,

4°. D-nii P. P. DRĂGHICESCU și M. D. STOENESCU au înlocuit, în soluția D-lor, pe x prin nx. Aceasta însă nu constitue o generalizare.

5°. D-l C. C. MIHĂILESCU (bacalaureat, Câmpina) a stabilit ecuația în $\cos x$, găsind soluțiile exacte.

EXERCIȚII

7. Dacă $a + b + c = 0$ avem și

$$\sum (na + b + c)(a + nb + c) = (n-1)^2 \sum ab.$$

PETRU SIMON.

R. Avem: $\sum (na + b + c)(a + nb + c)$

$= \sum [(a + b + c) + (n-1)a][(a + b + c) + (n-1)b]$

$= \sum [(n-1)a][(n-1)b] = (n-1)^2 \sum ab.$

Pentru $n = 3$, găsim

$$\sum (-a + b + c)(a - b + c) = 4 \sum ab.$$

8. Un patrat ABCD de mărime variabilă are vârful A fix, iar B descrie o dreaptă Δ. Să se afle locurile geometrice ale vârfurilor C şi D.

CONST. ŞEIBULESCU.

R. 1. Fie O proiecţia lui A pe Δ şi E centrul patratului. Patrulaterul AOBE cu unghiurile O şi E drepte este inscriptibil; deci

$$\sphericalangle AOE = \sphericalangle ABE = 45^0$$

deci E descrie bisectoarea Δ' a unghiului (AO, Δ), iar C, simetricul lui A faţă de E va descrie omotetica (A, 2) a dreptei Δ'', deci *o dreaptă paralelă cu bisectoarea, dusă prin simetricul lui* A *faţă de* O.

2. Fie F proiecţia lui D pe OA. Triunghiurile dreptunghice AOB şi AFD cu laturile perpendiculare, având şi AB = AD sunt egale, deci DE = OA = constant. *Deci* D *descrie o paralelă la* OA *la distanţa* OA.

Observare. Patratul trebue construit totdeauna de o aceeaşi parte a laturii AB, indiferent care.

9. Să se arate că într'un triunghiu oarecare

$$\Sigma \frac{\cos A}{\cos B \cos C} = \Sigma \operatorname{tg} A \frac{\sin A}{\sin B \cdot \sin C}.$$

C. D. EFTIMIE.

R.
$$\Sigma \operatorname{tg} A \frac{\sin A}{\sin B \sin C} = \Sigma \operatorname{tg} A \frac{\sin (B + C)}{\sin B \sin C} =$$

$$\Sigma \operatorname{tg} A (\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C) = \Sigma \operatorname{cotg} A (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) =$$

$$\Sigma \operatorname{cotg} A \frac{\sin (B + C)}{\cos B \cos C} = \Sigma \frac{\cos A}{\sin A} \frac{\sin A}{\cos B \cos C} = \Sigma \frac{\cos A}{\cos B \cos C}.$$

PROBLEME PROPUSE

5407. Există patrate de forma *aabbcc*?

I. IONESCU.

5408. Să se găsească un număr întreg astfel ca puterea a şeasea a lui să se descompună în trei moduri într'o sumă de două patrate.

M. GHERMĂNESCU.

5409. Dacă $I_m(n)$, $S_m(n)$, $P_m(n)$ reprezintă respectiv: numărul numerelor prime cu n din şirul natural al primelor m numere, suma şi produsul lor, atunci să se arate că avem:

$$I_{50}(30) - I_{20}(30) = 8 \quad ; \quad S_{50}(30) - S_{20}(30) = 120;$$

$$P_{50}(30)/P_{20}(30) = 215656441.$$

CĂP. C-DOR I. LINTEŞ.

5410. Să se rezolve sistemul

$$2(ax + by + cz) = a^2 + b^2 + c^2$$

$$4(xy + yz + zx) = ab + bc + ca$$

$$xyz = (a-x)(b-y)(c-z).$$

LOCOT. C. IONESCU-ŢIU.

5411. Se cunoaşte identitatea:

$$(a+c)(a+d)(a+e)(a+f) = (b+c)(b+d)(b+e)(b+f),$$

când:

$$a + b + c + d + e + f = 0$$

şi

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3 = 0.$$

(TR. LALESCU).

— Să se generalizeze.

OTILIA GEORGESCU ROEGEN.

5412. Să se studieze variaţia funcţiei:

$$y = \frac{2a(1-a)x(1-x)}{a(1-x^2) + (1-a)^2 x},$$

unde a este un parametru oarecare.

D. V. IONESCU.

5413. Sunt date în plan trei cercuri (A), (B), (C); perechile (A), (B); (B), (C); (C), (A) fiind tangente exterior respectiv în D, E, F. Fie $\overline{MN}$ tangenta comună exterioară cercurilor (A), (B), care nu taie cercul (C); $\overline{PQ}$ şi $\overline{RS}$ tangentele analoage la perechile (B), (C) şi (C), (A). Să se arate că, cercul DEF este tangent celor trei cercuri descrise pe $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$ ca diametre.

O. N. ŢINO.

5414. Fie A′, B′, C′ picioarele înălțimilor triunghiului ABC; M mijlocul lui $\overline{BB'}$; N intersecția lui BC cu AM. Paralela din N la AB întâlnește pe BB′ în Q, iar AQ întâlnește pe BC în P_a și paralela din Q la BC întâlnește pe AC în Q′. Să se arate că:

1°. $$\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}}{\overline{AH}\cdot\overline{BH}\cdot\overline{CH}} = \frac{\overline{AB'}\cdot\overline{BC'}\cdot\overline{CA'}}{\overline{A'H}\cdot\overline{B'H}\cdot\overline{C'H}},$$

H fiind ortocentrul triunghiului ABC;

2°. Punctele A, B′, Q′, C formează o diviziune armonică;

3°. $$2\overline{Q'C}\cdot\overline{B'A} = \overline{Q'A}\cdot\overline{B'C};$$

4°. Punctele: P_a și analoagele lui P_b, P_c sunt colineare.

D. D. BUZNEA.

5415. Să se arate că inegalitatea:

$$\frac{1}{2}(a^8+b^8+c^8) < b^4c^4+c^4a^4+a^4b^4$$

exprimă condițiunea necesară și suficientă ca toate unghiurile unui triunghiu să fie mai mici decât 90°.

ȘERBAN GHEORGHIU.

5416. Pe o dreaptă xx' se dă un punct fix F și două puncte mobile A și B. Se construește triunghiul isoscel ABC, dreptunghic în A, așa în cât

$$\overline{AF}+\overline{AC} = \text{C}^{\text{te}}.$$

Fie M intersecția lui CF în cercul ce trece prin F și este tangent în B la CB. Să se demonstreze că dreapta MB trece printr'un punct fix când A și B se mișcă pe xx'.

G-L GH. BUICLIU.

5417. Se consideră conica cu un focar $F(\frac{1}{2}p, o)$, directoarea corespunzătoare D $(x = -\frac{1}{2}p)$ și de excentricitate e.

Dacă M este un punct arbitrar în planul conicei și perpendiculara din M pe polara lui taie axa focală în N, avem

$$\overline{ON} - e^2\cdot\overline{OP} = \text{const.} = \tfrac{1}{2}p(e+1).$$

Să se deducă o proprietate a parabolei.

N. N. MIHĂILEANU.

5418. Dacă într'un triunghiu oarecare se unesc punctele de tangenţă ale laturilor cu cercul înscris se formează patru triunghiuri. Să se demonstreze că suma razelor cercurilor înscrise în aceste triunghiuri este egală cu diametrul cercului înscris în triunghiul de referinţă.

S-LT. M. GRUMĂZESCU.

5419. Să se discute sistemul

$$\sin x \sin y = a\,(\sin x + \sin y)$$

$$\sin^3 x + \sin^3 y = \lambda$$

unde a este o constantă pozitivă, iar λ un parametru.

In cazul particular $\lambda = -4a^3$, se va rezolva complect sistemul şi se va discuta realitatea rădăcinilor.

LT. ION C. SAVIN.

5420. Să se arate că familia de cercuri:

$$x^2 + (y - \lambda)^2 - 4\lambda = 0,$$

unde λ este un parametru şi familia de drepte:

$$y = \lambda x - (\lambda^2 + 1),$$

admit aceeaşi înfăşurătoare.

2°. Să se determine, pentru care valori ale lui λ cercurile îşi ating înfăşurătoarea în puncte reale şi să se arate proprietăţile cercului pentru λ are cea mai mică dintre valorile găsite ale lui λ.

3°. Ce relaţie există între valoarea parametrului λ_1 al unui cerc din familia dată şi valoarea λ_2 al unei drepte din familia de drepte date, tangentă la acest cerc?

GABRIELA ŢIŢEICA.

5421. Să se determine polinoamele $P(x, y)$, de două variabile reale x, y, care verifică ecuaţia funcţională

$$P\left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0,$$

$\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ fiind derivatele parţiale ale lui $P(x, y)$ în raport cu x şi y.

Să se generalizeze pentru polinoamele de m variabile.

TIBERIU POPOVICIU.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Andonie St. Iancu (5324, 29); *Bădulescu P. N.* (5369); *Bârlea-Suhăţeanu V.* (5047, 390); *Bodnărescu M. Horia* (5353); *Bogdan Gr. Gh.* (5150, 323, 29, 48); *Costăchescu V. C.* (P); *Cruceru Gh. C.* (4452, 5390); *Drăghicescu P. Paul* (4982, 84, 5003, 12, 13, 24, 108, 237, 319, 21, 23, 25, 37, 53); *Eftimie D. C.* (4452, 5102, 86, 237, 39, 58, 68, 96, 323, 30, 31); *Gheorghiu E. O.* (3965, 5356, 69); *Gligor N. I.* (4452, 5390); *Iacomi D. M.* (5323); *Iorgulescu Fl.* (5369); *Mănescu G. I.* (5369); *Manoliu V.* (5150); *Mihail I. Gh.* (4452, 5364, 69); *Modâlcă S. Emil* (4663, 5264, 329, 30); *Moscovici S. E.* (4452); *Negrescu C. I.* (5390); *Pintilie I. I.* (5352); *Popa N. Aurel* (5003, 24, 156, 318, 53); *Popescu C. I.* (4452, 5369); *Popescu Gh. M.* (5369); *Rohr I. Alex.* (5338); *Romanescu C.* (5250); *Segal Joe* (4452, 5236); *Stănculescu Mircea* (5307, 21, 30); *Ştefanovici I. M.* (4452, 5390); *Stoenescu D. Mirel* (5113); *Tudoran M. Lidia* (5378); *Văduva F. Marin* (5294, 343, 78).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 67.095

M2537

Biblioteca „ASTRA"
SIBIU

O - MAR. 2014

22

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVI

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1941

SUMARUL

1. Algebra ornamentală (urmare şi sfârşit) . . . . . *I. Ionescu.*
2. Aplicaţiuni ale calculului vectorial. *D. V. Ionescu.*
3. Asupra problemei 4385 . . . . . *Tiberiu Popoviciu.*
4. O construcţie a centrelor de curbură la unele curbe plane . . . . . *Cpt. Mihail I. Focşeneanu.*
5. Extindere analitică a tangentei la o curbă . . . . . *C. Ionescu-Bujor.*
6. Note Matematice: 19 — 22.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 298.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 3705, 4652, 4738, 4846, 5039, 5118, 5237, 5260, 5270.
11. Exerciţii: 10 — 11.
12. Probleme propuse: 5422 — 5436.

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASTRA"
SIBIU

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1941

74315

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **D. Stoica**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1940 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: **53**64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 400, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLVI. Nr. 5 *SUPLIMENT* IANUARIE 1941

RECREAȚIUNI

1. **Numărare cu tact.** Se spune cu voce tare în mod continuu și uniform, chiar cu iuțeală, cuvintele.

O dată una-i una, una, una. O dată una-i una, una, una, O dată una-i una, una, una. Și cu una-i treizeci și una.

La fiecare silabă se trage pe hârtie o liniuță verticală. Cu puțină obișnuință se ajunge ca o dată cu terminarea pronunțării cuvântului 31 să se tragă a 31-a liniuță.

I. I.

*

2. **Cifre călămară.** In *« Migdale Amare »* de TOPÂRCEANU, la pag. 9 găsim :

« Și toate cifrele arabe stau dela 1 pân la 9 Mestecate și stupide în călămară asta nouă.

I. BOIAN.

Cifra 0 se vede că nu era la un loc cu celelale cifre ... stupide.

GH. B

*

3. **Aritmetică de zaraf.** Un funcționar dela zărăfie cere sporirea salariului. Atunci zarafful îi notifică în scris următoarea socoteală :

Anul la zărăfie are 360 de zile. D-ta muncești numai 8 ore, adică 1/3 din an, deci 120 de zile. Din acestea scădem Duminicile 52 și rămâne dar 68. Scădem și sărbătorile legale 10 și rămân 58. Sâmbăta după amiază este liberă, adică 26 zile pierdute. Rămân bune de lucru 32. Dar în timpul anului mai ai 14 zile concediu, deci rămân 18. Mai pierzi cu gustarea 1/4 oră pe zi, deci 12 zile și rămân 6 zile.

In aceste 6 zile ori ai fost bolnav, ori ți s'a întâmplat ceva care te-a împiedicat să lucrezi. Atunci pe ce mai ceri sporire de salariu ?

— Bravo Domnule zaraf ! Numai că socoteala D-tale nu se potrivește din fericire cu socoteala Aritmeticii și funcționarul nu se va lăsa sedus de strâmbul D-tale raționament.

AL. D. GHIȚESCU.

*

colecţie de probleme italiene. Două babe merg spre Roma, ıăgari, pe fiecare câte doi saci, în fiecare sac câte două mâţe, ınd doi pisoi. Câte picioare merg la Roma?
ıpt, căci celelalte stau pe măgari.

I. I.

*

ıfre cu chei. In „Scrisori" de GHICA găsim:
ıtutele, scrise în cifre cu chei, erau păstrate de mine în Bibliotecă, ele Algebrei lui BOURDON".

I. BOIAN.

*

6. **Relativitatea valorilor.** In ziarul „*Universul*" din 17/III 1940, D-l MANU publică versurile următoare:

Fiindcă oamenii pe lume, | Sunt ca cifrele... la fel — |
1 pare a fi mai mare | lară 2 mai mititel! | Căci... depinde unde şade... |
ıainte-i pus, sau... după | Cifra'şi capătă valoarea | După locul ce-l ocupă |
Unitate sau zecime, | Sau... sutime... (sau... cum vrei) | Nu există în lume oameni | Deci: nici „mari", nici „mititei", | Totu-i locul ce'l ocupă... | Omu'i cifră la noroc!... | Deci... adio teoria | Cu... deştept şi dobitoc!

P. V. CONSTANTIN.

*

7. **Axioma în proverb.** E cunoscută zicătoarea:
«*Decât un car cu minte, mai bine un dram de noroc*».
Aceasta este evident, căci:
Un dram > Conţinutul unui car, ori cât de mic ar fi carul.

I. N. CONSTANTINESCU.

*

8. **Cu o tăetură de foarfecă să se taie trei bucăţi.** Se ia o bucată de hârtie în formă de potcoavă, se îndoaie după axa ei de simetrie şi se face o tăetură prin aripi.

I. I.

*

9. **Explicaţia paradoxurilor din Suplimentul cu recreaţiuni al Nr. 2 al „Gazetei Matematice" Anul XLVI.** La recreaţia Nr. 6: Triunghiurile BAD şi CAE nu sunt asemenea deoarece raportul al doilea este invers de cum ar trebui pentru asemănare.

La Nr. 12. Rezultatul extragerii rădăcinii patrate trebue luat cu $\pm$. Calculând în primul fel se găseşte $\pm(1)$; în al doilea fel iese ± 1. Deci acelaşi rezultat.

La Nr. 15. Cele două semicercuri luate împreună ne dau cercul, dar pentru a avea ecuaţia cercului întreg nu are raţiune să adunăm cele două ecuaţii parţiale, ci trebue să luăm pur şi simplu $y = \pm(\sqrt{r^2 - x^2})$.

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLVI. Nr. 5 *SUPLIMENT* IANUARIE 1941

RECREAȚIUNI

1. **Numărare cu tact.** Se spune cu voce tare în mod continuu și uniform, chiar cu iuțeală, cuvintele.

O dată una-i una, una, una. O dată una-i una, una, una, O dată una-i una, una, una. Și cu una-i treizeci și una.

La fiecare silabă se trage pe hârtie o liniuță verticală. Cu puțină obișnuință se ajunge ca o dată cu terminarea pronunțării cuvântului 31 să se tragă a 31-a liniuță.

I. I.

*

2. **Cifre călămară.** In *« Migdale Amare »* de TOPÂRCEANU, la pag. 9 găsim :

« Și toate cifrele arabe stau dela 1 pân la 9 Mestecate și stupide în călămară asta nouă.

I. BOIAN.

Cifra 0 se vede că nu era la un loc cu celelale cifre ... stupide.

GH. B

*

3. **Aritmetică de zaraf.** Un funcționar dela zărăfie cere sporirea salariului. Atunci zarafful îi notifică în scris următoarea socoteală :

Anul la zărăfie are 360 de zile. D-ta muncești numai 8 ore, adică 1/3 din an, deci 120 de zile. Din acestea scădem Duminicile 52 și rămâne dar 68. Scădem și sărbătorile legale 10 și rămân 58. Sâmbăta după amiază este liberă, adică 26 zile pierdute. Rămân bune de lucru 32. Dar în timpul anului mai ai 14 zile concediu, deci rămân 18. Mai pierzi cu gustarea 1/4 oră pe zi, deci 12 zile și rămân 6 zile.

In aceste 6 zile ori ai fost bolnav, ori ți s'a întâmplat ceva care te-a împiedicat să lucrezi. Atunci pe ce mai ceri sporire de salariu ?

— Bravo Domnule zaraf ! Numai că socoteala D-tale nu se potrivește din fericire cu socoteala Aritmeticii și funcționarul nu se va lăsa sedus de strâmbul D-tale raționament.

AL. D. GHIȚESCU.

*

4. **Dintr'o colecție de probleme italiene.** Două babe merg spre Roma. Fiecare au doi măgari, pe fiecare câte doi saci, în fiecare sac câte două mâțe, fiecare mâță având doi pisoi. Câte picioare merg la Roma ?

Numai opt, căci celelalte stau pe măgari.

I. I.

*

5. **Cifre cu chei.** In „Scrisori" de GHICA găsim :

„Statutele, scrise în cifre cu chei, erau păstrate de mine în Bibliotecă, în scoarțele Algebrei lui BOURDON".

I. BOIAN.

*

6. **Relativitatea valorilor.** In ziarul „*Universul*" din 17/III 1940, D-l ION MANU publică versurile următoare :

Fiindcă oamenii pe lume, | Sunt ca cifrele... la fel — |
1 pare a fi mai mare | lară 2 mai mititel! | Căci... depinde unde șade... | Inainte-i pus, sau... după | Cifra'și capătă valoarea | După locul ce-l ocupă | Unitate sau zecime, | Sau... sutime... (sau... cum vrei) | Nu există în lume oameni | Deci : nici „mari", nici „mititei", | Totu-i locul ce'l ocupă... | Omu'i cifră la noroc!... | Deci... adio teoria | Cu... deștept și dobitoc!

P. V. CONSTANTIN.

*

7. **Axioma în proverb.** E cunoscută zicătoarea :

« *Decât un car cu minte, mai bine un dram de noroc* ».

Aceasta este evident, căci :

Un dram $>$ Conținutul unui car, ori cât de mic ar fi carul.

I. N. CONSTANTINESCU.

*

8. **Cu o tăietură de foarfecă să se taie trei bucăți.** Se ia o bucată de hârtie în formă de potcoavă, se îndoaie după axa ei de simetrie și se face o tăietură prin aripi.

I. I.

*

9. **Explicația paradoxurilor din Suplimentul cu recreațiuni al Nr. 2 al „Gazetei Matematice" Anul XLVI.** La recreația Nr. 6 : Triunghiurile BAD și CAE nu sunt asemenea deoarece raportul al doilea este invers de cum ar trebui pentru asemănare.

La Nr. 12. Rezultatul extragerii rădăcinii patrate trebue luat cu $\pm$. Calculând în primul fel se găsește $\pm(1)$; în al doilea fel iese ± 1. Deci același rezultat.

La Nr. 15. Cele două semicercuri luate împreună ne dau cercul, dar pentru a avea ecuația cercului întreg nu are rațiune să adunăm cele două ecuații parțiale, ci trebue să luăm pur și simplu $y = \pm(\sqrt{r^2 - x^2})$.

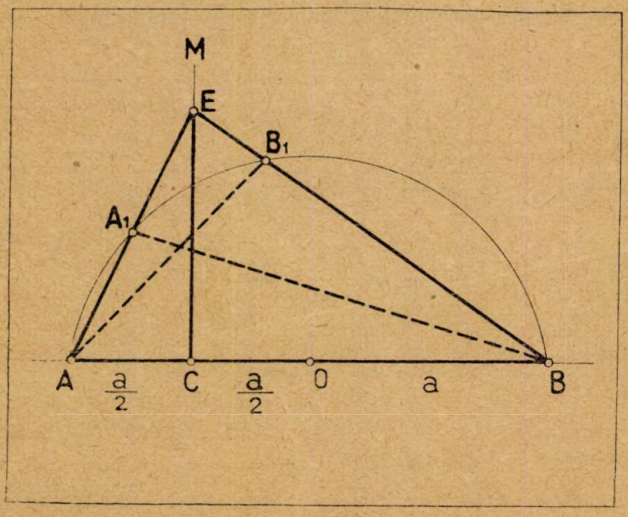
E firesc ca prin adunare să căpătăm $y = 0$ deoarece ordonatele y sunt două câte două egale şi de semne contrare. E firesc deasemenea să căpătăm întreaga axă XX', deoarece r poate varia dela 0 la ∞.

V. Gh.

*

10. Dintr'un punct se pot duce două perpendiculare pe o dreaptă. Fie segmentul de dreaptă AOB, şi $AO = BO = a$. Se duce semicercul cu diametrul AOB. In mijlocul C al lui AO ($AC = CO = \frac{1}{2}a$) se duce perpendiculara MC.

Luăm pe MC un punct E astfel ca $AE = a$. Se uneşte E cu A şi B; se obţin în acest mod punctele A_1, B_1 de intersecţie ale dreptelor EA, EB cu cercul.



Avem respectiv în triunghiurile dreptunghice AEC şi BEC:

$$\overline{CE}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AC}^2 = a^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = 3a^2/4,$$

$$\overline{BE}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{CB}^2 = 3a^2/4 + (3a/2)^2 = 3a^2 \quad ; \quad CB = a + \tfrac{1}{2}a = 3a/2.$$

Rezultă:

$$\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 = \overline{AB}^2.$$

Triunghiul AEB este deci dreptunghic în E. Deci $\sphericalangle AEB = \frac{1}{2}\pi$. Pe de altă parte $\sphericalangle AB_1B = \frac{1}{2}\pi$ şi $\sphericalangle AA_1B = \frac{1}{2}\pi$, fiind înscrise într-un semicerc.

Concluzia. Dreptele AE şi AB_1 sunt amândouă perpendiculare pe BB_1E. Deasemenea dreptele BE şi BA_1 sunt amândouă perpendiculare pe AA_1E.

Alexandru Stoenescu.

*

11. **Rebus algebric.** Ce însemnează:

\+ —

De o parte mai mult, de alta mai puțin.

sau:

Cu stânga aduni și cu dreapta dai.

I. I.

*

12. **2 = — 2.** Să considerăm expresiunea:

$$y = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{16}{x^2}}}$$

în care x este diferit de 0. Înmulțind ambii termeni ai raportului cu x, obținem:

$$\frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{16}{x^2}}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 16}}.$$

Pentru $x = -3$ primul termen al identității devine:

$$\frac{1 - \frac{1}{3}}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}} = + \frac{2}{5},$$

iar al doilea:

$$\frac{-3 + 1}{\sqrt{9 + 16}} = - \frac{2}{5}.$$

Rezultă $2/5 = -2/5$, sau $2 = -2$.

AL. STOENESCU.

*

13. **Cubul cu 8 fețe!** In partea *«Eu, Tina și Adam»* a D-lui T. C. STAN, la pag. 143 găsim:

«Și mereu, mereu o vezi echilibrându-se tot altfel, ca un cub care se rostogolește și poate rămâne stabil pe oricare din cele opt fețe».

T. C. S.

*

14. **O ecuație a lui B. P. Hașdeu.** In *«Cuvinte din Bătrâni»*, găsim:

„C[illegible]s vorbind despre posibilitatea ca o formă gramaticală să modeleze [illegible] sine alte forme gramaticale diferite, zice că asta se întâmplă în două cazuri: sau când o formațiune este foarte numeroasă, pe când celelalte sunt izolate, sau când ea este foarte întrebuințată. Ce însemnează această dilemă". Ea stabilește din punct în punct ecuațiunea pe care o avem noi înșine în vedere și anume: 1 franc cu o activă circulațiune face cât

10 franci circulând fiecare de 10 ori mai puțin. Acțiunea unei formule gramaticale în 50 de exemplare este pentru CURTIUS *de o potrivă cu acțiunea unui singur exemplar circulând de 50 de ori în intervalul când cele 50 de exemplare au circulat numai câte o dată, adică :*

$50(1a + 1b + 1c + \ldots) = 1s \times 50$ ".

D. ILIESCU.

*

15. **Legea fundamentală a elasticității.** ROBERT HOOKE, în cartea sa *De potentia restitutiva*, apărută la Londra în 1678, spune că cu 18 ani înainte a scris despre puterea resoartelor și că cu vre-o doi ani mai înainte a publicat Anagrama :

CEIIINOSSSTTUV

în care a înșirat alfabetic literile legei elasticității găsită de el, pe care a formulat-o astfel în limba latină :

UT TENSIO SIC VIS

« *adică* », zice el « *Puterea oricărui rezort este în aceeași proporție cu tensiunea suportată* ».

S'a căutat mijlocul cel mai simplu de a exprima această lege și s'a dat rebusul :

I. I.

*

16. **Rudenie încurcată !** Extrag următoarea problemă din o *Culegere de probleme curioase* :

PARENTAGE CURIEUX ET AUTHENTIQUE

Un particulier s'est marié, avec la belle-soeur de son père et de sa mère, qui est la tente, attendu qu'elle était marié en premières noces avec le frère de sa mère.

Aujourd'hui il se trouve être la belle-fille de son beau frère sa belle-soeur, met son mari devient le fils et le beau-frère de ses père et mère ; les frères et soeurs du mari deviennent ses neveux et nièces, et comme ils ont des enfants, leurs petits-enfants deviennent petits-neveux et petites-nièces.

Sa femme, qui est sa tante, avait eu deux filles de son premièr mariage, et aujourd'hui se trouvent ses deux belles-filles.

Or, comme il y en a une des deux qui est pour se marier prochainement avec son frère, ce dernier sera la frère, le neveu et gendre de son frère.

Il serait possible que, dans un an au plus, il fût grand père, et à l'âge de trente-deux ans, car il n'est âgé que de trente deux ans, et sa femme en a quarante-deux.

I. I.

*

17. **Citate dela matematiciani.**

1. *Omul este măsura tutulor lucrurilor.* De aci unităţile de măsură pentru lungimi ca *pasul, degetul, cotul, şchioapa. Sistemul zecimal* vine tot dela conformaţia omului.

2. *Amicul care ne ascunde defectele ne slujeşte mai rău decât inamicul care ni le reproşează.*

3. *Este interzis a părăsi postul fără voinţa celui ce comandă; postul omului este viaţa.*

Aceste trei sunt dela PITAGORA.

I. I.

ALGEBRA ORNAMENTALĂ

(Urmare dela pag. 178)

Unele ornamente au mai mult decât două axe de simetrie. Aşa avem *poligoanele regulate convexe: triunghiul echilateral* are trei axe de simetrie după cele trei înălţimi, *patratul* are patru, după diagonale şi liniile mediane, *octogonul* opt, etc. Aceste simetrii se zic *triplă, cuadruplă, multiplă.* O asemenea simetrie multiplă o au şi *poligoanele regulate, stelate* şi *poligoane regulatele încrucişate.*

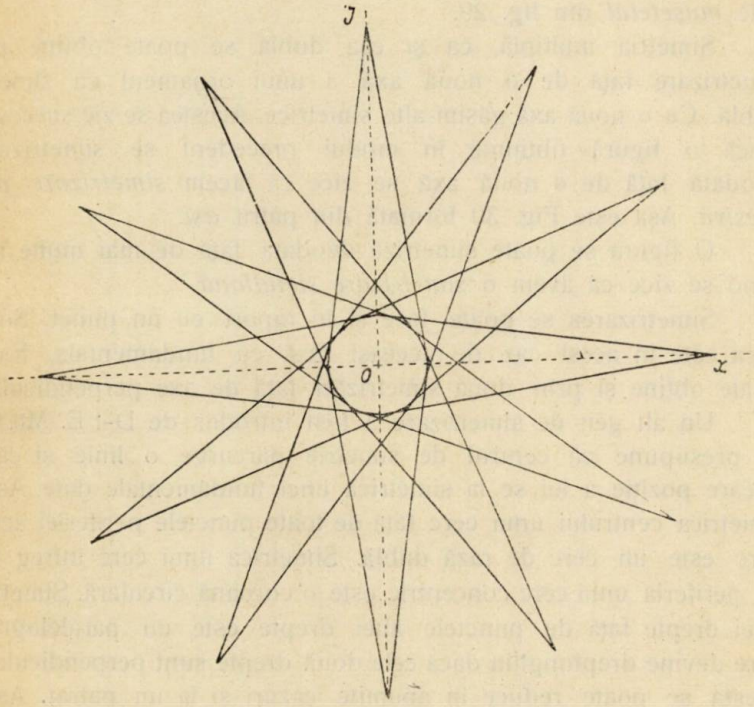


Fig. 25.

Astfel dacă învârtim un triunghiu echilateral cu 180° în jurul centrului lui şi îl punem peste cel primitiv avem două triunghiuri echilaterale încrucişate. De asemenea un patrat rotit cu 45° în jurul centrului peste patratul primitiv.

Simetrie multiplă întâlnim la *stele* (Fig. 25), la *medalii* (Fig. 26), la *cruci* (Fig. 27), având ecuaţia:

$$y = \pm \sqrt{x^2 + h - [1/(a \pm \sqrt{a^2 - x^2})]}.$$

Avem apoi *patru foi* cu *frunze ascuţite* sau *rotunjite* simetrice faţă de bisectoarele axelor; ecuaţia în primul caz este:

$$y = \pm \varepsilon \sqrt{1 - x^2} \pm [(\pm x)^{0{,}25\,(5 \pm 3)}]. \qquad \text{(Fig. 28)}$$

Putem face *roze cu cinci, şase foi* sau chiar mai multe, cum este *muşeţelul* din fig. 29.

Simetria multiplă, ca şi cea dublă se poate obţine prin simetrizare faţă de o nouă axă a unui ornament cu simetrie dublă. Cu o nouă axă găsim alte simetrice. Acestea se zic *succesive.* Dacă o figură obţinută în modul precedent se simetrizează deodată faţă de o nouă axă se zice că facem *simetrizare progresivă.* Aşa este Fig. 30 formată din patru *aşi.*

O figură se poate simetriza deodată faţă de mai multe axe, când se zice că avem o *simetrizare simultană.*

Simetrizarea se poate face şi în raport cu un punct. Simetrica este în acest caz de aceeaşi fază cu fundamentala. Ea se poate obţine şi prin două simetrizări faţă de axe perpendiculare.

Un alt gen de simetrizare a fost introdus de D-l E. MILICK. Se presupune că centrul de simetrie parcurge o linie şi că în fiecare poziţie a lui se ia simetrica unei fundamentale date. Astfel simetrica centrului unui cerc faţă de toate punctele periferiei acelui cerc este un cerc de rază dublă. Simetrica unui cerc întreg faţă de periferia unui cerc concentric este o coroană circulară. Simetrica unei drepte faţă de punctele altei drepte este un paralelogram, care devine dreptunghiu dacă cele două drepte sunt perpendiculare; acesta se poate reduce în anumite cazuri şi la un patrat. Astfel simetrica liniuţelor din Fig. 31 este cadrul pătrăţelelor dela şah. Simetrica unui triunghiu faţă de un triunghiu (Fig. 32) este un triunghiu. Simetrica unei drepte faţă de un cerc cu centrul pe perpendiculara dusă pe mijlocul dreptei este un dreptunghiu având capetele racordate cu câte un semicerc (Fig. 33) dând figura unei pile de pod. Simetrica unui cerc plin faţă de un cerc plin concentric

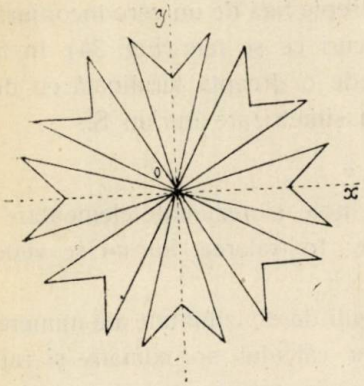


Fig. 26.

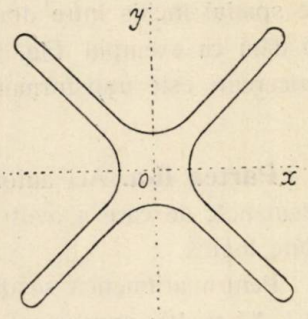


Fig. 27.

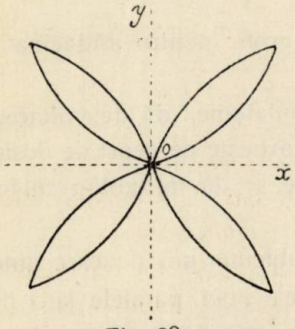


Fig. 28.

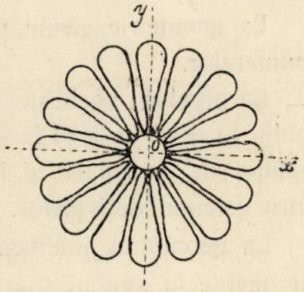


Fig. 29.

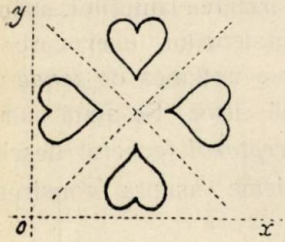


Fig. 30.

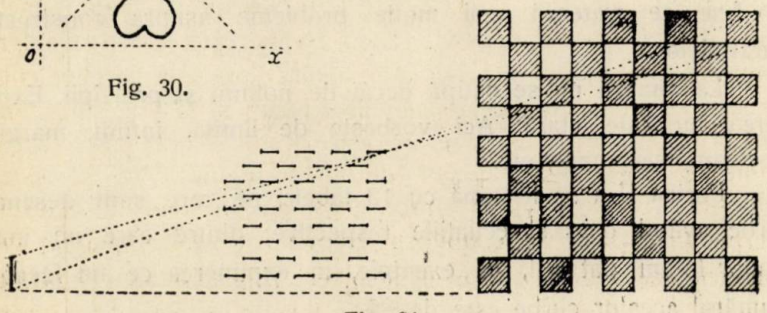


Fig. 31.

este un cerc plin. Simetrica unei drepte față de un cerc înconjurător este spațiul închis între două cercuri ce se taie (Fig. 34). In fine, mai dăm ca exemplu Fig. 35 unde o dreaptă terminată cu două semicercuri este transformată prin simetrizare într'un S.

* * *

Partea II-a. Aci autorul dă note și rezumate elementare de matematică, de care a avut nevoie. In tratarea lor nu se vede o ordine logică.

Pentru aritmetică se dau reguli de divizibilitate ale numerelor 7, 13, 17 și 19; apoi reguli pentru calculul aproximativ și rapid, operațiunile prescurtate, și aflarea, prin calcule mai simple și mai simetrice, a patratelor și a cuburilor.

La geometrie găsim un calcul grafic pentru rădăcina cubică a numerelor.

La algebră vorbește de interpolațiune, dă desvoltarea produsului $(x+a)\,(x+b)\,(x+c)$; se vorbește pe scurt de deslegarea ecuațiilor de gradul III și IV. La fine se dă un tablou cu formule pentru calculul derivatelor.

La geometria analitică sunt probleme noi de care autorul a avut nevoie în studiul său, ca ducerea unei paralele la o dreaptă dată la distanță anumită, găsirea simetricelor curbelor în raport cu o axă, translația și rotația curbelor, formarea lanțurilor, stâlpilor și grupărilor de curbe, construcția omoteticilor unei curbe în anumite condițiuni, etc. Se introduce apoi noțiunea de *sondă* care este porțiunea unei ordonate între două curbe. Se arată cum se pot trasa parabolele și iperbole cu *dreptarul* (echerul deschis). In fine se tratează mai multe probleme asupra construcției parabolelor.

La analiză nu se ocupă decât de noțiuni și principii. Expunerea nu este clară. Aci vorbește de limită, infinit, margini, ne-neant, ne-număr, etc.

Partea II-a se termină cu 13 tabele pe care sunt desenate curbe având date și ecuațiile respective, dintre care un mare număr le-am dat aci, ca exemple, în expunerea ce am făcut-o. Numărul acestor curbe este de 89.

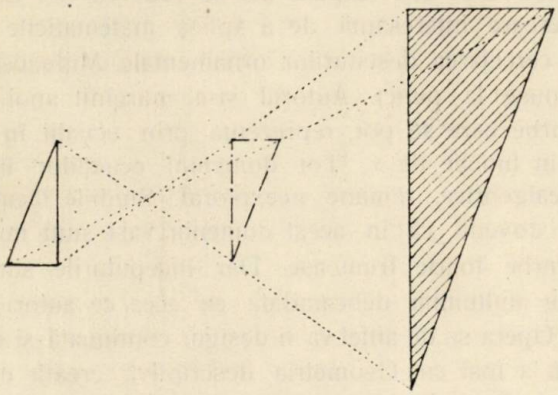


Fig. 32.

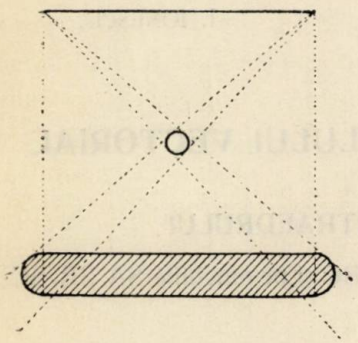


Fig. 33.

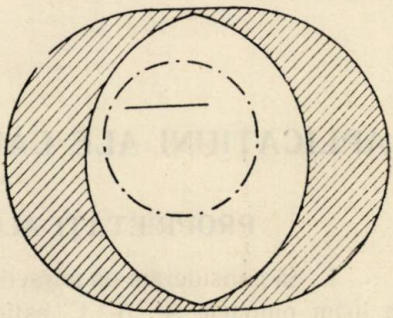


Fig. 34.

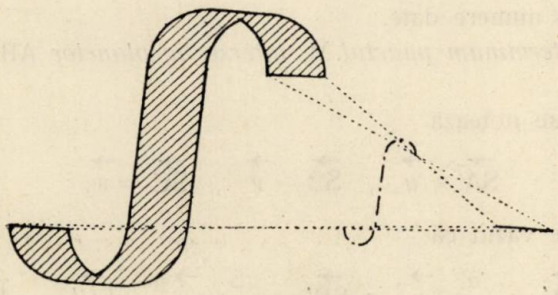


Fig. 35.

Incheere. Din cele expuse aci se vede că D-l E. MILICK a făcut o încercare interesantă de a aplica matematicile la reprezentarea şi cercetarea desenurilor ornamentale. Mijloacele nu sunt încă bine puse la punct. Autorul şi-a mărginit apoi cercetările numai la curbe care se pot reprezenta prin ecuaţii în care y se dă explicit în funcţie de x. Tot domeniul ecuaţiilor implicite, al ecuaţiilor nealgebrice, rămâne neexplorat. Studiile făcute până în prezent au dovedit că în acest domeniu vast sunt multe ecuaţii ce duc la curbe foarte frumoase. Dar începuturile sunt grele şi trebue să ne mulţumim deocamdată cu ceea ce autorul ne-a dat până acum. Opera sa de altfel va fi desigur continuată şi completată de alţii, cum a fost cu Geometria descriptivă creată de MONGE.

Lucrarea D-lui E. MILICK este interesantă, ea merită să i se dea atenţiune de către matematicieni, ingineri şi architecţi cu oarecare cultură matematică.

I. IONESCU.

APLICAŢIUNI ALE CALCULULUI VECTORIAL

PROPRIETĂŢI ALE TETRAEDRULUI

1. Să considerăm un tetraedru SABC şi pe muchiile SA, SB, SC să luăm punctele A′, B′, C′ astfel ca

$$\frac{\overrightarrow{A'S}}{\overrightarrow{A'A}} = \alpha \quad , \quad \frac{\overrightarrow{B'S}}{\overrightarrow{B'B}} = \beta \quad , \quad \frac{\overrightarrow{C'S}}{\overrightarrow{C'C}} = \gamma,$$

α, β, γ fiind numere date.

Să determinăm punctul M, *intersecţia planelor* AB′C′, BC′A′, CA′B′.

Dacă se notează

$$\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{u} \quad , \quad \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{v} \quad , \quad \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{w},$$

este uşor de văzut că

$$(1)\quad \overrightarrow{SA'} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}\overrightarrow{u} \quad , \quad \overrightarrow{SB'} = \frac{\beta}{\beta - 1}\overrightarrow{v} \quad , \quad \overrightarrow{SC'} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\overrightarrow{w}.$$

Un punct oarecare P din planul AB'C' este determinat de vectorul

$$\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SA} + \lambda \overrightarrow{AB'} + \mu \overrightarrow{AC'}$$

unde λ şi μ sunt parametri arbitrari.

Formula precedentă se mai scrie

$$(2) \quad \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{u} + \lambda\left(\frac{\beta}{\beta-1}\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\right) + \mu\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\overrightarrow{w} - \overrightarrow{u}\right).$$

La fel se vede că un punct Q din planul BC'A' este determinat de vectorul

$$(3) \quad \overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{v} + \lambda'\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}\right) + \mu'\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right)$$

unde λ' şi μ' sunt parametri arbitrari.

Un punct R din planul CA'B' este determinat de vectorul

$$(4) \quad \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{w} + \lambda''\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}\right) + \mu''\left(\frac{\beta}{\beta-1}\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\right)$$

unde λ'' şi μ'' sunt parametri arbitrari.

Punctul de intersecţie M al planelor AB'C', BC'A', CA'B' este reprezentat de una din formulele (1), (2), (3) unde parametrii au valori astfel alese ca aceste formule să fie identice.

Trebue deci ca parametrii să satisfacă la următoarele ecuaţii

$$1 - \lambda - \mu = \mu' \frac{\alpha}{\alpha-1} = \lambda'' \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

$$1 - \lambda' - \mu' = \mu'' \frac{\beta}{\beta-1} = \lambda \frac{\beta}{\beta-1}$$

$$1 - \lambda'' - \mu'' = \mu \frac{\gamma}{\gamma-1} = \lambda' \frac{\gamma}{\gamma-1}.$$

Rezolvind acest sistem de ecuaţii în raport cu $\lambda, \mu, \lambda', \mu', \lambda'', \mu''$ se găseşte fără greutate

$$\lambda = \frac{\beta-1}{\alpha+\beta+\gamma-2}, \quad \mu = \frac{\gamma-1}{\alpha+\beta+\gamma-2}$$

şi deci

$$(5) \quad \overrightarrow{SM} = \frac{\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w}}{\alpha+\beta+\gamma-2}.$$

Să dovedim că dacă se ia intersecția M_1 *a planelor* A'BC, B'CA, C'AB, *punctele* S, M *și* M_1 *sunt colineare.*

Intr'adevăr dacă notăm

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AA'}} = \alpha_1 \quad , \quad \frac{\overline{BS}}{\overline{BB'}} = \beta_1 \quad , \quad \frac{\overline{CS}}{\overline{CC'}} = \gamma_1$$

vom avea după formula (4)

$$\vec{SM_1} = \frac{\alpha_1 \vec{SA'} + \beta_1 \vec{SB'} + \gamma_1 \vec{SC'}}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - 2}.$$

Insă

$$\alpha_1 = 1 - \alpha \quad , \quad \beta_1 = 1 - \beta \quad , \quad \gamma_1 = 1 - \gamma,$$

iar

$$\vec{SA'} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \vec{u} \quad , \quad \vec{SB'} = \frac{\beta}{\beta - 1} \vec{v} \quad , \quad \vec{SC'} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \vec{w}.$$

Prin urmare

$$\vec{SM_1} = \frac{\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}}{\alpha + \beta + \gamma - 1}. \tag{6}$$

Formula aceasta arată că punctele S, M, M_1 sunt colineare.

Să notăm cu N și cu N' punctele unde dreapta SMM_1 taie planele ABC și A'B'C'.

Este ușor de văzut că

$$\vec{SN} = \frac{\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}}{\alpha + \beta + \gamma}$$

ceea ce dovedește că N *este baricentrul maselor* α, β, γ *plasate în* A, B, C.

Deasemenea este ușor de văzut că

$$\vec{SN'} = \frac{\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}}{\alpha + \beta + \gamma - 3}$$

formulă, care din cauza relațiilor (1) se mai scrie sub forma

$$\vec{SN'} = \frac{(\alpha - 1)\vec{SA'} + (\beta - 1)\vec{SB'} + (\gamma - 1)\vec{SC'}}{\alpha + \beta + \gamma - 3}.$$

Aceasta dovedește că N′ *este baricentrul maselor* $\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$ *plasate în punctele* A′, B′, C′.

In acest articol vom face aplicațiuni ale formulei (5).

2. Să luăm punctele A″, B″, C″ pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC și să notăm

$$\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} = \alpha' \quad , \quad \frac{\overline{B''C}}{\overline{B''A}} = \beta' \quad , \quad \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = \gamma'.$$

Planele SB″C″, BB″A′, CC″A′ se taie într'un punct M′; planele SC″A″, AA″B′, CC″B′ se taie în M″; planele SA″B″, BB″C′, AA″C′ se taie în punctul M‴.

Să determinăm condițiile ca dreptele AM′, BM″, CM‴ *să intersecteze dreapta* SM.

Se găsește fără greutate aplicând formula (5) că

$$\vec{AM'} = \frac{\gamma'\vec{AB} + \frac{1}{\beta'}\vec{AC} + \frac{1}{\alpha}\vec{AS}}{\gamma' + \frac{1}{\beta'} + \frac{1}{\alpha} - 2}$$

$$\vec{BM''} = \frac{\alpha'\vec{BC} + \frac{1}{\gamma'}\vec{BA} + \frac{1}{\beta}\vec{BS}}{\alpha' + \frac{1}{\gamma'} + \frac{1}{\beta} - 2}$$

$$\vec{CM'''} = \frac{\beta'\vec{CA} + \frac{1}{\alpha'}\vec{CB} + \frac{1}{\gamma}\vec{CS}}{\beta' + \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\gamma} - 2}.$$

Să găsim întâi condiția ca AM′ să intersecteze pe SM. Condițiile ca BM″ și CM‴ să intersecteze pe SM se vor deduce prin permutări circulare.

Pentru ca SM și AM′ să se întâlnească trebue să existe două valori pentru λ și μ, astfel ca să avem

$$\vec{SA} + \lambda\vec{AM'} = \mu.\vec{SM}$$

sau:

$$\vec{u} + \lambda\frac{\gamma'(\vec{v}-\vec{u}) + \frac{1}{\beta'}(\vec{w}-\vec{u}) - \frac{1}{\alpha}\vec{u}}{\gamma' + \frac{1}{\beta'} + \frac{1}{\alpha} - 2} = \mu\frac{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}}{\alpha+\beta+\gamma-2}.$$

Pentru aceasta trebue să avem

$$\frac{\lambda\gamma'}{\gamma'+\frac{1}{\beta'}+\frac{1}{\alpha}-2}=\frac{\mu\beta}{\alpha+\beta+\gamma-2}$$

$$\frac{\lambda}{\beta'\left(\gamma'+\frac{1}{\beta'}+\frac{1}{\alpha}-2\right)}=\frac{\mu\gamma}{\alpha+\beta+\gamma-2} \tag{7}$$

$$1-\lambda\frac{\gamma'+\frac{1}{\beta'}+\frac{1}{\alpha}}{\gamma'+\frac{1}{\beta'}+\frac{1}{\alpha}-2}=\frac{\mu\alpha}{\alpha+\beta+\gamma-2}.$$

Pentru ca acest sistem de ecuaţii să fie compatibil în λ şi μ trebue ca

$$\beta'\gamma'=\frac{\beta}{\gamma}. \tag{8}$$

Condiţiile ca BM″ şi CM‴ să intersecteze pe SM sunt prin urmare ca

$$\gamma'\alpha'=\frac{\gamma}{\alpha}\quad,\quad\alpha'\beta'=\frac{\alpha}{\beta}. \tag{9}$$

Dacă rezolvăm ecuaţiile (8) şi (9) în raport cu α', β', γ' găsim că

$$\alpha'=\varepsilon\frac{\gamma}{\beta}\quad,\quad\beta'=\varepsilon\frac{\alpha}{\gamma}\quad,\quad\gamma'=\varepsilon\frac{\beta}{\alpha}\quad,\quad\alpha'\beta'\gamma'=\varepsilon, \tag{10}$$

unde $\varepsilon=\pm 1$.

Condiţiile ca AM′, MB″, CM‴, să intersecteze pe SM sunt astfel exprimate prin formulele (10).

Dacă se ia $\varepsilon=+1$, atunci condiţiile (10) arată că punctele A′, B′, C″; B′, C′, A″; C′, A′, B″; A″, B″, C″ sunt colineare după cum rezultă din teorema lui MENELAUS.

Dacă se ia $\varepsilon=-1$, atunci dreptele SC″, AB′, BA′; SA″, BC′, CB′; SB″, CA′, AC′; AA″, BB″, CC″ sunt concurente după cum rezultă din formulele (10) şi teorema lui CEVA.

3. Să rezolvăm sistemul de ecuaţii (7) în raport cu λ şi μ şi să determinăm astfel punctul unde AM′ taie pe SM.

Din ultimele două ecuaţii (7), se scoate

$$1-\frac{\mu\alpha}{\alpha+\beta+\gamma-2}=\frac{\mu\gamma\beta'\left(\gamma'+\frac{1}{\beta'}+\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha+\beta+\gamma-2}$$

şi ţinând seama de formulele (10), avem

$$\mu=\frac{\alpha+\beta+\gamma-2}{\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon}$$

şi deci, dacă notăm cu I punctul unde AM′ taie pe SM, avem

$$\overrightarrow{SI}=\frac{\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}+\gamma\overrightarrow{w}}{\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon}. \tag{11}$$

Simetria acestei formule ne arată că şi dreptele BM″ şi CM‴ întâlnesc pe SM tot în I.

Avem prin urmare următoarea teoremă:

Se consideră un tetraedru SABC *şi pe muchiile* SA, SB, SC *se iau punctele arbitrare* A′, B′, C′. *Pe laturile* BC, CA, AB *se iau punctele* A″, B″, C″ *astfel ca punctele* A″, B′, C′; B″, C′, A′; C″, A′, B′ *să fie colineare, sau ca dreptele* SA″, BC′, CB′; SB″, CA′, AC′; SC″, AB′, BA′ *să fie concurente.*

Se notează cu M, M′, M″, M‴, *punctele comune planelor* AB′C′, BC′A′, CA′B′; SB″C″, BB″A′, CC″A′; SC″A″; CC″B′, AA″B′; SA″B″, AA″C′, BB″C′.

Dreptele SM, AM′, BM″, CM‴ *sunt concurente într'un punct* I. *Punctul* I *este baricentrul maselor proporţionale cu* ε, α, β, γ *plasate în punctele* S, A, B, C.

4. Să arătăm că dacă $\varepsilon=-1$, adică dacă în configuraţia precedentă dreptele SA″, BC′, CB′; SB″, CA′, AC′; SC″, AB′, BA′ sunt concurente atunci *dreptele* A′A″, B′B″, C′C″ *sunt concurente în punctul* I.

Intr'adevăr fie P_1, Q_1, R_1 puncte luate respectiv pe A′A″, B′B″ şi C′C″. Avem

$$\overrightarrow{SP_1}=\overrightarrow{SA'}+\lambda\overrightarrow{A'A''}$$

$$\overrightarrow{SQ_1}=\overrightarrow{SB'}+\mu\overrightarrow{B'B''}$$

$$\overrightarrow{SR_1}=\overrightarrow{SC'}+\gamma\overrightarrow{C'C''}.$$

Ţinând seamă că

$$\vec{SA''} = \frac{\vec{v} - \alpha' \vec{w}}{1 - \alpha'}$$

$$\vec{SB''} = \frac{\vec{w} - \beta' \vec{u}}{1 - \beta'}$$

$$\vec{SC''} = \frac{\vec{u} - \gamma' \vec{v}}{1 - \gamma'}$$

vom avea:

$$(12) \quad \begin{cases} \vec{SP_1} = \dfrac{(1-\lambda)\alpha}{\alpha - 1} \vec{u} + \dfrac{\lambda}{1-\alpha'} (\vec{v} - \alpha' \vec{w}) \\ \vec{SQ_1} = \dfrac{(1-\mu)\beta}{\beta - 1} \vec{v} + \dfrac{\mu}{1-\beta'} (\vec{w} - \beta' \vec{u}) \\ \vec{SR_1} = \dfrac{(1-\nu)\gamma}{\gamma - 1} \vec{w} + \dfrac{\nu}{1-\gamma'} (\vec{u} - \gamma' \vec{v}). \end{cases}$$

Dacă în aceste formule înlocuim pe α', β', γ' cu

$$\alpha' = -\frac{\gamma}{\beta} \quad , \quad \beta' = -\frac{\alpha}{\gamma} \quad , \quad \gamma' = -\frac{\beta}{\alpha}$$

şi alegem

$$\lambda = \frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta + \gamma - 1}$$

$$\mu = \frac{\gamma + \alpha}{\alpha + \beta + \gamma - 1}$$

$$\nu = \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta + \gamma - 1},$$

vom vedea că membrii doi ai formulelor (12) se reduc la

$$\frac{\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}}{\alpha + \beta + \gamma - 1}$$

ceea ce înseamnă că punctele P_1, Q_1, R_1 coincid cu punctul I definit de formula

$$\vec{SI} = \frac{\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}}{\alpha + \beta + \gamma - 1}.$$

Observăm după formula (6) că I este deasemenea intersecția planelor A'BC, B'CA, C'AB.

5. Să presupunem că punctele A', B', C' sunt mijloacele muchiilor SA', SB', SC', adică

$$\alpha = -1 \quad , \quad \beta = -1 \quad , \quad \gamma = -1.$$

Formulele (10) arată că vom avea deasemenea

$$\alpha' = -1 \quad , \quad \beta' = -1 \quad , \quad \gamma' = -1$$

și prin urmare A'', B'', C'' sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC.

Planele AB'C', BC'A', CA'B' se taie în punctul M situat pe dreapta ce unește S cu punctul de întâlnire G_1 al medianelor triunghiului ABC, astfel ca

$$\overrightarrow{SM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{SG_1}.$$

Dreptele SM, AM', BM'', CM''' sunt concurente în punctul I, centrul de greutate al tetraedrului.

Dreptele A'A'', B'B'', C'C'' trec prin centrul de greutate al tetraedrului.

Teoremele demonstrate la n-rele 3 și 4 sunt generalizările teoremelor precedente.

D. V. IONESCU.
Profesor la Facultatea de Științe din Cluj.

ASUPRA PROBLEMEI 4385

1. D-nii M. GHERMĂNESCU și OVIDIU ENULESCU s'au ocupat de generalizarea acestei probleme în notele Nr. 51 din Vol. XLIV, p. 641 și Nr. 11, 12 din Vol. XLV, p. 136, 137. Din cauza unei mici scăpări din vedere nu s'a rezolvat însă complet problema generalizată. Se cereau anume polinoamele $P(x)$ astfel ca

$$(1) \quad P^2(x) - P(x-a)\,P(x+a) = P(x)\,Q(x),$$

$a\,(\neq 0)$ și polinomul $Q(x)$ fiind date [1]).

1) S'ar putea lua $a = 1$ fără a restrânge generalitatea problemei.

Problema revine la a determina polinoamele (de grad $\geqq 1$) $P(x)$ pentru care produsul $P(x-a)\,P(x+a)$ se divide cu $P(x)$. Forma necesară a lui $Q(x)$ pentru posibilitatea ecuației (1) rezultă atunci în mod simplu. Din condiția precedentă rezultă în mod simplu că dacă α este un zero a lui $P(x)$ și $\alpha + a$ *sau* $\alpha - a$ este un zero al acestui polinom. De aici *nu se poate încă trage concluzia că zerorile lui* $P(x)$ *formează o progresie aritmetică.* Ceea ce se poate spune este că *zerorile distincte ale lui* $P(x)$ *se împart în grupe, fiecare grup fiind format din cel puțin două zerori în progresie aritmetică de rație a.*

Rezultă de aici că forma generală a polinomului $P(x)$ (afară de un factor constant $\neq 0$) este

$$P(x) = \prod_{i=1}^{m} \left[\prod_{r=0}^{k_i} (x - a_i - ra)^{p_x^{(i)}} \right]$$

unde $p_r^{(i)}$, k sunt numere naturale. In această formulă putem presupune, fără a restrânge generalitatea problemei căci, nici unul din numerile

$$a_i - a,\ a_i,\ a_i + a, \ldots,\ a_i + (k_i + 1)\,a$$

nu coincide cu unul din numerile

$$a_j - a,\ a_j,\ a_j + a, \ldots,\ a_j + (k_j + 1)\,a,$$

pentru toate valorile $i, j = 1, 2, \ldots, m$, $i \neq j$.

Exponenții $p_r^{(i)}$ trebue în plus să fie determinați astfel ca polinomul $\prod_{r=0}^{k_i} (x - a_i - ra)^{p_x^{(i)}}$ să satisfacă problemei. Avem dar acest prim rezultat:

Polinoamele $P(x)$ *pentru care* $P(x-a)\,P(x+a)$ *se divide cu* $P(x)$ *sunt produse de polinoame de forma*

$$R(x) = \prod_{r=0}^{k} (x - \alpha - ra)^{p_r},$$

unde k, p_0, $p_1, \ldots, p_k$ *sunt numere naturale și care satisfac aceeași condiție, deci* $R(x-a)\,R(x+a)$ *se divide cu* $R(x)$.

2. Să se determine acum forma generală a polinoamelor $R(x)$. Avem

$$R(x-a)\,R(x+a) = (x-\alpha+a)^{p_0}(x-\alpha-(k+1)a)^{p_k} \prod_{r=0}^{k}(x-\alpha-ra)^{p_{r-1}+p_{r+1}} \quad (p_{-1}=p_{k+1}=0),$$

de unde rezultă că trebue să avem

$$(2)\quad p_{r-1}+p_{r+1}\geqq p_r,\quad r=0,\ 1,\ldots,\ k\quad (p_{-1}=p_{k+1}=0).$$

Pentru simplificare vom zice că un sistem de numere $p_0, p_1, \ldots, p_k$ întregi pozitive sau nule care verifică inegalităţile (2) formează un sistem (Σ). Dacă $p_0=p_1=\ldots=p_{i-1}=0$, $p_i\neq 0$, $p_j\neq 0$, $p_{j+1}=p_{j+2}=\ldots=p_k=0$, $i\geqq 0$, $i<j\leqq k$, vom zice că sistemul (Σ) are $j-i+1$ termeni.

Fie $k=1$. Relaţiile (2) devin $p_1\geqq p_0$, $p_0\geqq p_1$, deci $p_0=p_1$. Un sistem (Σ) pentru $k=1$ e deci format din numere egale. Polinomul $R(x)$ este în acest caz o putere a polinomului $(x-\alpha)(x-\alpha-a)$.

Fie $k=2$. Soluţia generală a sistemului (2) se găseşte uşor că este

$$p=\lambda+\mu,\quad p=\lambda+\mu+\nu,\quad p=\mu+\nu,\quad \lambda\geqq 0,\quad \mu\geqq 0,\quad \nu\geqq 0.$$

Rezultă că în acest caz polinomul $R(x)$ este un produs de polinoame de forma $(x-\alpha)(x-\alpha-a)$ şi de polinoame de forma

$$(x-\beta)(x-\beta-a)(x-\beta-2a).$$

Vom arăta că *această proprietate are loc în general.*

Suma a două sisteme (Σ) $p_0', p_1', \ldots, p_k'$; $p_0'', p_1'', \ldots, p_k''$ este prin definiţie

$$p_0'+p_0'',\ p_1'+p_1'',\ldots,\ p_k'+p_k''$$

care este tot un sistem (Σ). La fel se defineşte suma unui număr oarecare de sisteme (Σ), care este tot un sistem (Σ). Vom zice că un sistem (Σ) $p_0, p_1, \ldots, p_k$ este un sistem (Σ') dacă

$p_0=p_1=\ldots=p_{i-1}=0$, $p_i=p_{i+1}=\ldots=p_j=q$, $p_{j+1}=p_{j+2}=\ldots=p_k=0$, q fiind un număr pozitiv ($i\geqq 0$, $j\leqq k$). Se vede imediat că pentru un sistem (Σ') trebue să avem $j-i\geqq 1$. Proprietatea pe care o avem în vedere va fi demonstrată dacă arătăm că:

Orice sistem (Σ) format din numere întregi şi pozitive este o sumă de sisteme (Σ'), cu q întregi pozitivi.

Vom face demonstrația acestei proprietăți prin inducție asupra numărului de termeni ale unui sistem (Σ) (număr definit mai sus).

Am văzut că proprietatea este adevărată pentru sistemele (Σ) având 2 sau 3 termeni. Să presupunem că este adevărată pentru $2, 3, \ldots k$ termeni și să arătăm că va fi adevărată și pentru sistemele cu $k+1$ termeni. Ne vom baza și pe proprietatea aproape evidentă că dacă proprietatea e adevărată pentru două sau mai multe sisteme (Σ), ea va fi adevărată și pentru suma lor.

Fie $p_0, p_1, \ldots, p_k$ un astfel de sistem (Σ) și să punem

$$p = \min.(p_0, p_k, p_0+p_2-p_1, p_1+p_3-p_2, \ldots, p_{k-2}+p_k-p_{k-1}),$$

p fiind atunci un număr întreg pozitiv sau nul.

Să presupunem întâi că $p < \min.(p_0, p_k)$ și fie

$$p < p_i + p_{i+2} - p_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, j-1$$
$$p = p_j + p_{j+2} - p_{j+1}, \quad 0 \leqq j \leqq k-2.$$

Să punem

$$p'_r = p^r - p, \quad r = 0, 1, \ldots, k. \tag{3}$$

Dacă $p > 0$ sistemul $p_0, p_1, \ldots, p_k$ este atunci suma sistemelor (Σ) $p'_0, p'_1, \ldots, p'_k$ și $p, p, \ldots, p$, ultimul fiind un sistem (Σ'). Avem acum

$$p'_i + p'_{i+2} - p'_{i+1} > 0, \qquad i = 0, 1, \ldots j-1$$
$$p'_j + p'_{j+2} - p'_{j+1} = 0.$$

Să punem

$$p'_r = p''_r + p'''_r, \quad r = 0, 1, \ldots, k$$

unde

$$p''_r = p'_r, \quad r = 0, 1, \ldots, j$$
$$p''_{j+1} = p'_{j+1} - p'_{j+2},$$
$$p''_r = 0, \quad r = j+1, j+2, \ldots, k.$$

Numerele $p''_0, p''_1, \ldots, p''_k$ și numerele $p'''_0, p'''_1, \ldots, p'''_k$ formează sisteme (Σ) având cel mult k termeni. Proprietatea rezultă în acest caz.

Să presupunem acum că $p = p_0 \leqq p_k$. In acest caz, cu notațiile (3), sistemul $p_0, p_1, \ldots, p_k$ este suma sistemului (Σ') $p_0, p_0, \ldots, p_0$, și a sistemului (Σ) $p'_0, p'_1, \ldots, p'_k$ având cel mult k termeni. La fel se tratează și cazul simetric $p = p_k \leqq p_0$ și proprietatea e încă demonstrată.

3. Rezultatele precedente permit să rezolvăm complet problema noastră. Să observăm că orice polinom de forma

$$\prod_{r=0}^{k} (x - \gamma - ra) \quad , \quad k \geqq 1$$

este un produs de polinoame de forma

$$(x - \alpha)(x - \alpha - a) \quad , \quad (x - \beta)(x - \beta - a)(x - \beta - 2a).$$

Putem dar enunța următorul rezultat:

Polinoamele $P(x)$ *pentru care* $P(x-a)\,P(x+a)$ *se divide cu* $P(x)$ *sunt* (afară de un factor constant) *produse de polinoame de forma*

$$(x - \alpha)(x - \alpha - a) \quad , \quad (x - \beta)(x - \beta - a)(x - \beta - 2a).$$

E vorba bineînțeles de polinoame $P(x)$ care nu se reduc la o constantă.

Cum s'a mai spus forma lui $Q(x)$ rezultă atunci din (1). Dacă $P(x) = x^n + \ldots$, avem $Q(x) = na^2 x^{n-2} + \ldots$, deci $Q(x)$ este un polinom de grad efectiv $n - 2$.

S'ar putea generaliza problema în felul următor:

Fiind date numerile a, b, c, d, să se determine polinoamele $P(x)$ pentru care produsul $P(ax+b)\,P(cx+d)$ se divide cu $P(x)$.

Această problemă e mult mai grea decât cazul particular tratat aici (care este în realitate cazul $a = b = c = 1$, $d = -1$). Un caz particular ceva mai general decât cel tratat aici îl voi da ca problemă propusă în *Gazeta Matematică*.

TIBERIU POPOVICIU.

O CONSTRUCȚIE A CENTRELOR DE CURBURĂ LA UNELE CURBE PLANE

Problema care ne va înlesni aceste construcții este următoarea: dându-se o curbă plană (C) pe care se mișcă un punct m, se întreabă care sunt curbele (Γ), al căror centru de curbură într'un punct M se obține plecând dela m, printr'o construcție Ω?

Fiind vorba aici de tangenta la (Γ) și raza de curbură, soluția problemei noastre va fi dată de o ecuație diferențială de ordinul 2

$$f_\Omega(x, y, y', y'') = 0.$$

Problema inversă, adică găsirea curbei (C), când se cunoaşte curba (Γ), prin construcţia Ω, se soluţionează prin eliminarea lui x între

$$\frac{dy}{dx} \text{ şi } \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Construcţia Ω fiind arbitrară, curbele (Γ) sau (C), după cum e cazul problemei directe sau inverse, se pot sau nu construi prin puncte şi deci în general rămânem la o problemă de analiză fără aplicaţie geometrică.

Revine desigur la a găsi construcţia Ω specială fiecărei clase de curbe, care să ne dea curbe construibile prin puncte.

O construcţie Ω a fost indicată pentru un caz particular în revista „Revue de mathématiques spéciales" din Martie 1928.

Imi propun să utilizez această construcţie pentru cazul general al unei curbe (C).

1°. Să notăm punctele $m(X, Y)$ şi $M(x, y)$, în raport de 2 axe rectangulare Ox şi Oy şi fie MT şi MN, tangenta şi normala în M la curba (Γ).

Dacă paralela din originea O *la* MT *taie curba* (C) *în m, ne întrebăm care sunt curbele* (Γ) *pentru care raza de curbură în* M, *să fie egală cu* $\overline{Om}$.

Cum ecuaţia dreptei Om este $Y = y'X$, valoarea segmentului $\overline{Om}$ va fi

$$\overline{Om} = X(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Scriind că este egal cu raza de curbură în $M(x, y)$, obţinem:

$$(1) \qquad X = \frac{1 + y'^2}{y''} \text{ şi } Y = \frac{y'}{y''}(1 + y'^2).$$

Relaţiile (1) determină transformarea care leagă punctele M de punctele m.

Dacă ecuaţia curbei (C) este $f(X, Y) = 0$, înlocuind din (1) obţinem

$$(2) \qquad f\left[\frac{1 + y'^2}{y''}, \frac{y'}{y''}(1 + y'^2)\right] = 0$$

ecuaţie diferenţială de ordinul 2 care ne va da soluţia problemei.

Observăm că se integrează prin 2 cuadraturi, punând:

$$z = \text{arctg } y'$$

și căpătând apoi o ecuație de ordinul 1

$$f\left(\frac{1}{z'}, \frac{\text{tg}z}{z'}\right) = 0.$$

2°. Să rezolvăm și problema inversă, adică să găsim curba (C), când se cunoaște curba (Γ).

Din relațiile (1) obținem imediat

$$y' = \frac{Y}{X} \quad \text{și} \quad y'' = \frac{X^2 + Y^2}{X^3}$$

și dacă ecuația curbei (Γ) este $y = \varphi(x)$, avem:

$$\varphi'_x = \frac{Y}{X} \quad \text{și} \quad \varphi''_x = \frac{X^2 + Y^2}{X^3}.$$

Eliminând pe x între φ'_x și φ''_x, găsim curba (C).

3°. Să aplicăm o altă construcție Ω, curbei (Γ), astfel: *dându-se una din curbele* (C) *și* (Γ), *să găsim pe cealaltă, știind că segmentul* $\overline{Om}$ *este paralel cu normala în* M *la* (Γ) *și egal cu raza de curbură în* M.

Păstrând aceleași notații avem relațiile:

$$Y = -\frac{X}{y'} \quad \text{și} \quad \overline{Om} = X\frac{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}{y'}$$

din care scoatem

$$(3) \qquad X = \frac{y'}{y''}(1+y'^2) \quad Y = -\frac{1+y'^2}{y''}.$$

Ecuația curbei (C) fiind $f(X, Y) = 0$, obținem ecuația de ordinul 2:

$$(4) \qquad f\left[\frac{y'}{y''}(1+y'^2), -\frac{1+y'^2}{y''}\right] = 0$$

analoagă cu (2) și rezolvabilă prin aceeași substituție.

4°. Invers, dacă se dă curba (Γ), se obține curba (C), prin eliminarea lui x între

$$y'_x = -\frac{X}{Y} \quad \text{și} \quad y''_x = -\frac{X^2 + Y^2}{Y^3}.$$

5°. O primă aplicaţie avem la *parabolă* şi deci la conice.

Considerând parabola de ecuaţie $y = ax^2 + bx + c$, ecuaţia curbei (C), aplicând construcţia dela 2°, este:

$$(5) \qquad X^3 = \frac{1}{2a}(X^2 + Y^2) \quad \text{sau} \quad R\cos^3\theta = \frac{1}{2a},$$

iar aplicând construcţia dela 4° este

$$(6) \qquad Y^3 = -\frac{1}{2a}(X^2 + Y^2) \quad \text{sau} \quad R\sin^3\theta = -\frac{1}{2a}.$$

a) Cum parametrul parabolei este $\frac{1}{2a}$ relaţia (5) ne arată că proiectând segmentul $\overline{Om}$ pe Ox, apoi pe Om şi din nou pe Ox, această ultimă proiecţie este egală cu parametrul parabolei.

Construcţia este imediată.

Dându-se o parabolă cu focarul în F se duce prin F′ al directoarei sale pe axă, o paralelă la tangenta în M la parabolă care taie perpendiculara din focar pe axă în m_1. Perpendiculara în m_1 pe $F'm_1$ taie axa în m_2, iar perpendiculara în m_2 pe axă taie pe $F'm_1$ în m. Raza de curbură în M la parabolă, este egală cu segmentul $\overline{F'm}$.

b) Relaţia (6) ne dă o altă construcţie a razei de curbură la parabolă: prin focarul parabolei F se duce o paralelă la normala în M a parabolei, care taie directoarea în n_1.

Perpendiculara din n_1 la Fn_1 taie axa parabolei în n_2, iar paralela din n_2 la directoare taie pe Fn_1 în n.

Raza de curbură este egală cu segmentul $\overline{Fn}$.

Observaţiune.

Fie T intersecţia lui Fn_1 cu tangenta la vârful parabolei şi μ punctul în care perpendiculara pe Fn_1 taie normala în M.

Cum triunghiurile $FM\mu$ şi Fn_2n sunt asemenea în raportul $\frac{1}{2}$ căci $\overline{FM} = \frac{1}{2}\overline{Fn_2}$, avem relaţia

$$\overline{M\mu} = \frac{1}{2}\overline{Fn}.$$

Se observă că am dat peste construcţia clasică.

6°. Pentru cazul conicelor curba (C) devine *sextica*

$$(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}} = k_1 x^2 + k_2 y^2$$

care este greu de construit prin puncte.

Este de remarcat însă că prin 2 inversiuni o conică se poate transforma într'o parabolă, alegând polii şi razele de inversiune în mod convenabil. Construcţiile de mai sus se pot aplica deci şi acestora.

CPT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

EXTINDERE ANALITICĂ A TANGENTEI LA O CURBĂ

1°. Tangenta unei curbe fiind dreapta care o întâlneşte în două puncte infinit vecine, o extindere firească a tangentei este secanta, adică dreapta care taie curba în două puncte a căror distanţă nu este infinit mic. Prin orice punct al unei curbe trec o infinitate de secante. Să alegem pentru fiecare punct o secantă, alegerea fiind sugerată de reprezentarea analitică a tangentei, formând astfel pentru întreaga curbă o familie de secante.

2°. Fie, în axe rectangulare, curba

$$y = f(x). \tag{1}$$

Coeficientul unghiular al tangentei la curbă în punctul de coordonate x, y este $f'(x)$, iar ecuaţia tangentei,

$$Y - f(x) = f'(x)[X - x] \tag{2}$$

— X, Y reprezentând coordonatele unui punct curent al tangentei.

3°. Să considerăm funcţiunea uniformă:

$$y = \varphi(x) \tag{3}$$

şi în punctul de coordonate $[x, f(x)]$, dreapta de coeficient unghiular $\varphi(x)$:

$$Y - f(x) = \varphi(x)[X - x]. \tag{4}$$

Aceasta este o secantă a curbei $y = f(x)$.

Când x variază în intervalul de existență al funcțiunei (1), ecuațiunea (4) reprezintă o familie de secante ale curbei $y = f(x)$.

Vom spune că (4) reprezintă familia de secante $\varphi(x)$ a curbei $y = f(x)$.

După această definiție, (2) reprezintă familia de secante $f'(x)$ a curbei $y = f(x)$, formată din toate tangentele curbei.

4°. Fie date curbele

$$y = f(x) \quad , \quad y = \varphi(x)$$

și familiile de secante $\varphi(x)$, $f(x)$:

$$Y - f(x) = \varphi(x)\,[X - x] \tag{5}$$

$$Y - \varphi(x) = f(x)\,[X - x]. \tag{6}$$

Notăm F, Φ două puncte respectiv pe curbele (1), (3) corespunzând aceleiași abscise x.

Să aflăm locul geometric al intersecției secantelor (5), (6) luate în punctele F, Φ *când* x *variază.*

Din (5) și (6) avem:

$$f(x) - \varphi(x) = (X - x)\,[f(x) - \varphi(x)].$$

Dacă excludem punctele de întâlnire ale curbelor (1) și (3), care evident aparțin locului,

$$f(x) - \varphi(x) \neq 0$$

și rezultă:

$$X - x = 1$$

sau:

$$x = X - 1. \tag{7}$$

Deasemenea din (5) și (6) rezultă:

$$\frac{Y - f(x)}{\varphi(x)} = \frac{Y - \varphi(x)}{f(x)}$$

sau:

$$[f(x) - \varphi(x)]\,Y = f^2(x) - \varphi^2(x)$$

$$Y = f(x) + \varphi(x). \tag{8}$$

Eliminând pe x între (7) și (8), ecuația locului geometric este:

$$Y = f(X - 1) + \varphi(X - 1). \tag{9}$$

5°. Ecuația (7) se mai scrie:

$$X = x + 1.$$

X fiind abscisa punctului de întâlnire P al secantelor $\varphi(x)$, $f(x)$ duse la curbele $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ în punctele F, Φ de abscisă x.

Să numim aceste secante: „*Secante reciproce*". Deci: *Fiind date curbele* $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ — *secantele reciproce în punctele de abscisă* x *se întâlnesc pe dreapta*

$$X = x + 1$$

sau altfel:

Locul geometric al intersecției secantelor reciproce pentru două curbe oarecare și abscisa a *este dreapta*

$$x = a + 1.$$

6°. Formula (8),

$$Y = f(x) + \varphi(x)$$

Y fiind ordonata punctului de întâlnire P al secantelor reciproce duse la curbele $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ în punctele F, Φ de abscisă x — ne dă ordonata punctului P ca sumă a ordonatelor punctelor F, Φ.

7°. *Construcția secantelor reciproce* în punctele F, Φ de abscisă a ale curbelor $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ se realizează ușor, considerând pe dreapta

$$X = a + 1$$

punctul P de ordonată egală cu suma ordonatelor $f(a)$, $\varphi(a)$; dreptele FP, ΦP sunt secantele cerute.

8°. *Construcția tangentei la o curbă.*

Fie curbele

$$y = f(x) \quad , \quad y = f'(x)$$

— secantele lor reciproce relativ la punctele de abscisă x se întâlnesc în punctul de coordonate $[x + 1, f(x) + f'(x)]$.

Ori secanta $f'(x)$ a curbei $y = f(x)$ este chiar tangenta ei. Rezultă următoarea construcție a tangentei la curba

$$y = f(x)$$

în punctul

$$T\,[a, f(a)]:$$

Construim punctul $P\,[a + 1, f(a) + f'(a)]$ *și îl unim cu* T.

9°. *Exemplu:* Construcția tangentei în origină la sinusoidă.

Avem:

$$y = \sin x \quad , \quad y' = \cos x.$$

Deci:

$$P[1, \sin o + \cos o] \equiv P(1, 1).$$

Se unește deci origina cu punctul P(1, 1) adică tangenta în origină a sinusoidei este bisectoarea unghiului *xoy*.

10°. Fie F′, Φ′ punctele în care secantele reciproce (5), (6) duse în F, Φ de abscisă x taie axa OX și M (x, o). Avem:

$$F'\left(x - \frac{f(x)}{\varphi(x)}, o\right) \quad , \quad \Phi'\left(x - \frac{\varphi(x)}{f(x)}, o\right).$$

Deci:

$$\overline{MF'} \cdot \overline{M\Phi'} = \left[-\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]\left[-\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right] = 1. \qquad (10)$$

Dacă în locul curbelor $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ *luăm alte perechi de curbe,* F′ *și* Φ′ *variază fiind omoloagele a două diviziuni în involuție.*

Punctele duble ale involuției sunt A$(x - 1, o)$, B$(x + 1, o)$.

11°. Notăm F″, Φ″ punctele în care secantele considerate precedent taie axa OY.

Avem:

$$F''[o, f(x) - x\varphi(x)] \quad , \quad \Phi''[o, \varphi(x) - xf(x)].$$

Deci:

$$\overline{\Phi''F''} = \overline{OF''} - \overline{O\Phi''} = [f(x) - \varphi(x)](1 + x)$$

și cum

$$\overline{\Phi F} = \overline{MF} - \overline{M\Phi} = f(x) - \varphi(x),$$

deducem:

$$\frac{\overline{\Phi''F''}}{\overline{\Phi F}} = 1 + x.$$

Rezultă următoarele:

a) Considerând perechile de curbe care trec prin F, Φ—F″ și Φ″ sunt variabile, însă

$$\overline{\Phi''F''} = \text{constant}.$$

b) Considerând perechi de curbe și secantele reciproce în punctele de întâlnire F, Φ *cu o paralelă la axa* OY, *aceste secante determină pe axa* OY *segmente proporționale cu* $\overline{F\Phi}$.

12°. *Să aflăm înfășurătoarea secantelor* $\varphi(x)$ *ale curbei*

$$y = f(x),$$

adică a familiei de drepte

$$Y - f(x) = \varphi(x)\,[X - x].$$

Parametrul variabil fiind x, îl eliminăm între această ecuație și

$$-f'(x) = \varphi'(x)\,[X - x] - \varphi(x). \qquad (11)$$

Din (11) deducem:

$$X - x = \frac{\varphi(x) - f'(x)}{\varphi'(x)}$$

și ecuațiile parametrice ale înfășurătoarei sunt:

$$\begin{cases} X = x + \dfrac{\varphi(x) - f'(x)}{\varphi'(x)} \\ Y = f(x) + \dfrac{\varphi(x)\,[\varphi(x) - f'(x)]}{\varphi'(x)}. \end{cases} \qquad (12)$$

C. IONESCU-BUJOR.

NOTE MATEMATICE

19. *Aritmetica Spătarului* NICULAE MILESCU CÂRNU.

Privitor la această primă aritmetică scrisă de un român, am pus o *Cerere* cu No. 11 în anul XXI pag. 144 a *Gazetei Matematice*. In anul XXXV pag. 16—19 s'a publicat, după moartea lui VASILE CRISTESCU, cercetările făcute de dânsul în privința Aritmeticei lui MILESCU SPĂTARUL. Cartea a fost scrisă în slavonește după un manuscris grec, purta titlul *Aritmologion*, și s'a terminat în Septemvrie 1672. Ea nu conținea numai aritmetică, ci și chestiuni filosofice și religioase. Se afirmă că ar mai conține și unele chestiuni cabalistice. Manuscrisul s'ar fi găsit la Monastirea Ciudov în Biblioteca Profesorului N. KEDROV.

In *Revista Fundaţiilor Regale* din 1 Octomvrie 1940, D-l I. G. DIMITRIU în o *Cronică* vorbind de opera răposatului Academician rus PECARSKIJ: *Ştiinţele şi literatura în vremea lui* PETRU CEL MARE dă şi oarecare date asupra *Aritmeticii* lui MILESCU. Titlul cărţii în traducere este:

„Aritmologia, adică cartea numerelor. In ea se descriu lucrurile foarte însemnate pentru ştiinţă, în folosul celora care fac deprinderi de socoteli. E împărţită în trei părţi: prima socoteşte lucrurile despre care vorbeşte Sfânta Scriptură şi Biserica; a doua, lucrurile cercetate de filosofie; a treia lucrurile în care se află învăţătura etică“.

Cartea nu a fost scrisă, după cum se credea, din porunca Ţarului ALEXIE, ci din preocupările lui MILESCU ca profesor, pedagog, răspânditor şi popularizator al ştiinţelor matematice. In acea carte nu sunt lucrări originale de matematică.

Cu notiţele publicate de D-l I. G. DIMITRIU chestiunea *Aritmeticii* lui MILESCU SPĂTARUL nu este încă elucidată. Trebue ca un cunoscător de matematici să citească manuscrisul, — dacă va mai fi existând, — şi să arate pe larg conţinutul lui. Având în vedere apoi că această carte este prima operă matematică a unui român, nu ar fi rău ca, după găsirea eventuală a manuscrisului, să se publice o traducere românească a ei.

I. IONESCU.

20. *Acum o sută de ani în lumea Matematică.* Date culese în Biblioteca Seminarului Matematic al Universităţii din Iaşi din originalele timpului.

Citäm din prefaţa Vol. I a lui CAUCHY *„Exercices d'Analyse et de Physique matématique“* (Bachelier, Paris, 1840).

„Bunăvoinţa cu care geometrii au întâmpinat Exerciţii de Matematici vechi şi noui ale mele, publicate respectiv la Paris şi la Praha, precum şi Rezumatele analitice, publicate la Torino, mă îndreptăţesc să dau la iveală o a patra culegere în care voi mai trata diferite chestiuni relative la analiză pură şi la fizică matematică.

Imi propun aici, în particular, să ofer amicilor ştiinţei şirul cercetărilor mele asupra mişcărilor sistemelor de molecule şi asupra teoriei luminei; regule generale asupra convergenţei seriilor în care

se desfăşoară funcţiuni explicite şi implicite, metode generale pentru calculul şi reducerea integralelor definite sau nedefinite precum şi pentru integrarea ecuaţiilor diferenţiale şi cu diferenţe parţiale finite; infine, să arăt nouile aplicaţii ale calculului reziduurilor şi ale calculului pe care, în câteva memorii de astronomie, l-am numit calculul limitelor".

Insetat de atâta vreme de a-şi regăsi patria, CAUCHY, după reîntoarcerea sa la Paris, lucrează şi mai asiduu şi are mulţumirea sufletească să constate că i se recunosc meritele. In acest sens urmează mai departe: ...„Un puternic imbold de a da curs lucrărilor mele asupra mecanicii cereşti mi-a fost hărăzit de onoarea ce mi s'a făcut de Biroul de Longitudini prin chemarea mea în sânul acestuia, în şedinţa de 13 Noembrie 1839, în locul ocupat de un confrate savant (de PRONY)...". Prefaţa se termină cu cuvintele care aruncă o lumină interesantă asupra gândurilor intime ale lui CAUCHY:

...„Indulgenţa cu care au fost primite ultimele mele memorii arată că s'a ţinut socoteală de sârguinţa şi de bunăvoinţa mea. Pentru consolarea patriei mele, precum am mai observat şi cu altă ocazie, ne place să credem că în Franţa sunt două sentimente adânc implântate în inimile noastre şi anume: devotamentul în nenorocire şi dragostea sinceră de adevăr. Ştiu din experienţă cât de mult ele sunt preţuite".

Deosebit de interesant pentru teoria existenţii soluţiunilor ecuaţiilor diferenţiale apare în acest volum „*Mémoire sur l'intégration des équations différentielles*", pp. 327—384.

D. I. M.

(Seminarul Matematic
al Universităţii din Iaşi).

21. *Rectificare.* In articolul „*Produsul a patru numere întregi în progresie aritmetică poate fi un patrat?*", concluziile de la punctul II şi IV pag. 464, trebue înlocuite prin următoarele:

Concluzia punctului II: „*Insă egalităţile* (25) *sunt de tipul acelora de la punctul I. El nu admite dar decât soluţia* $l = 0$ *şi deci* $q = 0$, *care ne duce din a doua ecuaţie a sistemului* II la

$$x^2 = 9a^2.$$

Deci sistemul II dă soluții pur formale, în care primul sau ultimul termen al progresiei este zero".

Concluzia punctului IV: *„Acestea nu sunt decât ecuațiile de la II în care p* și *q* s'au înlocuit unul cu altul. *Suntem conduși astfel la soluțiile formale* în care unul din termenii mijlocii ai progresiei este zero".

I. B. FLORESCU.

22. Asupra articolului meu: *O altă demonstrație a unei chestiuni clasice elementare cu ajutorul Geometriei și Mecanicei*[1]).

In acest articol trebue să se facă îndreptările următoare:

1) Se noteaza pe figură:

$$\widehat{B'BC} = \beta' \qquad \widehat{C'CB} = \gamma'.$$

Inegalitatea (2): $\hat{B} > \hat{C}$ trebue înlocuită cu:

(2) $$\hat{\beta}' > \hat{\gamma}'.$$

Relațiile (4), (5), (6), (7) și (8) se stabilesc după cum se arată în articol ca urmare a relației (1) din articol și a relației (2) îndreptată mai sus.

2) Relațiile (9), pentru cazul când BB' și CC' sunt bisectoarele interioare ale triunghiului ABC, se complectează astfel:

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}' = \frac{1}{2}\hat{B} \quad , \quad \hat{\gamma} = \hat{\gamma}' = \frac{1}{2}\hat{C}.$$

3) La pag. 192 rândul 9 de sus, inegalitatea $\hat{C} > \hat{B}$ trebue înlocuită cu inegalitatea $\hat{\gamma}' > \hat{\beta}'$.

4) La pag. 192, rândul 5 de jos trebue citit inegalitatea (2) și nu egalitatea (2).

In cazul când BB' și CC' sunt mediane concluzia $\hat{\beta} > \hat{\gamma}$ poate fi trasă și din trapezul convex BCB'C', cu diagonalele BB' și CC', care se taie în punctul I, interior acestui trapez, cu unghiurile:

$$\widehat{B'BC} = \hat{\beta}' > \hat{\gamma}' = \widehat{C'CB}.$$

---

1) Vezi articolul cu acest titlu din *Gazeta Matematică*, Nr. 4 din Decemvrie 1940, anul XLVI.

Se deduce relaţia (13) din articol:

$$\overset{\frown}{BB'C} > \overset{\frown}{CC'B}$$

şi cea următoare (14):

$$\hat{\beta} > \hat{\gamma}.$$

Ar fi de adăugat că în cazul când BB′ şi CC′ sunt înălţimi sau mediane, demonstraţia clasică e mai directă şi mai simplă.

ALEXANDRU I. GUŢU.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul Societăţii Politechnice din România. Anul LIV. Nr. 11. Bucureşti. Noemvrie 1940.

Disquisitiones Mathematicae et Physicae. Tom. I. Fasc. 2. Bucureşti 1940. Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (IV), de TIBERIU POPOVICIU, Nouvelles recherches sur les fonctions polyharmoniques (2) de MIRON NICOLESCO, Remarques sur mon mémoire: Recherches sur les fonctions polyharmoniques de MIRON NICOLESCO, Sur les espaces métriques non holonomes compleméntaires de K. YANO şi ST. PETRESCU, Sur le mouvement tautochrone plan de MICHEL GHERMĂNESCU, Réflexion des ondes électromagnétiques par des milieux aux constantes optiques variables d'une façon continue, de C. MIHUL.

Deutsche Mathematik, editat de THEODOR VAHLEN. Anul III. Caetul 6. Decemvrie 1938. Leipzig.

Idem. Anul IV. Caetul I. Martie 1939. Leipzig.

Idem. Anul IV. Caetul II. Aprilie 1939. Leipzig.

Idem. Anul IV. Caetul IV. August 1939. Leipzig.

Idem. Anul V. Caetul I. Ianuarie 1940. Leipzig.

Pozitiva. Anul I. Nr. 3. 10 Noemvrie 1940 Bucureşti. Asupra unor funcţiuni armonice de două variabile de CAIUS IACOB, O proprietate a conicelor şi construcţia razei lor de curbură de AD. GHEORGHIU, Asupra triunghiurilor omologice de GH. D. SIMIONESCU.

Idem. Anul I. Nr. 4. 10 Decemvrie 1940. Bucuresti. O clasă de ecuaţii funcţionale de M. GHERMĂNESCU, Curbe raţionale ŢIŢEICA de AL. V. NICULESCU, O generalizare a formulei lui PASCAL de E. VIŞA.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XX. Nr. 10. Decemvrie 1940. Asupra însumării progresiilor aritmetico-geometrice de E. VIŞA, Asupra unei probleme de analiză de V. CLAUDIAN.

C-DOR ING. I. LINTEŞ. *Aeronautica în războiul actual.* (Extras din Revista aeronauticei şi marinei 1940).

C-DOR ING. I. LINTEŞ. *Bombardamentul în picaj.* (Extras din Revista aeronauticei şi marinei 1940).

CPT. C-DOR I. LINTEŞ. *Tabele de trageri pentru bombardamentul aerian.*

CPT. C-DOR I. LINTEŞ. *Balistica Antiaeriană.* (Extras din revista artileriei 3/1940).

CPT. C-DOR I LINTEŞ. *Asupra concentrărei focurilor.* (Extras din revista artileriei 9/1941).

NICULAE ABRAMESCU. Expunere de titluri, activitate didactică şi ştiinţifică. Timişoara 1940.

CERERI

298. Există „*Călăuze*" pentru matematici în limba română, ca publicaţiune aparte sau încorporate în călăuze pentru alte specialităţi ?

Intr'un vechiu Calendar al Căilor Ferate Române am găsit o parte cu formule matematice.

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

Internationaler Mathematikerkongress. Zürich 1932.
II Teilnehmer Liste.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

Fifth International Congress of mathematicians. Cambridge, August 1912. Catalogue of Exhibition, organised by the Mathematical Association. Cambridge 1912.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

E. HUMBERT. Traité d'Arithmétique. Paris 1901.

EDOUARD LUCAS. Théorie des Nombres. Tome I. Paris 1891.

TH. KLOMPERS. Traité d'Arithmétique Commerciale. Partea I. Namur 1930.

I. IONESCU. Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Bucureşti 1937.

F. G. M. Exercices d'Arithmétique. Paris 1915.

J. FITZ PATRIK. Exercices d'Arithmétique. Paris 1914.

IVAN ALEXANDROFF. Problèmes de Géométrie Elémentaire. Paris 1899.

I. IONESCU. G. ŢIŢEICA, A. G. IOACHIMESCU şi V. CRISTESCU. Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. Bucureşti 1901.

EUGÈNE ROUCHÉ et CH. DE COMBEROUSSE. Traité de Géométrie. Partea I, II. Paris 1922.

JACQUES HADAMARD. Leçons de Géométrie Elémentaire. Paris 1928. Partea I, II.

G. ŢIŢEICA. Culegere de Probleme de Geometrie. Bucureşti 1929.

TRAIAN LALESCO. La Géométrie du Triangle. Paris 1937.

T. LEMOYNE. Les Lieux Géométriques en Mathématique Spéciales. Paris 1923.

G. PAPELIER. Exercices de Géométrie Moderne. Paris 1927.

CHARLES MICHEL. Compléments de Géométrie Moderne. Paris 1926.

ERNEST DUPORCQ. Premiers Principes de Géométrie Moderne. Paris.

HENRY VOGT. Eléments de Mathématiques Supérieures (Mécanique). Paris 1931.

MARCEL YVON. Exercices Méthodiques de Mathématiques Générales. Partea I Analyse.

S. THOMSON. Le Calcul Intégral et Différentiel. Paris 1919.

KIEPERT. Differential-Rechnung. Hannover 1921. Band I, II.

Donate de familia decedatei PREDUŢA D. BUNGEŢIANU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3705. *Se dă un cerc* O *şi un diametru al său* AB *şi se consideră triunghiul* AMB *înscris în acest cerc.*

Se construiesc, în toate felurile, patratele AMNR *şi* BMQS.

Să se găsească locul punctului P, *intersecţia dreptelor* RN *şi* QS, *când* M *descrie cercul* O.

In aceleaşi condiţii, să se găsească locurile punctelor S, R, Q, N.

O. N. ŢINO.

Avem patru cazuri de figură: *a)* Patratele AMNR şi BMQS amândouă construite în afara triunghiului AMB; *b)* Patratele AMNR şi BMQS ambele construite către interiorul triunghiului AMB; *c)* Patratul AMNR construit în afară, iar BMQS către interiorul triunghiului AMB; *c')* Patratul AMNR construit către interiorul, iar patratul BMQS în afara triunghiului AMB.

Observăm dela început că ultimile două cazuri de figură nu sunt distincte, aşa că este de ajuns a trata numai pe unul din ele.

a) *Diagonalele* MR *şi* MS *ale celor două patrate* AMNR *şi* BMQS *sunt în prelungire.*

In adevăr, avem

$$\sphericalangle BMS = \frac{\pi}{4} \; ; \; \sphericalangle AMB = \frac{\pi}{2} \; ; \; \sphericalangle RMA = \frac{\pi}{4}$$

deducem că $\sphericalangle RMS = \pi$, adică R, M, S sunt pe aceeaşi dreaptă. Fie H punctul unde RS taie a doua oară semicercul AHB. *Punctul* H *este fix pe cerc, oricare ar fi poziţia punctului* M *pe semicercul considerat.*

In adevăr, avem

$$\sphericalangle HMA = \sphericalangle RMA = \frac{\pi}{4},$$

deci arcul cuprins între laturile unghiului HMA înscris în cercul O, arcul AH, are ca măsura $\frac{\pi}{4} \times 2 = \frac{\pi}{2}$, cu alte cuvinte punctul H este mijlocul semicercului AHB.

Când punctul M ajunge în B laturile AR şi MN vin perpendiculare pe $\overline{AB}$; fie deci R_0 şi S_0 punctele unde perpendicularele în A şi B întâlnesc respectiv pe RN şi SQ. Observând că,

$\Delta R_0RA = \Delta AMB$ [căci $\overline{AR} = \overline{AM}$ şi $\sphericalangle RAR_0 = \sphericalangle BMA$ (ascuţite cu laturile respectiv perpendiculare)] şi asemenea că:

$\Delta BSS_0 = \Delta BMA$ [căci $\overline{BS} = \overline{BM}$ şi $\sphericalangle S_0BS = \sphericalangle MBA$ (ascuţite cu laturile respectiv perpendiculare)], rezultă că:

$$\overline{AR_0} = \overline{AB} = \overline{BS_0}, \qquad (1)$$

şi ca urmare ABS_0R_0 *este un patrat.*

Dacă I este punctul unde OH taie R_0S_0, având

$$\overline{OH} = \frac{\overline{AB}}{2} \quad \text{şi} \quad \overline{OI} = \overline{AB},$$

deducem că $\overline{OH} = \overline{HI}$, adică H este centrul patratului ABS_0R_0, avem deci

$$\overline{R_0H} = \overline{HB} \quad \text{şi} \quad \overline{S_0H} = \overline{HA}.$$

Cum $\overline{SB}$ este egal şi paralel cu $\overline{RR_0}$, patrulaterul $SBRR_0$ este paralelogram, deci punctul H este deasemenea mijlocul lui $\overline{RS}$.

Vârfurile patratului ABS_0R_0 fiind fixe când punctul M descrie semicercul AHB şi unghiurile ARR_0 şi BSS_0 fiind drepte cu laturile trecând prin două puncte fixe respectiv, vârfurile lor, R şi S descriu semicercuri şi anume: R descrie semicercul ARR_0 (poziţiile limită fiind A şi R_0) aşezat în afara patratului ABS_0R_0 şi egal cu semicercul AMB; asemenea S descrie semicercul S_0SB (poziţiile limită fiind S_0 şi B) egal cu semicercul AMB şi aşezat în afara patratului ABS_0R_0.

Tot astfel punctul P descrie semicercul R_0PS_0 (poziţiile limită fiind R_0 şi S_0) egal cu semicercul AMB şi aşezat în afara patratului ABS_0R_0. Se mai observă că *poziţiile lui* R *şi* S corespunzătoare unei poziţii a punctului M, *sunt simetrice în raport cu* H.

De oarece

$$\sphericalangle R_0NB = \frac{\pi}{2} \quad \text{şi} \quad \sphericalangle AQS_0 = \frac{\pi}{2},$$

punctele N şi Q descriu arce din cercurile de diametre $\overline{BR_0}$ şi $\overline{AS_0}$, deci arce din cercul circumscris patratului ABS_0R_0; cum pentru punctul N poziţiile limită sunt A şi S_0 când M descrie semicercul AHB, deci punctul N descrie semicercul AR_0S_0; asemenea poziţiile limită ale lui Q, când M descrie semicercul AMB, fiind R_0 şi B, punctul Q descrie semicercul R_0S_0M.

Când punctul M descrie cellalt semicerc, AH'B, al cercului O, oricărei poziţii a figurei îi corespunde una simetrică în raport cu diametrul AB, prin urmare locurile punctelor R, P, S, N, Q se obţin luând o simetrie în raport cu AB a locurilor găsite pentru fiecare în ipoteza că M descrie semicercul AHB.

b) In acest caz de figură, presupunând iarăşi că M descrie în primul rând semicercul AHB, vom nota cu R_0', S_0', H', I' simetricile punctelor R_0, S_0, H, I în raport cu diametrul AB.

Avem aceleaşi proprietăţi ca în cazul precedent tratat:

1. Diagonalele MR şi MS, ale celor două patrate construite pe $\overline{AM}$ şi $\overline{BM}$ către interiorul triunghiului AMB, fiind amândouă bisectoare interioară unghiului AMB sunt suprapuse una alteia, amândouă trecând prin H' mijlocul semicercului AH'B.

2. $R_0'B$ şi $S_0'A$, diagonalele patratului $AR_0'S_0'B$, trec amândouă prin punctul H', mijlocul lui $\overline{OI'}$ deci centrul patratului $AR_0'S_0'B$.

3. Dreapta QS trece prin S_0', iar NR trece prin R_0'.

In adevăr:

$$\Delta BSS_0' = \Delta BMA \quad (\overline{BS} = \overline{BM} \; ; \; \overline{BS_0'} = \overline{BA} \; ; \; \sphericalangle SBS_0' = \sphericalangle MBA)$$

deci $\sphericalangle BSS_0' = \frac{\pi}{2}$, adică SS_0' este prelungirea lui $\overline{QS}$.

Asemenea avem:

$$\Delta R_0'RA = \Delta BMA \quad (\overline{AR} = \overline{AM} \; ; \; \overline{AR_0'} = \overline{AB} \; ; \; \sphericalangle R_0'AR = \sphericalangle BAM),$$

deci $\sphericalangle ARR_0' = \frac{\pi}{2}$, adică RR_0' este prelungirea lui $\overline{NR}$.

4. Segmentele $\overline{SB}$ şi $\overline{R_0'R}$ fiind egale şi paralele, patrulaterul $SBRR_0'$ este paralelogram, *deci* H' *este mijlocul segmentului* RS, adică S este simetricul lui R în raport cu H'.

Urmează din proprietăţile de mai sus, că punctele R şi S descriu, când M descrie semicercul AHB, semicercurile $AH'R_0'$ şi $S_0'H'B$ de diametre $\overline{AR_0'}$ şi $\overline{BS_0'}$ egale cu $\overline{AB}$ (aşezate către interiorul patratului $AR_0'S_0'B$, trecând prin centrul lui); iar punctele N şi Q, din cauză că

$$\sphericalangle BNR_0' = \frac{\pi}{2} \quad \text{şi} \quad \sphericalangle AQS_0' = \frac{\pi}{2},$$

descriu semicercurile $S_0'BA$ şi BAR_0' din cercul circumscris patratului $AR_0'S_0'B$.

Asemenea observând că $\sphericalangle R_0'PS_0' = \frac{\pi}{2}$, deducem că punctul P, când M descrie semicercul AMB, descrie semicercul $R_0'PS_0'$ situat către interiorul patratului $AR_0'S_0'B$ şi egal cu semicercul AMB.

Când punctul M descrie semicercul BH'A, observăm, ca în cazul (*a*), că unei poziții a figurei îi corespunde o figură simetrică în raport cu diametrul AB; deci locurile punctelor R, S, Q, N, P pentru a doua jumătate de cerc, AH'B, sunt simetricele în raport cu AB ale semicercurilor găsite când M descrie semicercul AHB.

c') Să presupunem acum că construim tot timpul patratul AMNR către interiorul triunghiului AMB, iar patratul BMQS în afara triunghiului AMB.

Când M este în A, patratul AMNR se reduce la punctul A, iar patratul BMQS devine ABS_1Q_1 de aceeași parte cu semicercul considerat AHB; din contra, când M vine în B patratul BMQS se reduce la punctul B, iar patratul AMNR devine patratul ABN_1R_1 de aceeași parte cu semicercul AH'B.

Diagonalele dreptunghiului $Q_1R_1N_1S_1$ trec prin O, care este mijlocul medianei lui $\overline{AB}$; asemenea AS_1 trece prin centrul H al patratului ABS_1Q_1, iar BR_1 trece prin centrul H' al patratului ABN_1R_1.

Urmează imediat, că având $\sphericalangle AQS_1 = \frac{\pi}{2}$, când M descrie semicercul AHB, punctul Q descrie semicercul BS_1Q_1 din cercul circumscris patratului ABS_1Q_1; asemenea, având $\sphericalangle BNR_1 = \frac{\pi}{2}$, când M descrie semicercul AHB, punctul N descrie semicercul N_1BA din cercul circumscris patratului ABN_1R_1.

De oarece $\sphericalangle AMR = \frac{\pi}{2}$, diagonala MR trece constant prin mijlocul H' al semicercului AH'B; asemenea MS, fiind bisectoarea unghiului BMQ, este perpendiculară pe MR, deci trece constant prin H mijlocul semicercului AHB.

Dreapta SQ *trece prin* S_1. In adevăr, unind S_1 cu S avem că

$\Delta S_1BS = \Delta MBA$ $(\overline{BM} = \overline{BS}\ ;\ \overline{BA} = \overline{BS_1}\ ;\ \sphericalangle S_1BS = \sphericalangle MBA,$

fiind ascuțite cu laturi respectiv perpendiculare); din care deducem că $\sphericalangle BSS_1 = \sphericalangle BMA = \frac{\pi}{2}$, deci SS_1 este suprapusă lui SQ.

Asemenea dreapta NR *trece prin* R_1. Unind R cu R_1 avem:

$\Delta AR_1R = \Delta ABM$ $(\overline{AR_1} = \overline{AB}\ ;\ \overline{AR} = \overline{AM}\ ;\ \sphericalangle RAR_1 = \sphericalangle MAB,$

fiind ascuțite cu laturile respectiv perpendiculare), din care deducem că

$$\sphericalangle ARR_1 = \sphericalangle AMB = \frac{\pi}{2},$$

deci RR_1 este prelungirea laturei NR.

De oarece $\sphericalangle ARR_1 = \frac{\pi}{2}$, iar A și R_1 puncte fixe, când M descrie semicercul AMB, punctul R descrie semicercul $AH'R_1$ trecând prin centrul patratului AR_1N_1B și egal cu semicercul AMB.

Asemenea având: $\sphericalangle S_1SB = \frac{\pi}{2}$ și punctele S_1 și B fiind fixe când M descrie semicercul AHB, punctul S descrie semicercul BSS_1 egal cu semicercul AMB și așezat în afara patratului ABS_1Q_1.

Observând că $\sphericalangle S_1PR_1$ este unghiu drept, iar S_1 și R_1 fixe, deducem că punctul P se mișcă pe cercul circumscris dreptunghiului $R_1N_1S_1Q_1$ și cum pozițiile limită ale lui, când M descrie semicercul AMB, sunt Q_1 și N_1, *punctul* P *descrie semicercul* $Q_1S_1N_1$.

Când punctul M descrie semicercul AH'B, locurile punctelor se obțin folosind simetria în raport cu AB a locurilor găsite când M descrie semicercul AHB.

Locurile punctelor R, S, N, Q în cazul (*c*) întregesc până la cercuri pe cele găsite în cazul (*c'*); cele din cazul (*b*) pe cele din cazul de figură (*a*).

Observare. Problema poate fi studiată într'un caz mai general; vom publica ca *Notă* studiile primite.

Au rezolvat problema D-nii: EUGEN DUMITRESCU (Elev Liceul Buzău); IULIAN ALEXIU (Absolvent de liceu).

S'au mai primit alte câteva soluții incomplecte.

O. N. Ț.

PROBLEMA 4652. *Care este cea mai mică bază de numerație în care există un patrat perfect de patru cifre astfel încât*

$$aabb = (cd)^2$$

unde a, b, c, d sunt cifre consecutive, iar $d < a < b < c$*?*

V. THÉBAULT.

Soluție dată de D-l T. C. ȘTEFAN (Lic. Traian, T.-Severin).

Avem prin enunț

$$d = b - 2 \; ; \quad a = b - 1 \; ; \quad b = b \; ; \quad c = b + 1 \qquad (1)$$

şi dacă B este baza căutată atunci ecuaţia problemei este

$$(b-1)B^3+(b-1)B^2+bB+b=[(b+1)B+b-2]^2 \quad (2)$$

sau

$$[(b-1)B^2+b](B+1)=[(b+1)(B+1)-3]^2=Mult.(B+1)+9$$

care arată că $B+1$ trebue să dividă pe 9. Cum din (1) se vede că

$$d\geqslant 0 \quad \therefore \quad b\geqslant 2 \quad \text{şi deci} \quad c\geqslant 3$$

rezultă că B trebue să fie mai mare ca 3. Singurul divizor al lui 9 mai mare ca 3 fiind 9, urmează că $B=8$. Ducând această valoare în (2), se găseşte $b=4$ şi deci numărul căutat este

$$3344_8=(52)_8^2$$

în baza 8.

Notă. 1°. Au rezolvat bine problema, dând soluţia exactă D-nii: M. F. AMĂRĂŞTEANU, M. A. NEGREA, N. D. ŞTEFĂNESCU şi M. AL. VASILESCU-STABU.

2°. In afară de D-nii T. C. ŞTEFAN şi M. AL. VASILESCU-STABU, care au demonstrat că există o singură bază şi un singur număr în condiţiile enunţului, ceilalţi rezolvitori au stabilit o ecuaţie de gradul II în *a* şi B şi apoi au determinat cea mai mică valoare a lui B, pentru ca realizantul acelei ecuaţii să fie patrat perfect.

Din soluţia precedentă se vede că cuvintele *« cea mai mică bază »* din enunţ se pot înlocui prin cuvântul *« baza »*.

3°. Vom publica sub formă de notă soluţia aceleiaşi probleme pentru cazul când ordinea de mărime a cifrelor *a, b, c, d* este oarecare, sau când aceste cifre sunt în progresie aritmetică.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4738. *Fie* (O_i) *cercurile circumscrise triunghiurilor* T_i *ce se obţin cu dreptele* $\Delta_i (i = 1, 2, 3, 4)$, *câte trei lăsând la o parte dreapta* Δ_i. *Fie* M *punctul lui* MIQUEL *al patrulaterului* $\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4$. *Dreptele ce unesc un punct* I_1 *de pe cercul* (O_1) *cu vârfurile triunghiului* T_1 *taie a doua oară cercurile* (O_2), (O_3), (O_4) *respectiv în* I_2, I_3, I_4. *Să se arate că:*

1. *Dreapta* Δ_1 *este axa de omologie a triunghiurilor* T_1 *şi* $I_2I_3I_4$;

2. *Triunghiurile* T_1 *şi* $I_2I_3I_4$ *sunt direct asemenea, centrul de similitudine fiind* M;

3. *Patrupunctul* $I_1I_2I_3I_4$ *este inscriptibil într'un cerc trecând prin* M;

4. *Centrul cercului* $I_1I_2I_3I_4$ *se găseşte pe cercul lui* MIQUEL *al patrulaterului.*

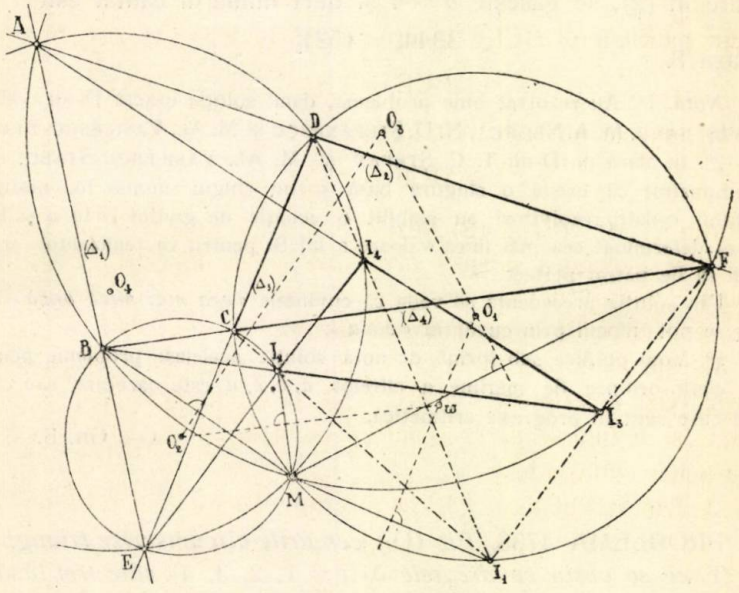
AD. GHEORGHIU.

Soluție dată de D-nii: S-LT. I. C. PAREPEANU, M. AL. VASILESCU-STABU (Clasa VI-a lic. M. V. Alba-Iulia) și MIRCEA D. POPA (Clasa VIII-a lic. militar Iași).

Fie A, B, C, D, E, F vârfurile patrulaterului complet determinat de dreptele $\Delta_i (i = 1, 2, 3, 4)$ conform figurei.

1. Se unesc punctele I_2 și I_3 cu punctul B. Din patrulaterul ABI_3F inscriptibil în cercul (O_3), rezultă:

$$\sphericalangle I_3BE = \sphericalangle I_3FA. \tag{1}$$



Din patrulaterul $CBEI_2$ inscriptibil în cercul (O_2), rezultă:

$$\sphericalangle I_2CD = \sphericalangle I_2BE. \tag{2}$$

Dar:

$$\sphericalangle I_2CE = \sphericalangle I_3FA. \tag{3}$$

In adevăr, prin construcție, I_1, I_2, C ca și I_1, I_3, F fiind colineare, (3) se poate scrie:

$$\sphericalangle I_1CE = \sphericalangle I_1FA \tag{4}$$

ceea ce e evident căci prin ipoteză I_1 se găsește pe cercul $(O_1) \equiv (CDF)$.

Prin urmare:

$$\sphericalangle I_3BE = \sphericalangle I_2BE \qquad (5$$

adică I_2, I_3, B sunt colineare, analog I_3, I_4, A ca și I_4, I_2, E sunt colineare.

Deci dreapta $\Delta_1 = ABE$ *este axa de omologie a triunghiurilor* DEF, (Δ_2, Δ_3, Δ_4) *și* $I_2I_3I_4$ *oricare ar fi centrul lor de omologie* I_1 *pe cercul* (O_1).

2. Din patrulaterul AFI_3B inscriptibil în cercul (O_3) rezultă:

$$\sphericalangle AFB = \sphericalangle AI_3B, \qquad (6)$$

iar din patrulaterul BCI_2E inscriptibil în cercul (O_2) rezultă:

$$\sphericalangle BCE = \sphericalangle BI_2E \qquad (7)$$

și deci opusele lor la vârfuri:

$$\sphericalangle DCF = \sphericalangle I_3I_2I_4. \qquad (8)$$

Atunci, din (6) și (8) rezultă că triunghiurile $T_1 = DCF$ și $I_2I_3I_4$ sunt asemenea și sunt *direct asemenea* fiind la fel orientate în plan: contururile parcurse în sensul laturilor omoloage lasă ariile respective de aceeași parte. *Centrul de similitudine* este M, căci M este al doilea punct de intersecție, de exemplu, al cercurilor (O_2) și (O_4) determinate respectiv de punctele omoloage C și I_2, D și I_4 și de intersecția E a laturilor omoloage CD și I_2I_4, conform construcției cunoscute.

3. Din patrulaterul CI_1FD inscriptibil în cercul (O_1) rezultă:

$$\sphericalangle CI_1D = \sphericalangle DFC = (\Delta_2, \Delta_4). \qquad (9)$$

Din patrulaterul AFI_3B inscriptibil în cercul (O_3) rezultă:

$$\sphericalangle AI_3B = \sphericalangle AFB = (\Delta_2, \Delta_4). \qquad (10)$$

Deci:

$$\sphericalangle CI_1D = \sphericalangle AI_3D$$

sau ceea ce e tot una:

$$\sphericalangle I_2I_1I_4 = \sphericalangle I_2I_3I_4. \qquad (11)$$

Deci patrupunctul $I_1I_2I_3I_4$ *este inscriptibil.*

M fiind centrul de similitudine al triunghiurilor $T_1 = DCF$ și $I_2I_3I_4$ rezultă imediat:

$$\sphericalangle CMD = \sphericalangle I_2MI_4, \ldots \qquad (12)$$

pe de altă parte:

$$\sphericalangle CMD = \sphericalangle CI_1D = \sphericalangle I_2I_1I_4 \quad (13)$$

deci:

$$\sphericalangle I_2MI_4 = \sphericalangle I_2I_1I_4 \quad (14)$$

adică M se găseşte pe cercul $I_1I_2I_4$ care am văzut conţine şi pe I_3, adică *cercul* $(\omega) \equiv (I_1I_2I_3I_4)$ *trece prin* M, *punctul lui* MIQUEL *al patrulaterului.*

4. Fie ω centrul acestui cerc. Dreptele $O_1\omega$ şi $O_2\omega$ sunt respectiv perpendiculare pe mijloacele lui MI_1 şi MI_2, deci:

$$\sphericalangle O_1\omega O_2 = \sphericalangle I_1MI_2 \quad (15)$$

sau pentrucă patrulaterul $I_1MI_2I_3$ este inscriptibil în cercul (ω):

$$\sphericalangle O_1\omega O_2 = 180^0 - \sphericalangle I_1I_3I_2. \quad (16)$$

Pe de altă parte dreptele O_1O_3 şi O_2O_3 fiind perpendiculare pe coardele comune MF şi MB respectiv avem:

$$\sphericalangle O_1O_3O_2 = 180^0 - \sphericalangle BMF, \quad (17)$$

dar din patrulaterul BMFA inscriptibil în cercul (O_3):

$$\sphericalangle BMF = 180^0 - \sphericalangle BAF,$$

iar

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle I_1I_3I_2$$

din patrulaterul ABI_3F inscriptibil în cercul (O_3) deci (17) devine:

$$\sphericalangle O_1O_3O_2 = \sphericalangle I_1I_3I_2 \quad (18)$$

comparând cu (16) rezultă că $\sphericalangle O_1\omega O_2$ şi $\sphericalangle O_1O_3O_2$ fiind suplimentare, punctele ω, O_1, O_2, O_3 sunt conciclice. Dar cercul determinat de O_1, O_2, O_3 trece şi prin O_4 şi prin M fiind după cum se ştie cercul lui MIQUEL al patrulaterului dat, *deci* ω *centrul cercului* $I_1I_2I_3I_4$ *se găseşte pe cercul lui* MIQUEL *al patrulaterului.*

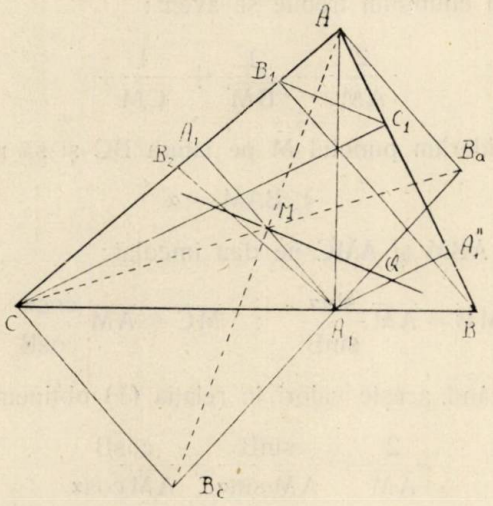
PROBLEMA 4846. *Fie* $A_1B_1C_1$ *şi* $A_2B_2C_2$ *triunghiul ortic şi triunghiul median al triunghiului* ABC. *Perpendiculara dusă prin* A_1 *pe* A_1B_2 *intersectează perpendicularele duse prin* A *şi* C *pe* AC *respectiv în punctele* B_a *şi* B_c, *iar perpendiculara dusă tot prin* A_1 *pe* A_1C_2 *intersectează perpendicularele duse prin* A *şi* B *pe* AB *respectiv în* C'_a *şi* C'_b. *Fie* $M(AB_c, CB_a)$ *şi* $Q(AC'_b, BC'_a)$.

Dacă N *şi* P *sunt analoagele lui* M, *iar* R *şi* S *analoagele lui* Q *în raport cu* B_1 *şi* C_1, *să se arate că triunghiul format de dreptele* MQ, NR *şi* PS *este ortologic cu triunghiul* ABC.

TEODOR G. COCEA.

Soluție dată de D-l M. AL. VASILESCU-STABU (lic. Alba-Iulia).

Să construim punctul M așa cum cere enunțul: el este intersecția diagonalelor trapezului $ACB_c B_a$. Deoarece B_2 este mijlocul laturei și A_1B_2 perpendiculară pe $B_a B_c$, punctul M se găsește la mijlocul perpendicularei A_1A_1' pe AC (E. G. par F. G. M. Nr. 1246 b). Deci punctele M, Q, N, R, P, S sunt mijloacele perpendicularelor duse din punctele A_1, B_1, C_1 pe laturile triunghiului ABC.



Să ne ocupăm de latura MQ. Pentru aceasta proiectăm pe A_1 în A_1' pe AC și în A_1'' pe AB. Dreapta $A_1'A_1''$ este evident paralelă cu B_1C_1. Atunci dreapta MQ unind mijloacele laturilor A_1A_1', A_1A_1'' este paralela cu latura $A_1'A_1''$ deci paralelă cu B_1C_1 și antiparalelă cu latura BC.

Perpendiculara dusă din A pe MQ este și perpendiculara dusă din A pe B_1C_1 și se știe că trece prin centrul **O** al cercului circumscris lui ABC. La fel perpendicularele din B, C pe laturile NR și PS. Aceste perpendiculare fiind concurente în **O**, triunghiurile sunt ortologice.

q. e. d.

G. D. S.

PROBLEMA 5039. *Să se determine un punct* M *pe ipotenuza* BC *a unui triunghiu dreptunghiu* ABC, *astfel încât* AM *să fie media armonică a segmentelor* BM *şi* MC.

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţie dată de D-nii: HORIA M. BODNĂRESCU (bacalaureat) şi GH. B. N. IONESCU (elev inginer).

Conform enunţului trebue să avem:

$$(1) \qquad \frac{2}{\overline{AM}} = \frac{1}{\overline{BM}} + \frac{1}{\overline{CM}}.$$

Să considerăm punctul M pe latura BC şi să notăm

$$\sphericalangle BAM = \alpha.$$

Triunghiurile ABM şi AMC ne dau imediat:

$$(2) \qquad \overline{MB} = \overline{AM}\frac{\sin\alpha}{\sin B} \quad ; \quad \overline{MC} = \overline{AM}\frac{\cos\alpha}{\cos B}.$$

Introducând aceste valori în relaţia (1) obţinem:

$$\frac{2}{\overline{AM}} = \frac{\sin B}{\overline{AM}\sin\alpha} + \frac{\cos B}{\overline{AM}\cos\alpha}$$

sau înmulţind cu $\overline{AM}$ şi gonind numitorii:

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin B\cos\alpha + \cos B\sin\alpha$$

$$(3) \qquad \therefore \quad \sin 2\alpha = \sin(B+\alpha),$$

care este ecuaţia trigonometrică a problemei.

Soluţiile acestei ecuaţii sunt:

$$2\alpha = 2k\pi + B + \alpha \quad \text{şi} \quad 2\alpha = 2k\pi + \pi - (B+\alpha)$$

$$(4) \qquad \therefore \quad \alpha = 2k\pi + B \quad \text{şi} \quad \alpha = \frac{2k\pi + \pi - B}{3}.$$

Prima formulă din (4) ne arată că $\alpha = B$, deci AM este mediană, lucru evident relaţia (1) fiind satisfăcută. Nu e o soluţie propriu zisă.

A doua formulă din (4) ne dă:

$$\text{pentru } k=0 \quad \alpha_0 = \frac{\pi - B}{3}$$

$$\text{„ } \quad k=1 \quad \alpha_1 = \pi - \frac{B}{3}$$

$$\text{„ } \quad k=2 \quad \alpha_2 = \pi + \frac{2\pi - B}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{C}{3},$$

iar pentru $k > 2$ valorile se repetă.

Aşa dar sunt 4 soluţii distincte, din care în una media armonică se confundă cu media aritmetică. Să notăm cu M_0, M_1, M_2 punctele de pe BC corespunzătoare soluţiilor α_0, α_1, α_2, iar prelungirile laturilor AB, AC respectiv cu BX şi CY. Pentru precizarea poziţiilor lui M_0, M_1, M_2 să împărţim unghiurile B, C, CBX în trei părţi egale (construcţia nu e posibilă cu rigla şi compasul). Rezultă:

AM_0 e paralelă dreptei ce face cu BX unghiul $\frac{\pi - B}{3}$

AM_1 „ „ „ „ „ „ BA „ $\frac{B}{3}$

AM_2 „ „ „ „ „ „ CA „ $\frac{C}{3}$.

Au rezolvat problema, găsind numai 2 soluţii, D-nii: ORIGEN MĂRCULESCU (Craiova), S-LT. M. GRUMĂZESCU, DINU D. BUZNEA (Liceul militar „N. Filipescu"), ALEX. I. ROHR, MIRCEA D. POPA şi ACHILE PETRESCU (Liceul militar Iaşi).

Observaţiuni. 1°. D-nii ORIGEN MĂRCULESCU şi ACHILE PETRESCU au trimis şi soluţiuni geometrice interesante bazate pe diviziunea armonică, însă nu au găsit decât punctele M_1 sau M_2. Aşteptăm soluţia geometrică întreagă pentru a o publica sub formă de notă.

2°. Se observă că $\sphericalangle M_1AM_2 = 120°$, iar AM_0 e bisectoarea lui.

PROBLEMA 5118. *Se dă cuartica*

(C) $(x^2+y^2)^2-(2a^2-1)\,x^2-(2a^2+1)\,y^2=0$

şi se consideră un punct M *pe iperbola echilateră* $x^2-y^2=a^4$. *Prin* M *se duce o secantă care taie cuartica* (C) *în* M_1, M_2, M_3, M_4. *Să se demonstreze că produsul*

$$MM_1\,.\,MM_2\,.\,MM_3\,.\,MM_4$$

este egal cu puterea a patra a tangentei dusă din punctul M *la cercul*

$$x^2+y^2=a^2.$$

M. GHERMĂNESCU.

Soluţie dată de D-nii: BODNĂRESCU HORIA (student Politehnica Bucureşti), FILA EUGEN (student, Cluj), POPA D. MIRCEA (absolvent de liceu) şi D. RIPIANU.

Fie M (λ, μ) un punct depe iperbola echilateră dată; avem deci

$$\lambda^2-\mu^2=a^4.$$

Un punct al unei secante dusă prin M are coordonatele

$$x=\lambda+r\cos\alpha\quad,\quad y=\mu+r\sin\alpha,$$

unde r este distanţa dela M la acel punct.

Scriind că acest punct se găseşte pe cuartica dată, obţinem o ecuaţie de gradul patru în r, ale cărei rădăcini sunt tocmai lungimile MM_i.

Ori primul termen este r^4, iar ultimul este

$$(\lambda^2+\mu^2)^2-(2a^2-1)\,\lambda^2-(2a^2+1)\,\mu^2=$$

$$(\lambda^2+\mu^2)^2-2a^2\,(\lambda^2+\mu^2)+\lambda^2-\mu^2=(\lambda^2+\mu^2-a^2)^2,$$

deoarece $\lambda^2-\mu^2=a^4$. Vom avea deci

$$MM_1\,.\,MM_2\,.\,MM_3\,.\,MM_4=(\lambda^2+\mu^2-a^2)^2$$

şi este evident că membrul al doilea reprezintă tocmai patratul puterii punctului M faţă de cercul dat.

Notă. Problema a fost propusă ca o aplicaţie a articolului D-lui S. KAUFMANN „Asupra unor curbe algebrice" din G. M. XXII, pag. 149, în care D-sa găseşte că curbele de ecuaţie

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^n + \text{polinom de grad} \leqslant 2n - 1$$

se bucură de proprietatea că produsul distanţelor unui punct M (λ, μ) la intersecţiile unei secante duse prin M cu curba este constant şi egal cu $f(\lambda, \mu)$.

Mai târziu am descoperit că aceste curbe fuseseră descoperite pentru prima oară de LAGUERRE.

Intre timp, folosind rezultatul D-lui S. KAUFMANN, am extins noţiunea „ax radical" la curbele de mai sus, precum şi în spaţiu, în articolul „Generalizarea axului radical" din G. M. XXIII, pag. 265.

M. G.

PROBLEMA 5237. *Două bare* AB *şi* AC *de lungime* l, *de greutate* G, *situate în acelaşi plan vertical* P, *sunt articulate între ele în punctul fix* A *şi au capetele* B *şi* C *prinse cu un fir de lungime* a. *Presupunând că planul* P *se roteşte cu iuţeală constantă* ω, *în jurul verticalei punctului* A, *să se determine minimul acestei iuţeli astfel încât firul să fie întins.*

In cazul unei iuţeli de rotaţie superioare celei determinate mai sus, să se calculeze tensiunea în fir, reacţiunea între bare şi reacţiunea din A.

GABRIELA ŢIŢEICA.

Soluţie dată de D-l C. D. EFTIMIE student la Politehnica din Bucureşti.

Studiem echilibrul barei AB, care va fi, atât din punct de vedere al forţelor cât şi al poziţiei, simetrică cu AC, faţă de axa de rotaţie verticală O*y*.

Asupra barei AB lucrează:

1°. Greutatea sa G, la mijlocul barei.

2°. Reacţiunea R între bare în A, orizontală.

3°. Reacţiunea S de sprijin în A, verticală.

4°. Tensiunea T, a firului BC, care este în direcţia dela B la *b*.

5°. Forţa centrifugă F, orizontală.

Pentru a afla valoarea lui F, facem suma tuturor forţelor centrifuge elementare a tuturor punctelor barei:

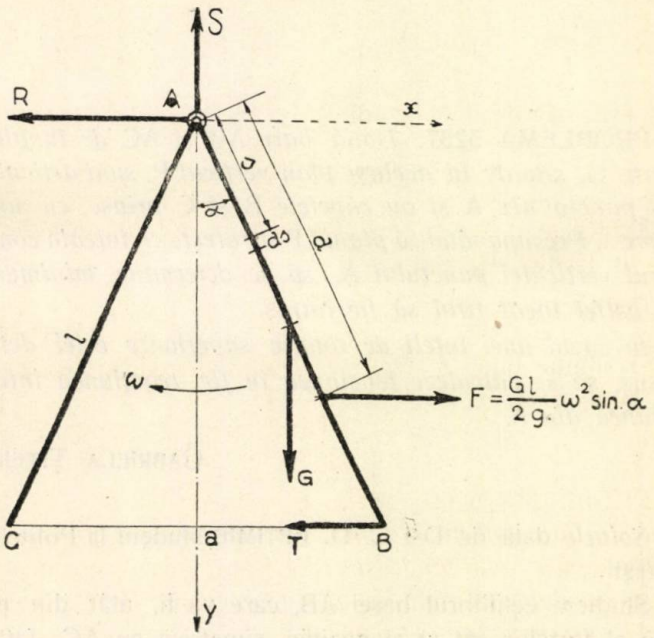
$$F = \Sigma\, dF = \Sigma\, \mu ds \,.\, s \sin\alpha\, \omega^2 = \int_0^l \mu\omega^2 \sin\alpha\, s\, ds = \frac{\mu l^2}{2}\, \omega^2 \sin\alpha$$

μ fiind massa unei unităţi de lungime

$$\mu l = \frac{G}{g}$$

deci

$$F = \frac{Gl}{2g}\, \omega^2 \sin\alpha.$$



Pentru aflarea punctului de aplicare al forţei centrifuge, facem suma tuturor momentelor elementare faţă de A

$$\mu \sin\alpha \cos\alpha\, \omega^2 \int_0^l s^2\, ds = \frac{Gl}{2g}\, \omega^2 \sin\alpha\, d \cos\alpha$$

găsim

$$d = \frac{2l}{3}.$$

Scriind suma tuturor proecţiilor forţelor pe axa Ox, găsim:

$$-R-T+\frac{Gl}{2g}\omega^2\sin\alpha=0.$$

Proecţiile pe axa Oy:

$$S-G=0.$$

Suma momentelor faţă de A

$$-\frac{G}{2}l\sin\alpha+\frac{G}{2g}\omega^2 l\sin\alpha\cdot\frac{2l}{3}\cos\alpha-Tl\cos\alpha=0.$$

De aci:

$$T=G\sin\alpha\left[\frac{\omega^2 l}{3g}-\frac{1}{2\cos\alpha}\right]$$

$$R=\frac{G}{2}\sin\alpha\left[\frac{\omega^2 l}{3g}+\frac{1}{\cos\alpha}\right]$$

ω_{minim} este dat de $T=0$, adică

$$\omega^2_{min.}=\frac{3g}{2l\cos\alpha}.$$

Pentru $\omega>\omega_{min.}$, reacţiunile dintre bare şi tensiunile firului sunt cele găsite mai sus.

Pentru a avea datele problemei înlocuim $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{\sqrt{4l^2-a^2}}$.

O soluţie bună s'a primit dela D-l DRĂGHICESCU PAUL, elev liceul Militar Iaşi.

G. Ţ.

PROBLEMA 5260. *Se dă un pătrat* ABCD. *Fie* $A_1B_1C_1D_1$ *mijloacele laturilor lui. Se unesc vârfurile pătratului cu mijlocul laturilor opuse, obţinându-se astfel, în interiorul pătratului, un octogon regulat* abcdefgh. *Se cere a se calcula direct, fără a folosi relaţiile cunoscute între elementele unui octogon regulat, suprafaţa acestui octogon în funcţiune de latura pătratului dat.*

ION S. ANTONIU.

Soluţie dată de D-l IOAN A. BADEA, elev în cl. VII-a, Liceul „A. Şaguna", Braşov.

Suprafaţa octogonului va fi egală cu de opt ori suprafaţa unui triunghiu format din 2 raze şi o latură. Vom avea deci

$$S_8=8S_3.$$

Dar

$$S_8 = \frac{1}{2}\,\overline{Ob} \times \overline{aa'}$$

$$\therefore \quad S_8 = 4\,\overline{Ob} \times \overline{aa'}.$$

Va trebui deci să determinăm pe $\overline{Ob}$ şi $\overline{aa'}$ în funcţiune de mărimea laturii L a patratului.

Din triunghiurile dreptunghice asemenea ABB_1 şi AA_1a avem

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{aA_1}}{\overline{B_1B}}$$

$$\therefore \quad \overline{aA_1} = \overline{B_1B} \times \frac{\overline{AA_1}}{\overline{AB}}.$$

Dar

$$\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \frac{1}{2}\,L$$

şi

$$\overline{AB} = L$$

$$\therefore \quad \overline{aA_1} = \frac{1}{4}\,L.$$

cum

$$\overline{OA_1} = \overline{BB_1}$$

$$\therefore \quad \boxed{\overline{Oa} = \frac{1}{4}\,L = \overline{Ob}}.$$

In triunghiul dreptunghiu aOc avem

$$\overline{Oa}^2 + \overline{Oc}^2 = \overline{ac}^2;$$

cum

$$\overline{Oa} = \overline{Oc} = \overline{Ob} = \frac{1}{4}\,L$$

$$\therefore \quad \overline{ac}^2 = \frac{1}{8}\,L^2$$

$$\therefore \quad ac = \frac{\sqrt{2}}{4}\,L.$$

Dreapta $\overline{ac}$ fiind o coardă perpendiculară pe raza $\overline{Ob}$,

$$\therefore \quad \boxed{\overline{aa'} = \frac{1}{2}\,\overline{ac} = \frac{\sqrt{2}}{8}\,L}.$$

Suprafața octogonului va fi deci

$$S_8 = 4 \times \overline{Ob} \times \overline{aa'} = 4 \times \frac{1}{4} L \times \frac{\sqrt{2}}{8} L = \frac{\sqrt{2}}{8} L^2$$

$$\boxed{S_8 = \frac{\sqrt{2}}{8} L^2}.$$

Observațiuni. 1°. Mai trebuia să demonstrăm că

$$\overline{ac} \perp \overline{Ob}.$$

Triunghiul dBh esse isoscel în B, dreapta $\overline{OB}$ fiind înălțime în acest triunghiu, dreptele $\overline{dh}$ și $\overline{OB}$ fiind perpendiculare ca diagonale în pătratul ABCD, iar Oh și Od fiind egale între ele ca raze ale octogonului regulat. In acest triunghiu avem deci

$$\overline{cd} = \overline{ah}$$
$$\therefore \quad \overline{ac} \parallel \overline{dh}$$
$$\therefore \quad \overline{ac} \perp \overline{Ob}$$

căci

$$\overline{dh} \perp \overline{Ob}$$

ca diagonale.

2°. La această problemă, atât de elementară, s'au mai primit încă 9 soluțiuni, toate greșite; numele rezolvitorilor au fost anunțate pe coperta Gazetei. Dintre acestea menționăm totuși soluția Domnișoarei LYDIA M. TUDORAN, elevă în clasa V-a a Școlei Centrale de fete din București, ca model de redactare îngrijită și pe a D-lui EUG. GH. VIJELIE, elev în clasa VII-a a Liceului Militar dela Mânăstirea Dealu, ca metodă folosită. Cu puțină atenție, soluțiile D-lor ar fi fost bune. Deasemenea trebue să menționăm trei soluții „identice" și „identic" greșite a trei elevi din clasa VIII-a a Liceului Militar Iași.

I. S. A.

PROBLEMA 5270. *Pentru a nu fi văzut de creditorul său, aflat în mișcare uniformă pe o stradă rectilinie, un debitor caută să se ascundă cât mai bine în spatele unui chioșc circular.*

Se presupun cunoscute elementele geometrice, iuțeala creditorului și greutatea debitorului.

1°. *Să se studieze mișcarea obligatorie de rotație a debitorului în jurul chioșcului.*

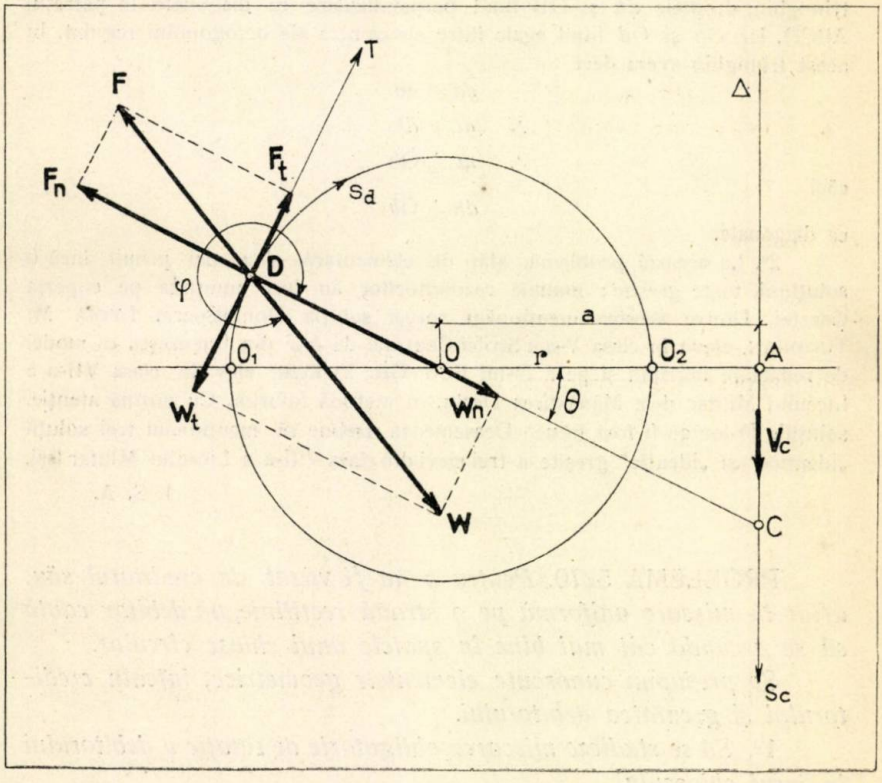
2°. *Să se verifice existența unei providențe care pedepsește pe răii platnici, prin calculul forțelor de inerție ce caută să trântească la pământ pe debitor.*

3°. *Să se determine maximele acestor forțe.*

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluție dată de Domnul VIRGIL ECKSTEIN.

Fie O chioșcul circular, în spatele căruia se ascunde debitorul D și dreapta Δ traectoria rectilinie a creditorului C. Să notăm cu r raza cercului descris de debitor, cu a distanța OA dela centrul O la dreapta Δ, cu v_c iuțeala constantă a creditorului. Faptul că debitorul se ascunde *cât mai bine* în spatele chioșcului se traduce prin condiția geometrică ca punctele D, O și C să fie *coliniare*. Am stabilit astfel corespondența dintre pozițiile D și C ale debitorului și creditorului.



Alegând origina timpului când creditorul se află în A avem:

$$AC = s_c = v_c\, t.$$

Notând $\sphericalangle AOC = \theta$:

$$s_c = v_c\, t = a\, \mathrm{tg}\theta \qquad \mathrm{tg}\theta = \frac{v_c\, t}{a}.$$

Rezultă:

$$\text{arc } O_1D = s_d = r\theta = r \text{ arc tg } \frac{v_c}{a} \cdot t.$$

Cantitatea $\frac{a}{v_c}$ este constantă şi de natura unui timp; putem deci pune:

$$\frac{a}{v_c} = t_0 .$$

Avem deci în definitiv:

$$s_d = r \text{ arc tg} \left(\frac{t}{t_0} \right)$$

pentru ecuaţia mişcării debitorului.

Să studiem această mişcare.

Iuţeala debitorului la momentul t este:

$$v_d = \frac{ds_d}{dt} = \frac{rt_0}{t_0^2 + t^2}$$

cu maximul:

$$v_d \text{ maxim} = \frac{r}{t_0} \text{ pentru } t = 0.$$

Acceleraţiile debitorului după tangenta DT şi normala DO sunt respectiv la momentul t:

$$W_t = \frac{dv_d}{dt} = -\frac{2rt_0 t}{(t_0^2 + t^2)^2}$$

$$W_n = \frac{v_d^2}{\rho} = \frac{v_d^2}{r} = \frac{rt_0^2}{(t_0^2 + t^2)^2}.$$

Iar acceleraţia totală:

$$W = \sqrt{W_t^2 + W_n^2} = \frac{rt_0 \sqrt{t_0^2 + 4t^2}}{(t_0^2 + t^2)^2}.$$

Unghiul φ făcut de această acceleraţie cu normala DO este dat de relaţia

$$\text{tg}\varphi = \frac{W_t}{W_n} = -\frac{2t}{t_0} = -\frac{2v_c t}{a}.$$

Pentru fiecare din acceleraţiile obţinute mai sus corespunde o forţă de inerţie. Astfel avem:

Forţa *de inerţie tangenţială*

$$F_t = -\frac{P}{g} W_t = \frac{2P rt_0 t}{g(t_0^2 + t^2)^2}.$$

Forţa *de inerţie normală* (centrifugă)

$$F_n = -\frac{P}{g} W_n = -\frac{P r t_0^2}{g(t_0^2+t^2)^2}.$$

Forţa *de inerţie totală*

$$F = -\frac{P}{g} W = -\frac{P r t_0 t \sqrt{t_0^2+4t^2}}{g(t_0^2+t^2)^2}.$$

P = greutatea debitorului

g = acceleraţia gravitaţiei.

Mărimile absolute maxime ale acestor forţe se obţin uşor căutând valorile timpului t pentru care li se anulează derivata.

Avem astfel:

$$\frac{dF_t}{dt} = \frac{2Prt_0(t_0^2-3t^2)}{g(t_0^2+t^2)^3} = 0 \qquad t = \frac{1}{\sqrt{3}} t_0.$$

Dar:

$$t = \frac{a}{v_c} \operatorname{tg}\theta \quad ; \quad t_0 = \frac{a}{v_c}.$$

Rezultă:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \theta = 30^0.$$

Valoarea maximă a lui F_t se obţine imediat:

$$|F_t \text{ max.}| = \frac{3\sqrt{3}\,Pr}{8gt_0^2} = \frac{3\sqrt{3}\,Prv_c^2}{8ga^2} \quad \text{pentru } \theta = 30^0.$$

Maximul mărimii absolute a lui F_n are loc evident pentru $t = 0$ adică $\theta = 0$

$$|F_n \text{ max.}| = \frac{Pr}{gt_0^2} = \frac{Prv_c^2}{ga^2} \quad \text{pentru } \theta = 0.$$

Pentru maximul forţei totale F procedăm analog cazului forţei de inerţie tangenţiale

$$\frac{dF}{dt} = \frac{12\,Prt_0t^3}{g(t_0^2+t^2)^3\sqrt{t_0^2+4t^2}} = 0 \qquad t = 0$$

$$|F \text{ max.}| = |F_n \text{ max.}| = \frac{Prv_c^2}{ga^2} \quad \text{pentru } \theta = 0.$$

Ulterior acestor rezultate, Domnul VIRGIL ECKSTEIN încearcă făcând diferite speculaţiuni ştiinţifice şi aplicaţiuni numerice să determine ce ar trebui făcut pentru ca *bietul debitor să cadă neapărat.*

Sugerez în acest sens Domnului VIRGIL ECKSTEIN ideea existenţei unui *strat lucios de polei* împrejurul chioşcului.

S'a mai primit o soluţie parţială dela Domnul POPA D. MIRCEA elev cl. VIII-a Liceul Militar Iaşi.

AL. ST.

EXERCIŢII

10. Se dau în plan un punct fix M şi o curbă Γ pe care se mişcă punctul N. Se cere locul geometric al unui punct P de pe MN ştiind că suma sau diferenţa ordonatelor punctelor N şi P este constantă.

G-L GH. BUICLIU.

R. Fie (λ, μ) coordonatele lui N şi (x, y) ale lui P. Punctul P se va afla la intersecţia dreptelor

$$y = \frac{\mu}{\lambda} x \quad \text{şi} \quad y \pm \mu = a.$$

Eliminând pe λ, μ între aceste ecuaţii şi

$$F(\lambda, \mu) = 0$$

unde $F(x, y) = 0$ este ecuaţia curbei Γ, se găseşte că P descrie curba Γ', de ecuaţie

$$F\left[\frac{\pm x(y-a)}{y}, \pm(y-a)\right] = 0.$$

Acest exerciţiu poate servi la rezolvarea problemei 2038, propusă în *Gazeta Matematică* Vol. XIX pag. 159, unde cuvântul *vârfurile* din ultimul rând al enunţului se înlocueşte prin cuvântul *punctele,* sau unde litera D se înlocueşte prin litera B.

GH. B.

11. Dacă $a + b + c = m + n + p = 0$, avem

$$E = \sum (ma + b + c)(a + nb + c)(a + b + pc) + \sum mnabc = abc\,(mnp - 1).$$

PETRU SIMON.

R. Avem

$$E = \sum [a + b + c + (m-1)a][a + b + c + (n-1)b][a + b + c + (p-1)c]$$
$$= \sum (m-1)(n-1)(p-1)abc = abc\,[mnp - \sum mn + \sum m - 1]$$
$$= abc\,[mnp - \sum mn - 1].$$

PROBLEME PROPUSE

5422. O suprafaţă plană este acoperită complect cu triunghiuri echilaterale. Putem să o acoperim cu pătrate, ori cu pentagoane regulate, ori cu exagoane regulate, fără să rămână nici un spaţiu liber?

I. IONESCU.

5423. Un cunoscut îmi spunea zilele trecute:

— Am avut cândva vârsta egală cu suma cifrelor anului în care mă găsiam şi voi avea odată etatea egală cu produsul cifrelor în care voi fi atunci.

In ce an s'a născut acea persoană?

IOAN B. FLORESCU.

5424. Două numere consecutive de cinci cifre descompuse în factori primi, au formele

$$a^2 . b . 269 \quad \text{şi} \quad c . d . 2663.$$

Care sunt acele numere?

COMANDOR I. LINTEŞ.

5425. Să se rezolve sistemul

$$x^2 - 4u = 24 \; ; \; y^2 - 4v = -16 \; ; \; u^2 + 4y - 2xv = 19;$$
$$v^2 + 4x - 2yu = -21$$

şi să se verifice soluţiile.

SUB-LT. AD. POPESCU.

5426. Să se elimine x, y, z, α din egalităţile:

$$\frac{x-a}{x+a} \cdot \frac{y+z}{y-z} = u, \quad \frac{y-\alpha}{y+\alpha} \cdot \frac{z+x}{z-x} = v, \quad \frac{z-\alpha}{z+\alpha} \cdot \frac{z+y}{x-y} = w.$$

I. I. STAMATE.

5427. Să se demonstreze că dacă un criteriu de convergenţă de speţa a doua are o limită, atunci există un criteriu de prima speţă cu aceeaşi limită.

G. G. CONSTANTINESCU.

5428. Fie ABC şi $A_1B_1C_1$ două triunghiuri omologice înscrise într'un cerc O; O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor BOC, COA şi AOB, iar O_1', O_2', O_3' centrele cercurilor B_1OC_1, C_1OA_1, A_1OB_1. Să se arate că triunghiurile $O_1O_2O_3$ şi $O_1'O_2'O_3'$ sunt omologice şi că pe axa lor de omologie se află şi centrele cercurilor AOA_1, BOB_1, COC_1.

THEODOR D. COCEA.

5429. Fie ABC un triunghiu oarecare, înscris în cercul O. Înălţimile AA', BB', CC' ale triunghiului ABC taie cercul O respectiv în A_1, B_1, C_1. Dacă $A_2B_2C_2$ este triunghiul format de ortopolurile laturilor triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu triunghiul ABC, să se arate că:

1°. Dreptele A_2A', B_2B', C_2C' sunt concurente;

2°. Triunghiurile A'B'C' şi $A_2B_2C_2$ sunt ortologice;

3°. Dreapta B'C' taie cercul O în C_a' şi B_a', iar dreapta B_2C_2 taie acelaşi cerc în M_a şi N_a. Dreptele lui SIMSON în raport cu triunghiul ABC a punctelor C_a', B_a' şi M_a, N_a se întâlnesc respectiv în două puncte, ce sunt pe o dreaptă perpendiculară pe direcţia dreptelor B'C' şi B_2C_2.

GHEORGHE I. BALABAN.

5430. Fie I, A', B', C' centrul cercului înscris şi punctele de contact cu laturile BC, CA, AB. Dreapta BI intersectează dreptele B'A', B'C' în punctele B_c, B_a. Analog se capătă punctele C_a, C_b; A_b, A_c. Triunghiul format de intersecţiile dreptelor A_bB_a, B_cC_b, B_cC_a coincide cu triunghiul complectar al lui ABC.

OCTAVIAN GH. RĂDULESCU.

5431. Fie punctele M şi M' pe cercul O, circumscris triunghiului ABC şi Δ, Δ' dreptele lui SIMSON ale punctelor M, M' faţă de triunghiul ABC. Fie încă M_a, M_b, M_c şi M_a', M_b', M_c' proiecţiile punctelor M şi M' respectiv pe laturile BC, CA, AB. Dacă N este intersecţia dreptelor Δ, Δ' şi dacă punctul A este mobil pe cercul O, punctele B, C, M, M' fiind fixe, să se arate că:

1°. Locurile punctelor M_b, M_b', M_c, M_c', N sunt cinci cercuri (M_b); (M_b'); (M_c); (M_c'); (N).

2°. Cercurile (M_b), (M_b'), (N) trec printr'un punct P_b, iar cercurile (M_c), (M_c'), (N) trec printr'un punct P_c.

3°. Punctele P_b şi P_c se găsesc pe dreapta MM'.

HORIA M. BODNĂRESCU.

5432. Se consideră parabola (π) şi hiperbola echilateră (H) astfel ca tangenta la vârf a parabolei să fie asimptotă hiperbolei. Să se demonstreze că:

1°. Există triunghiuri (T) înscrise în hiperbola (H) şi circumscrise parabolei (π).

2°. Cercurile circumscrise triunghiurilor (T) acelaşi ax radical.

ŞERBAN GHEORGHIU.

5433. Pe ipotenuza BC a unui triunghiu dreptunghiu ABC se iau punctele D şi E dela B către C. Notăm

$$\sphericalangle BAD = \alpha \ ; \ \sphericalangle DAE = \beta \ ; \ \sphericalangle EAC = \gamma.$$

Să se determine segmentele $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EC}$ şi unghiurile α, β, γ astfel ca atât unele cât şi altele să fie în progresie aritmetică.

Aplicaţie: Triunghiul ABC are laturile proporţionale cu numerele 3, 4, 5.

GH. D. SIMIONESCU.

5434. Într'un triunghiu ABC medianele BB' şi CC' fac respectiv unghiurile β şi γ cu latura BC.

Să se arate că avem relaţia:

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)} = 3 \cdot \frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}.$$

O. N. ŢINO.

5435. Să se calculeze integrala

$$I = \int \frac{x^{12}+1}{x^{12}-1}\,dx.$$

Să se scrie rezultatul sub forma cea mai simplă.

GH. TH. GHEORGHIU.

5436. Se cunoaşte modul de a calcula adâncimea unui puţ, în cazul când ţinem seama de iuţeala sunetului, dar neglijăm rezistenţa aerului, prin măsurarea timpului de când lăsăm să cadă un obiect şi până când auzim sgomotul lovirii obiectului de fundul puţului.

Să se deducă din studiul acestei probleme valoarea limitei:

$$y = \lim_{x=\infty} \left[x(a+bx) - \sqrt{x^2(a+bx)^2 - a^2x^2}\right].$$

ALEXANDRU STOENESCU.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Andonie Şt. A. (5398); *Andonie Şt. Iancu* (4462, 5369, 95); *Andrievici N. Nicolae* (5256, 66, 369, 78, 95, 416); *Anghelichi E. R.* (5368, 69); *Antoniu S. Ion* (5260); *Badea A. Ion* (5389, 412); *Bakonyi C.* (5407, 16); *Bodnărescu M. Horia* (4368, 452, 5390, 98, 99); *Bogdan Gr. Gh.* (5021, 24, 33, 173); *Boiangiu D. D.* (4993, 95, 5378, 95, 5407); *Boldescu B. P.* (N); *Broşteanu Gh. Gh.* (5307, 19, 69, 86, 99); *Căruntu D. Florin* (5319, 28, 52, 413); *Cetăţeanu Stelian* (4368, 452, 989, 5091, 111, 34, 77, 324, 34, 64, 78, 90, N); *Costinescu C. Al.* (5369); *Cruceru G. Const.* (5364, 407, 09); *Drăghicescu P. Paul* (4368, 452, 667, 5024, 40, 79, 168, 71, 73, 86, 93, 208, 34, 42, 45, 47, 52, 63, 91, 94, 99, 306, 50, 63, 64, 69, 72, 78); *Drăghici Mircea* (5319); *Eckstein V.* (5249, 304); *Eftimie D. C.* (5096, 118, 47, 249, 397, 99, 413, 16, 17); *Eliade Victor* (5323); *Elias F. P.* (5378, 407); *Florescu L. V.* (4452); *Gheorghiu E. Oct.* (5299, 390, 95); *Iacomi D. M.* (4368); *Ivan C. Z.* (5307); *Jipa Corneliu* (4368); *Manoliu G. V.* (4368); *Mihăileanu C. C.* (4667); *Milea C. Const.* (5319, 28, 52, 413); *Negrescu C. Ioan* (4368, 452, 5393, 413); *Nicolau Gr. C.* (5369, 90); *Popa D. Mircea* (4368, 5060, 219, 320, 28, 45, 87, 98, 99, 402); *Popa N. A.* (5021, 173, 400); *Puchiu T. Gh.* (5328, 52, 413); *Radoslav Gh. Ion* (4368, 5363, 64); *Rusu L. Mircea* (5365, 69, 95, 403, 13); *Sandu Gh. Ilie* (4368, 5369); *Săruleşteanu I. Em.* (3965, 5260, 315); *Sbârnea D. Gh.* (4452, 5199, 407, 19); *Şerban A. T.* (4667, 5098, 113); *Şerban C. C.* (5232, 57); *Stoenescu D. Mirel* (4368, 452, 5214, 338, 86, 99); *Teodor A. Şerban* (4280, 5006, 20, 27, 116, 316, 31); *Ţilenschi S.* (N); *Trefilov I. Mihail* (4368, 5023, 156, 264, 77, 307, 19, 25, 66, 86, 90); *Tudoran M. Lydia* (4452, 5323, 48, 50, 52, 64, 69, 90, 95, 407); *Ungureanu P. I.* (4368); *Văduva Dinică* (4368); *Văduva F. Marin* (5356, 69, 407, 09); *Vijelie Gh. Eug.* (4452, 5064, 199, 364, 66, 72, 78, 90, 98); *Voinea P. Radu* (4368, 5369, 72, 77, 89, 95, 96, 413, 15, 16).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică**, ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, III, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*

Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa :

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon : 3-9803).

C. 67.578

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVI

NUMĂRUL 6. — FEBRUARIE 1941

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASTRA"
SIBIIU

SUMARUL

1. Calculul vectorial . . . . . *Dr. Ing. Plautius Andronescu.*
2. Asupra alterării traectoriilor balistice sub influenţa pierderilor de viteză iniţială. *Maior I. Linteş.*
3. Asupra criteriilor de convergenţă Raabe şi Bertrand . . . . . *G. G. Constantinescu.*
4. Insemnări asupra punctului lui Miquel. *Ion Ilie.*
5. Gh. Hergopol . . . . . *Delegaţia Societăţii.*
6. Concursul „Gazetei Matematice" . . . *Delegaţia Societăţii.*
7. Note Matematice: 23 — 29.
8. Bibliografie.
9. Cereri: 299.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 4907, 4947, 5189, 5198, 5215, 5299, 5407.
12. Exerciţii: 12.
13. Probleme propuse: 5437 — 5451.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1941

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **D. Stoica**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1940 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: **53**64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **4**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

CALCULUL VECTORIAL

§. 1. Introducere

Calculul vectorial se compune din două părți: Algebra și Analiza vectorială.

Pentru a scoate în evidență utilitatea acestui calcul, e necesar să ne dăm seamă în primul rând de criteriile după care ne călăuzim la cercetarea științifică a oricărui fenomen din natură.

Cercetarea științifică a unui fenomen, se sprijină pe următoarele trei elemente fundamentale:

1. Mai întâi se stabilesc mărimile care alcătuesc fenomenul; ele pot fi mărimi naturale sau de calcul, de natură scalară sau vectorială.

2. Se urmărește apoi să se stabilească legile, după care mărimile introduse la cercetarea fenomenului, devin funcțiuni de spațiu și de timp.

Cum aceste legi au o structură matematică, înseamnă că prin punctele 1) și 2) se încearcă a se încadra fenomenul dat în structura matematicei.

3. In fine se încearcă a se stabili pe cale experimentală unitățile mărimilor introduse.

Sunt cazuri când unele din unități se fixează în mod arbitrar, cu condiția bineînțeles ca ele să pot fi reproduse orișiunde și orișicând în mod exact, iar altele vor deriva din unitățile fixate arbitrar, în care caz trebue să se cunoască legile după care mărimile se găsesc unite laolaltă. De posibilitatea determinării unităților pe cale experimentală depinde reușita cercetării științifice a fenomenului.

Mărimi scalare. O mărime e de natură scalară, atunci când unitatea ei se exprimă numai prin numărul 1 fără să fie necesar a se indica o direcție și un sens.

Măsura mărimei este numărul care arată de câte ori unitatea ei se cuprinde într'ânsa.

Spre exemplu: Energia (care știm că poartă diferite denumiri după fenomenul în care se manifestă) e o mărime scalară. Așadar: lucrul mecanic, energia potențială, cinetică, moleculară, electrică, magnetică, electromagnetică, căldura sunt mărimi scalare. Deasemeni masa materială, elementul de volum, timpul, temperatura, etc. sunt mărimi scalare.

Variaţia în spaţiu şi în timp a mărimilor scalare, se reprezintă numai prin variaţia valorilor numerice ale lor.

Unitatea mărimei poartă un simbol denumit dimensiunea acelei mărimi.

Mărimi vectoriale. O mărime e de natură vectorială, când unitatea ei posedă pe lângă valoarea numerică 1, o direcţie şi un sens.

Unitatea mărimei se reprezintă aşa dar simbolic printr'un vector denumit „*vector unitar*", iar mărimea însăşi se va reprezenta prin vectorul unitar mărit de atâtea ori cât arată valoarea numerică, adică măsura acelei mărimi.

Exemple de mărimi de natură vectorială sunt: elementul de linie, elementul de suprafaţă, viteza, forţa, densitatea curentului electric.

Prin litere de tipar mari şi mici (A, B, C, *a*, *b*, *c*) vom reprezenta mărimile scalare, iar prin litere cursive mari şi mici ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$) vom reprezenta mărimile vectoriale.

Caracterul scalar sau vectorial ce-l atribuim unei mărimi, se deduce din felul cum acea mărime apare ca o funcţiune de spaţiu şi de timp.

Pe când la o mărime scalară, variaţia se reprezintă numai prin variaţia valoarei numerice a ei, la o mărime vectorială, variaţia poate fi de trei feluri.

Variază în spaţiu şi în timp numai valoarea numerică a ei, direcţia rămânând neschimbată, sau variază numai direcţia, valoarea numerică rămânând neschimbată sau în fine poate varia şi valoarea numerică şi direcţia.

Spre exemplu: vectorul viteză cu care caracterizăm mişcarea unei mase materiale în spaţiu şi în timp, poate apare în spaţiu, dealungul traiectoriei, după cum arată figurile 1, 2 şi 3.

Mai sunt cazuri când caracterul vectorial al unei mărimi se stabileşte prin determinarea experimentală a proiecţiei vectorului în diferite direcţiuni. Spre exemplu intensitatea câmpului magnetic, notată prin $\mathcal{H}$ e o mărime de natură vectorială. Cu ajutorul unei bobine mici fixată la un mâner în poziţia indicată din figura 4, în baza legii inducţiei se determină proiecţia lui $\mathcal{H}$ în direcţia axei bobinei $\mathcal{H}_1$.

Se poate uşor vedea, că locul geometric al vârfului proiecţiei vectorului $\mathfrak{A}$ se găseşte pe o sferă cu $\mathfrak{A}$ ca diametru.

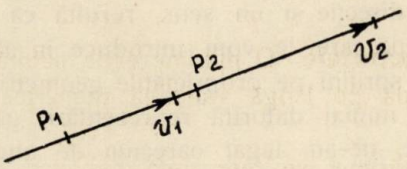


Fig. 1. Mişcare rectilinie accelerată.

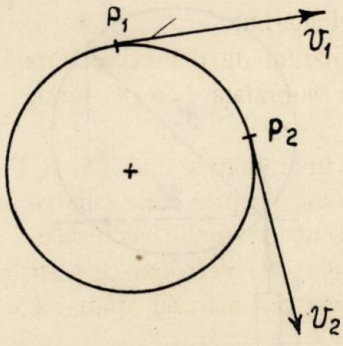


Fig. 2. Mişcare uniform circulară.

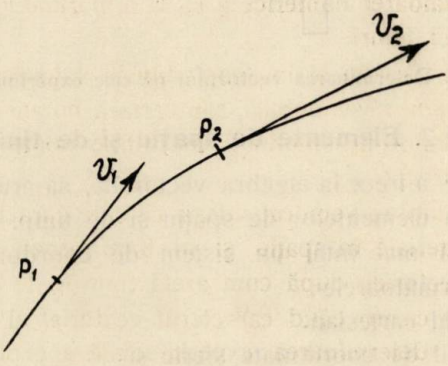


Fig. 3. O mişcare curbilinie generală.

După cum vom vedea mai târziu e suficient să se determine 3 proiecţiuni care să se găsească pe 3 axe ortogonale pentru a putea determina însuşi vectorul.

Din cele arătate până aici, tragem concluzia importantă:

Prin faptul că se dă o interpretare geometrică mărimei de natură vectorială, adică o reprezentăm simbolic printr'un segment de dreaptă cu o direcţie şi un sens, rezultă că o serie întreagă de legi şi reguli pe care le vom introduce în algebra şi analiza vectorială se vor sprijini pe proprietăţile geometrice ale dreptelor. Cu alte cuvinte, numai datorită reprezentării geometrice a unei mărimi vectoriale, ne-am legat oarecum de anumite proprietăţi geometrice ale dreptei, pe care poate nu le-am fi utilizat dacă ne lipseam de reprezentarea grafică a mărimei vectoriale.

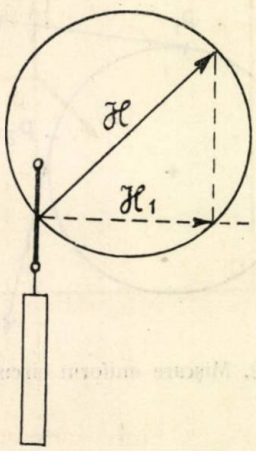


Fig. 4. Determinarea vectorului pe cale experimentală.

§. 2. **Elemente de spaţiu şi de timp**

Inainte de a trece la algebra vectorială, să aruncăm o privire generală asupra elementelor de spaţiu şi de timp.

Se fixează mai întâi un sistem de coordonate. Cele mai utilizate sunt următoarele:

1. Sistemul cartesian.
2. Sistemul de coordonate sferic şi
3. Sistemul de coordonate cilindric.

Trecem la reprezentarea unui punct, precum şi a elementelor de linii şi suprafeţe ortogonale apoi la reprezentarea elementului de volum, cu ajutorul celor trei sisteme de coordonate enumărate anterior.

Fie ξ, η, ζ trei mărimi lineare independente între ele.

La utilizarea sistemului cartesian vom pune:

$$\xi = X \quad , \quad \eta = Y \quad , \quad \zeta = Z$$

ca în figura 5.

Dacă X, Y, Z sunt constante se obţine 3 planuri paralele cu axele.

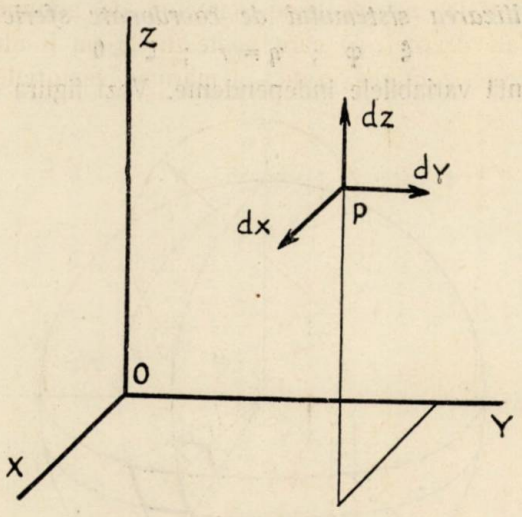


Fig. 5. Sistem cartesian.

Intersecţia celor trei planuri ne dă punctul P.

Elementele de linii ortogonale.

Prin $\left.\begin{matrix} X = \text{const.} \\ Y = \text{const.} \end{matrix}\right\}$ se obţine intersecţia $l_z = z$; elementul de linie e: $dl_z = dz$.

Prin $\left.\begin{matrix} Y = \text{const.} \\ Z = \text{const.} \end{matrix}\right\}$ se obţine intersecţia $l_x = x$; elementul de linie e: $dl_x = dx$.

Prin $\left.\begin{matrix} Z = \text{const.} \\ X = \text{const.} \end{matrix}\right\}$ se obţine intersecţia $l_y = y$; elementul de linie e: $dl_y = dy$.

Din cele ce urmează, vom vedea că numai în sistemul cartesian elementele de linii ortogonale: dl_x, dl_y şi dl_z devin egale cu dx, dy, dz.

Elemente de suprafețe ortogonale.

In baza celor precedente putem scrie:

$$ds_{yz} = dl_y \,.\, dl_z = dy \,.\, dz.$$
$$ds_{zx} = dl_z \,.\, dl_x = dz \,.\, dx.$$
$$ds_{xy} = dl_x \,.\, dl_y = dx \,.\, dy.$$

Elementul de volum.

$$d\sigma = dl_x \,.\, dl_y \,.\, dl_z = dx \,.\, dy \,.\, dz.$$

La utilizarea sistemului de coordonate sferic vom pune:

$$\xi = \varphi \;\; ; \;\; \eta = r \;\; ; \;\; \zeta = \theta$$

care reprezintă variabilele independente. Vezi figura 6.

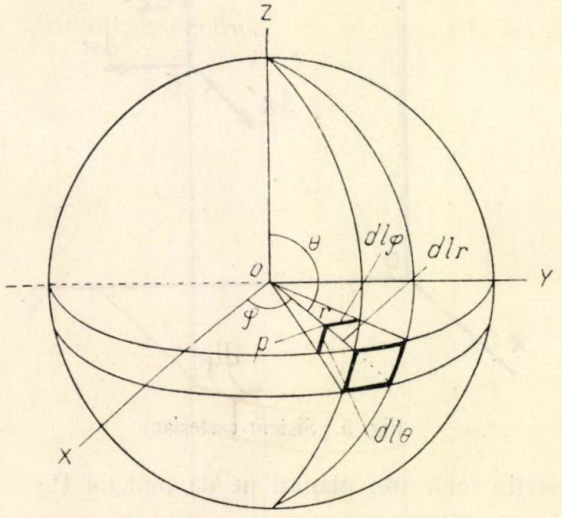


Fig. 6. Sistem de coordonate sferic.

Pentru φ = const. se obține un plan care trece prin axa Z.
Pentru r = const. se obține o sferă cu centrul în O.
Pentru θ = const. se obține un con cu axa Z.
Intersecția celor trei suprafețe ne dă punctul P.

Elemente de linii ortogonale.

Prin φ = const., r = const. se obține l_θ (un cerc meridian). Elementul de linie este: $dl_\theta = r \,.\, d\theta$.

Prin r = const., θ = const. se obține l_φ (un cerc cu centrul pe axa Z). Elementul de linie este: $dl_\varphi = r \,.\, \sin\theta \,.\, d\varphi$.

Prin θ = const., φ = const. se obține l_r (o dreaptă). Elementul de linie este: $dl_r = dr$.

Elemente de suprafețe ortogonale.

$$dS_{r,\theta} = dl_r\, dl_\theta = dr \,.\, r \,.\, d\theta.$$

$$dS_{\theta,\varphi} = dl_\theta\, dl_\varphi = r^2 \sin\theta \,.\, d\theta \,.\, d\varphi.$$

$$dS_{\varphi,r} = dl_\varphi\, dl_r = r \sin\theta\, d\varphi\, dr.$$

Elementul de volum.

$$d\sigma = dl_\varphi \,.\, dl_r \,.\, dl_\theta = r^2 \sin\theta \,.\, d\varphi \,.\, dr \,.\, d\theta.$$

Intre X, Y, Z și φ, r, θ există relațiile:

$$X = r \sin\theta \cos\varphi \quad ; \quad Y = r \,.\, \sin\theta \,.\, \sin\varphi \quad ; \quad Z = r \cos\theta.$$

La utilizarea sistemului de coordonate cilindric.

Vom pune:

$$\xi = \varphi \quad , \quad \eta = \rho \quad , \quad \zeta = z.$$

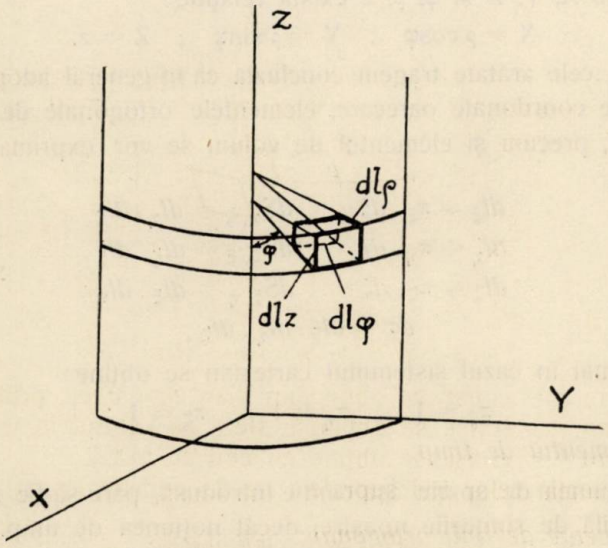


Fig. 7. Sistem de coordonate cilindric.

Pentru φ = const. se obține un plan care trece prin axa Z.
Pentru ρ = const. se obține un cilindru cu axa Z.
Pentru z = const. se obține un plan perpendicular pe axa Z.
Intersecția celor trei suprafețe ne dă punctul P.

Elemente de linii ortogonale.

Prin $\varphi = \text{const.}$, $\rho = \text{const.}$ se obţine l_z (o dreaptă paralelă cu axa Z). Elementul de linie este: $dl_z = dz$.

Prin $\rho = \text{const.}$, $z = \text{const.}$ se obţine l_φ (un cerc). Elementul de linie este: $dl_\varphi = \rho d\varphi$.

Prin $z = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$ se obţine l_ρ (o dreaptă). Elementul de linie este: $dl_\rho = d\rho$.

Elemente de suprafeţe ortogonale.

$$dS_{\rho,z} = dl_\rho \cdot dl_z = d\rho \cdot dz.$$
$$dS_{z,\varphi} = dl_z \cdot dl_\varphi = \rho \cdot dz \cdot d\varphi.$$
$$dS_{\varphi,\rho} = dl_\varphi \cdot dl_\rho = \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho.$$

Elementul de volum.

$$d\sigma = dl_\varphi \cdot dl_\rho \cdot dl_z = \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho \cdot dz.$$

Intre X, Y, Z şi φ, ρ, z există relaţiile:

$$X = \rho \cos\varphi \quad ; \quad Y = \rho \sin\varphi \quad ; \quad Z = z.$$

Din cele arătate tragem concluzia că în general adoptând un sistem de coordonate oarecare, elementele ortogonale de linii, de suprafeţe, precum şi elementul de volum se vor exprima în felul următor:

$$dl_\xi = \pi_\xi \cdot d\xi \qquad dS_{\eta,\zeta} = dl_\eta \cdot dl_\zeta$$
$$dl_\eta = \pi_\eta \cdot d\eta \qquad dS_{\zeta,\xi} = dl_\zeta \cdot dl_\xi$$
$$dl_\zeta = \pi_\zeta \cdot d\zeta \qquad dS_{\xi,\eta} = dl_\xi \cdot dl_\eta$$
$$d\sigma = dl_\xi \cdot dl_\eta \cdot dl_\zeta.$$

Numai în cazul sistemului cartesian se obţine:

$$\pi_\xi = 1 \quad , \quad \pi_\eta = 1 \quad , \quad \pi_\zeta = 1.$$

Elementul de timp.

Noţiunea de spaţiu aşa cum e introdusă, pare să fie mai uşor perceptibilă de simţurile noastre, decât noţiunea de timp.

Timpul aşa cum îl percepem noi, reprezintă o mărime cinematică. Ne închipuim o anumită mişcare uniformă circulară efectuată de un punct fizic şi o tură complectă, o putem considera ca o unitate de timp. In cazul acesta, condiţia pe care trebue să o îndeplinească unitatea de timp e satisfăcută, adică oriunde şi orişicând putem reproduce exact aceea unitate. Bineînţeles printr'o

împărţire într'un număr de părţi egale a cercului dat se va obţine unitatea fracţionară de timp. Un element infinitesimal din acea traiectorie formează un element de timp.

Senzaţia de mişcare uniformă o avem datorită rotaţiei pământului în jurul axei sale.

Odată ce ne-am stabilit o mişcare uniformă circulară ca unitate de timp, vom putea urmări orice mişcare în natură, comparând-o cu mişcarea uniformă circulară de mai sus.

In felul acesta, timpul apare ca o mărime absolută, independentă de orice sistem de coordonate. LORENZ şi EINSTEIN atribuesc timpului pe lângă caracterul cinematic şi un caracter fizic, deoarece ei arată că timpul ia parte integrantă la fixarea spaţiului. Ca urmare se introduce noţiunea spaţiului cu patru dimensiuni.

(Va urma)

DR. ING. PLAUTIUS ANDRONESCU
Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara.

ASUPRA ALTERĂRII TRAECTORIILOR BALISTICE SUB INFLUENŢA PIERDERILOR DE VITEZĂ INIŢIALA

Alterarea în general:

Se ştie din Balistica Exterioară (ecuaţiunile principale şi ecuaţia odografului) că variaţiunile coordonatelor unui punct de pe traectorie pentru o scădere a vitezei iniţiale cu dv_0 sunt:

$$(1) \qquad \begin{cases} dx = -\dfrac{\sigma^2}{Cy} \cdot \dfrac{W \,.\, dW}{F(w)} \\ dy = dx \,.\, \operatorname{tg}\theta \end{cases}$$

unde avem:

$$2) \qquad W = \frac{V \,.\, \cos\theta}{\cos\alpha} \cdot \frac{s_0}{s}$$

ştiind că traectoria dată are drept elemente iniţiale V_0 viteză iniţială, α unghiu de tragere, s_0 viteza sunetului la sol; iar drept elemente ale punctului considerat sunt: V viteza tangenţială, θ înclinarea tangentei, s viteza sunetului, Cy coeficientul balistic, iar σ şi γ doi cari pot fi consideraţi, în cazul de faţă, sensibil constanţi.

In sfârşit funcţiunea $F(w)$ este cunoscută funcţie de viteză stabilită pe cale experimentală.

Considerăm acum două puncte A_1 şi A_2 pe o traiectorie, unul pe ramura urcătoare, altul pe ramura coborîtoare şi ale căror variaţiuni vor fi (dx_1, dy_1) şi (dx_2, dy_2), pentru o pierdere de viteză iniţială dv_0. Atunci cum componenta orizontală descreşte aproape linear faţă de abscisă, urmează că vom avea: $dw_1 \leqslant dw_2$ deci putem considera chiar că:

$$dw_1 = \frac{dw_2}{k_1} \quad \text{unde} \quad k_1 > 1.$$

Cum deasemenea Cy, în cazul de faţă, depinde numai de densitate, variind direct proporţional şi cum densitatea descreşte cu altitudinea, urmează că dacă admitem $y_1 > y_2$ atunci $\Delta_1 < \Delta_2$ adică:

$$Cy_1 = \frac{Cy_2}{k_2} \quad \text{unde} \quad k_2 > 1.$$

In consecinţă se observă uşor că:

$$3) \qquad \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{1}{k_1 \cdot k_2} \cdot \frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{F(w_2)}{F(w_1)} .$$

Inlocuind acum:

$$\Phi(w) = \frac{F(w)}{2w} .$$

Avem:

$$4) \qquad \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{1}{k_1 \cdot k_2} \cdot \frac{\Phi(w_2)}{\Phi(w_1)} .$$

Şi utilizând o tabelă de funcţiuni (în special tabela dată de GIOVANNI BRUNO în „Rivista di Artigleria e Genio", Fasc. V, anul 1937—XV, pag. 1353—1362) găsim că:

$$\Phi(w_2) < \Phi(w_1).$$

Prin urmare se poate afirma că:

$$dx_1 < dx_2 .$$

Deasemenea admiţând, precum am spus mai sus că $y_1 > y_2$ atunci avem şi:

$$|\theta_1| < |\theta_2|$$

prin urmare vom avea şi:

$$dy_1 < dy_2 .$$

Se poate deci conchide categoric că:

Alterarea unei traectorii datorită unei pierderi de viteză inițială este mai mare pe ramura coborîtoare decât pe ramura urcătoare.

Cu alte cuvinte pentru studiul evoluției alterării în funcție de uzura unei guri de foc, este mai convenabil să se condiționeze alterarea unui punct de pe ramura coborîtoare și în special a punctului de cădere, deoarece vom fi siguri că pe ramura urcătoare (cazul traectoriilor antiaeriene) alterarea corespunzătoare va fi mai mică.

Corelația preciziei terestre (în trageri percutante) cu precizia punctului de ordonată maximă.

Un interesant caz îl constitue o comparație între alterarea punctului de cădere (precizia în tragerea percutantă) și alterarea punctului de ordonată maximă.

In adevăr în „Lehrbuch der äussere ballistik" (Cranz I, 278) găsim că:

In punctul de cădere:

$$5) \qquad \frac{dx}{X} = -\frac{3\,\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\omega}{\mathrm{tg}\omega} \cdot \frac{dv_0}{v_0}$$

unde ω este unghiul de cădere și X este bătaia, iar în punctul de ordonată maximă:

$$6) \qquad \frac{dx}{X} = -\frac{dv_0}{v_0}$$

x fiind abscisa ordonatei maxime.

Cum putem scrie:

$$7) \qquad \frac{x}{X} = k\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\omega}$$

unde k variază în jurul lui unu, urmează că avem:

$$8) \qquad dx = \frac{1}{3 - k \cdot \frac{x}{X}} \cdot dX.$$

Unde:

$$3 - k\frac{x}{X} > 1.$$

Prin urmare precizia în tragerile anti-aeriene, neţinând seamă de variaţiunile de ardere ale cordonului fuzant este în orice caz inferioară preciziei obţinută în tragerile terestre.

Cu ajutorul reţelelor balistice putându-se determina $\left(\frac{x}{X}\right)$ şi k, înseamnă că vom cunoaşte cu precizie variaţia dx din relaţia (8).

Determinând în acest mod variaţia dx la care mai adăugăm şi variaţia $t \,.\, d\mathrm{G}$ datorită cordonului fuzant, $d\mathrm{G}$ fiind variaţia în ardere maximă a cordonului fuzant, dată în caetele de sarcini, urmează că vom avea variaţia orizontală

$$9) \qquad dx' = dx + td\mathrm{G} \,.\, \cos\varepsilon$$

unde t este durata traectului până în punctul de ordonată maximă, iar:

$$10) \qquad \mathrm{tg}\varepsilon = 3 \,.\, \frac{dv_0}{V_0} \,.\, \mathrm{tg}\alpha$$

este variaţia înclinării tangentei.

In sfârşit variaţia pe verticală va fi:

$$11) \qquad dy' = dy + t \,.\, d\mathrm{G} \,.\, \sin\varepsilon$$

unde:

$$12) \qquad dy = (3x \,.\, \mathrm{tg}\alpha - 4y) \frac{dv_0}{V_0}$$

unde x este abscisa ordonatei maxime şi y ordonata maximă.

In felul acesta se poate studia cu toată exactitatea evoluţia preciziei aeriene utilizând numai trageri terestre (percutante), cari se pot executa mult mai uşor, în comparaţie cu tragerile fuzante pentru care trebuesc:

— apărate de vizare a fumului explozivilor, speciale, dotate cu legături telefonice;

— atmosferă calmă şi senină timp de câteva ore consecutiv;

— avioane meteorologice cari să măsoare presiunile şi temperaturile atmosferei până la altitudinea de tragere.

Ori, toate aceste condiţiuni cerute de tragerile fuzante sunt cu totul delicate şi nu se pot executa decât vara sau cel mult toamna, aşa cum se procedează la stabilirea graficelor de tragere.

Variația de ardere a cordonului fuzant, ne poate cu precizie determina prin trageri fuzante noaptea, deoarece lumina exploziilor fuzante văzându-se bine, se pot cronometra cu precizie suficientă, duratele de traect.

* * *

Cele expuse mai sus constituesc astăzi metodele de stabilire a graficelor de tragere anti-aeriană, în special pentru tunurile antiaeriene de calibru mare și cu mari viteze inițiale, metode practicate în Anglia, Franța, Germania și Italia, bine înțeles adecuate utilajului balistic respectiv.

MAIOR I. LINTEȘ.

ASUPRA CRITERIILOR DE CONVERGENȚĂ RAABE ȘI BERTRAND

1. Fiind dată o serie cu termeni pozitivi

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

una din primele probleme ce se pot pune este aceea a determinării naturii seriei și aceasta se poate adesea cu ajutorul clasicelor criterii date de CAUCHY și D'ALEMBERT, criterii care privesc limita unică a expresiilor

$$\sqrt[n]{u_n} \quad \text{și} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

pentru n tinzând către infinit.

Dar nu totdeauna aceste criterii pot furniza rezultatul dorit, căci dacă limita acestor expresii este unitatea, avem un caz dubios care necesită folosința altor criterii, cum sunt acelea date de RAABE și BERTRAND, și care putând fi utilizate într'o măsură mai mare, comportă mai multă greutate practică fără a face totuși excepție în ceea ce privește existența cazului dubios, care se pare că însoțește în mod necesar orice criteriu de convergență.

In cele ce urmează, pornind dela observația că toate criteriile lui RAABE și BERTRAND constituesc la drept vorbind niște forme nedeterminate, ne propunem transformarea acestor criterii cu ajutorul clasicei reguli a lui L'HOSPITAL, regulă a cărei aplicare la prima vedere nu este permisă, având deaface cu numere, iar nu cu

variabile. In realitate însă, aceste criterii ne conduc la nişte expresii ce pot fi privite ca funcţiuni de variabila reală n şi atunci procedeul este evident aplicabil căci studiem funcţiunea criteriului făcând abstracţie de provenienţa sa.

2. *Criteriile lui* RAABE. Primul criteriu al lui RAABE [1]) a fost obţinut din observaţia că raportul lui D'ALEMBERT se poate pune sub forma

$$\frac{1}{1+\alpha_n}$$

unde α_n este un număr pozitiv ce tinde către zero când n creşte nemărginit şi din compararea acestui raport cu seria de termen general

$$\left(\frac{n}{1+n}\right)^{\mu}$$

ceea ce conduce la regula regăsită mai târziu de DUHAMEL [2]) şi al cărei enunţ este:

Dacă se are

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

atunci seria cu termeni pozitivi

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

în care

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right\} = l$$

este convergentă sau divergentă după cum l este mai mare sau mai mic decât unitatea, existând nedumerire când această limită l este chiar unitatea.

Acest lucru amintit, scriind expresia ce constitue criteriul lui RAABE sub forma [3])

$$\frac{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

1) Zeitschrift für Matematik und Physik, t. X, 1832.

2) Journal de Liouville, t. IV, 1838.

3) Păstrăm notaţia u_n în loc de a pune $f(n)$ pentru motivul că rezultatul obţinut constitue un criteriu pentru seria de termen general u_n.

se constată că pentru n tinzând către infinit, ea se prezintă sub forma nedeterminată $^0/_0$ şi că deci utilizarea clasicei reguli a lui L'HOSPITAL ne permite a scrie egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right\} = \frac{\frac{u'_n}{u_n}\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_n}{u_{n+1}}\frac{u'_{n+1}}{u_{n+1}}}{-\frac{1}{n^2}}$$

în care u'_n înseamnă prima derivată în raport cu variabila n a funcţiunii u_n.

Având în vedere că aplicabilitatea criteriului lui RAABE pretinde ca cel al lui D'ALEMBERT să furnizeze ca limită însăşi unitatea, conchidem că membrul secund al egalităţii de mai sus se scrie

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left\{\frac{u'_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{u'_n}{u_n}\right\}$$

rezultând deci că

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right\} = \lim_{n\to\infty} n^2\frac{d}{dn}\log\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

ceea ce ne permite prezentarea criteriului lui RAABE sub următoarea formă:

Dacă se are

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

atunci seria cu termeni pozitivi

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

este convergentă sau divergentă, după cum limita pentru n tinzând către infinit, a expresei

$$n^2\frac{d}{dn}\log\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

este mai mare sau mai mică decât unitatea, existând nedumerire când această limită este egală cu unitatea.

3. Când criteriul lui RAABE nu poate da un răspuns precis cu privire la natura seriei, adică atunci când limita produsului $n\alpha_n$ pentru n foarte mare este chiar unitatea, se întrebuinţează un alt criteriu obţinut din compararea raportului lui D'ALEMBERT cu raportul corespunzător al seriei

$$\frac{1}{2(\log 2)^\mu} + \ldots + \frac{1}{n(\log n)^\mu} + \ldots$$

convergentă pentru $\mu > 1$ şi divergentă pentru $\mu \leqslant 1$. Se are atunci

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta_n}{n}}$$

unde β_n tinde către zero când n creşte nemărginit, iar criteriul ce se deduce şi care este al doilea criteriu al lui RAABE, constă din propoziţia următoare:

Dacă, începând cu un rang destul de depărtat, produsul $\beta_n \log n$ este neîncetat superior unităţii, atunci seria este convergentă; ea fiind divergentă în caz contrar, nedumerirea având loc când limita acestui produs este unitatea.

Formarea expresiei la care se referă al doilea criteriu al lui RAABE este imediată, ea fiind

$$\left[n \left\{ \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right\} - 1 \right] \log n$$

şi cum aplicabilitatea lui, cere ca să avem

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} n \left\{ \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right\}$$

conchidem că limita acestei expresii este aceeaşi cu a expresiei

$$\left\{ n^2 \frac{d}{dn} \log \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right\} \log n$$

dacă avem în vedere rezultatul precedent obţinut.

Această ultimă expresie se prezintă sub forma nedeterminată $0 \times \infty$ aşa încât scrierea ei sub forma

$$\frac{n^2 \frac{d}{dn} \log \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1}{\frac{1}{\log n}}$$

şi utilizarea regulii lui L'HOSPITAL ne conduce la următoarea expresie:

$$- \left\{ 2n^2 \frac{d}{dn} \log \frac{u_{n+1}}{u_n} + n^3 \frac{d^2}{dn^2} \log \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\} \{ \log n \}^2$$

care scrisă sub forma

$$n\{\log n\}^2 \frac{d}{dn}\left| n^2 \frac{d}{dn} \log \frac{u_n}{u_{n+1}} \right|$$

ne permite transformarea celui de al doilea criteriu RAABE în propoziția următoare:

Dacă într'o serie cu termeni pozitivi

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

se are

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right\} = 1$$

atunci seria converge sau diverge, după cum limita pentru n infinit a expresiei

$$n\{\log n\}^2 \frac{d}{dn}\left| n^2 \frac{d}{dn} \log \frac{u_n}{u_{n+1}} \right|$$

este mai mare sau mai mică decât unitatea, existând nedumerire când această limită este chiar unitatea.

4. *Criteriile lui* BERTRAND. Luând acum în considerație criteriile de convergență datorite lui BERTRAND [1]), vom începe prin transformarea celui logaritmic al lui CAUCHY, din care se deduc primele, în urma comparării lui cu seriile

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\mu}}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log_2 n)^2}$$

. . . . . .

în care s'a pus, așa cum se obișnuește

$$\log \log n = \log_2 n$$

$$\log \log_{\mu}^{n} = \log_{\mu+1}^{n} n.$$

Criteriul logaritmic al lui CAUCHY se referă — după cum bine se știe — la limita pentru n nemărginit dată de expresia

$$\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}$$

seria fiind convergentă sau divergentă după cum această limită este sau nu superioară unității, existând nedumerire în cazul egalității.

1) Journal de Liouville, 1-ère serie, t. VII p. 35.

Faptul că o condiție numai necesară de convergență cere ca termenul general al seriei să tindă către zero când n crește nemărginit, ne arată că criteriul logaritmic constitue o formă nedeterminată, căreia aplicându-i clasica regulă a lui L'HOSPITAL, obținem expresia

$$n \frac{d}{dn} \log \frac{1}{u_n}$$

a cărei limită, pentru n infinit, este aceeași cu limita dată de criteriul logaritmic, care prin urmare se poate prezenta sub forma:

Seria cu termeni pozitivi

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

este convergentă sau divergentă, după cum limita l pentru n tinzând către infinit, a expresiei

$$n \frac{d}{dn} \log \frac{1}{u_n}$$

este superioară sau nu unității, existând nedumerire în cazul egalității.

5. Considerând acum al doilea criteriu logaritmic — adică primul criteriu al lui BERTRAND — vom avea de efectuat transformarea expresiei

$$\frac{\log \dfrac{1}{nu_n}}{\log_2 n}$$

ceea ce ne conduce la expresia

$$\left\{ n \frac{d}{dn} \log \frac{1}{u_n} - 1 \right\} \log n$$

care mai poate fi încă modificată, deoarece aplicabilitatea acestui criteriu cerând să avem

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log \dfrac{1}{u_n}}{\log n} = 1$$

rezultă, în urma transformării precedent obținută pentru criteriul logaritmic, că avem în mod necesar

$$\lim_{n \to \infty} n \frac{d}{dn} \log \frac{1}{u_n} = 1$$

şi prin urmare că ne aflăm în faţa unei forme nedeterminate $0 \times \infty$ care scrisă astfel încât să avem forma $\frac{\infty}{\infty}$ ne va conduce prin aplicarea regulii lui L'HOSPITAL la următoarea expresie:

$$n\left\{\log n\right\}^2 \frac{d}{dn}\left| n\frac{d}{dn}\log\frac{1}{u_n}\right|$$

asemănătoare mult celei obţinute pentru cel de al doilea criteriu RAABE.

Putem deci transforma primul criteriu al lui BERTRAND în propoziţia:

Seria cu termeni pozitivi

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

în care se are

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n} = 1$$

este convergentă sau divergentă, după cum limita pentru n tinzând către infinit a expresiei

$$n\left\{\log n\right\}^2 \frac{d}{dn}\left| n\frac{d}{dn}\log\frac{1}{u_n}\right|$$

este sau nu superioară unităţii, existând nedumerire în cazul egalităţii.

6. Am putea continua acum cu transformările în acest sens a celorlalte criterii de convergenţă, atât RAABE cât şi BERTRAND. Calculul însă nu prezintă prea mult interes, având în vedere scopul acestor rânduri, de a evidenţia numai posibilitatea transformării acestor criterii cu ajutorul regulii lui L'HOSPITAL, transformare care deşi la prima vedere — aşa cum am spus — pare inadmisibilă, este totuşi permisă.

G. G. CONSTANTINESCU.

ÎNSEMNĂRI ASUPRA PUNCTULUI LUI MIQUEL

Fie ABCDEF un patrulater complet în care (A, C), (B, D), (E, F) sunt vârfuri opuse şi M punctul lui MIQUEL corespunzător.

Intr'o inversiune de pol M e clar că — latissimo sensu — figura nu-şi schimbă structura, inversându-se doar rolurile cercurilor circumscrise celor patru triunghiuri cu laturile patrulaterului transformat şi viceversa, dar din această inversare decurge un

avantaj în legătură cu elementele remarcabile ale figurei şi proprietăţile clasice ale patrulaterului vor apărea însoţite de altele, deduse pe această cale. Să urmărim mai în deaproape înfăţişarea figurei transformate.

Laturile patrulaterului se transformă în nişte cercuri ce trec prin M. *Punctele diametral opuse lui* M *în aceste cercuri* sunt transformatele intersecţiilor dreptei lui STEINER cu laturile patrulaterului, deci ele *se găsesc pe un cerc* (Γ) *trecând prin* M, transformatul dreptei lui STEINER.

Vârfurilor patrulaterului le corespund intersecţiile celor patru cercuri, diferite de M. Aceste şase intersecţii se găsesc distribuite pe patru drepte, transformatele cercurilor ce determină punctul M. Avem astfel o reciprocă a teoremei lui MIQUEL, care poate să apară şi ca o extindere a teoremei lui SALMON:

Cercurile care au ca diametre patru coarde ale unui cerc, concurente într'un punct al acestuia, se taie a doua oară în şase puncte, care sunt vârfurile unui patrulater complet.

Ortocentroidalei patrulaterului, care-i omotetica dreptei lui STEINER în omotetia M (2), îi corespunde un cerc ce trece prin M, omoteticul lui (Γ) în M $(\frac{1}{2})$. Ori acest cerc conţine mijloacele celor patru coarde, adică centrele celor patru cercuri ce trec prin M, deci *este chiar cercul lui* MIQUEL *al figurei transformate.*

Cercurile descrise pe cele trei diagonale ca diametre se taie în două puncte de pe ortocentroidală: punctele lui MONGE. Prin transformare obţinem alte trei cercuri (Γ_1), (Γ_2), (Γ_3), locurile punctelor de intersecţie ale cercurilor ortogonale ce trec prin M şi câte două vârfuri opuse ale patrulaterului transformat. Ele se taie în două puncte de pe cercul lui MIQUEL şi avem de exemplu:

Există în planul unui patrulater ABCDEF *două puncte* P, *reale, imaginare, distincte sau confundate, astfel ca cercurile* (AMP, CMP), (BMP, DMP), (EMP, FMP) *să fie respectiv ortogonale. Punctele* P *sunt pe cercul lui* MIQUEL *al patrulaterului.*

Polarele lui M faţă de (Γ_1), (Γ_2), (Γ_3) sunt concurente într'un punct M'. Cercul de diametru MM' trece prin proiecţiile lui M pe aceste polare. Aceste proiecţii sunt transformatele mijloacelor diagonalelor, iar cercul de diametru MM', transformatul dreptei lui GAUSS-NEWTON. *El este deci ortogonal cercului lui* MIQUEL *din figura transformată.*

Este acum interesant să vedem la ce dă naştere parabola înscrisă în patrulater. Prin inversiune faţă de polul M, care-i este focar, ea se transformă într'o cuartică bicirculară Q, care admite punctele absolute ca puncte de înapoiere şi cu un alt punct de înapoiere în M, tangenta dublă în acest punct având direcţia dreptei lui GAUSS-NEWTON a figurei iniţiale. Această curbă este o *cardioidă* tangentă celor patru cercuri circumscrise triunghiurilor patrulaterului transformat.

Obţinem astfel:

Dacă M *şi* Ω *sunt respectiv punctul şi centrul cercului lui* MIQUEL *ale unui patrulater complet, atunci există o cardioidă tangentă cercurilor circumscrise celor patru triunghiuri ale patrulaterului, admiţând drept punct de înapoiere pe* M, *tangenta în acest punct fiind* ΩM.

Ţinând seamă că ortocentroidala—care-i directoarea parabolei înscrise—se transformă în cercul MIQUEL al figurei transformate, putem deduce şi propoziţia:

Două cercuri ortogonale ce trec prin M, tangente cardioidei Q, se taie a doua oară pe cercul lui MIQUEL.

ION ILIE
Student.

GH. HERGOPOL

Pe ziua de 1 Februarie a. c., a fost trecut la pensie pentru limită de vârstă D-l GH. HERGOPOL, sub-şef de atelier la Imprimeria Naţională. D-sa a lucrat în calitate de culegător la început, apoi de conducător technic al *Gazetei Matematice* timp de 20 ani.

In tot acest interval de timp a căutat şi a reuşit pe deplin să-şi însuşească toate calităţile ce se cer pentru ca *Gazeta Matematică*, să apară aşa cum apare: la timp şi în condiţii technice perfecte.

Societatea *Gazeta Matematică*, pentru rezultatele obținute grație D-lui HERGOPOL, exprimă mulțumirile sale prin Actul ce

i-a fost înmânat și care este reprodus în acest număr, acordându-i în același timp o gratificație de 10.000 lei cu această ocazie.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“

După cum s'a anunţat în numărul 4 din Decemvrie 1940, al *Gazetei Matematice*, anul acesta se va ţine un concurs de matematici între elevii liceelor din ţară şi studenţii anului I al Politechnicei din Bucureşti.

Din cauza evenimentelor care au cerut întreruperi de cursuri şi chiar mutări de şcoli dintr'un oraş într'altul, mulţi corespondenţi nu au avut timpul să se înscrie la concurs.

Din această cauză Societatea *Gazeta Matematică* a decis să se prelungească termenul de înscriere până la 5 Martie inclusiv.

Dăm mai jos lista candidaţilor înscrişi în termen şi admişi la concurs.

Pentru cei noui înscrişi se vor face o publicaţie analoagă în N-rul 7 din Martie a. c.

Pentru Clasa IV-a: *Ieşan Şt. Alexandru.*

Pentru Clasa V-a: *Mişicu V. Mircea.*

Pentru Clasa VI-a: *Petrescu I. Ştefan, Popa Teodor, Popescu Gh. Marin, Prişcu R. Alexandru.*

Pentru Clasa VII-a: *Ganea M. Marin, Mănescu Gh. Ioan.*

Pentru Clasa VIII-a: *Aldea V. Minea, Bârlea G. Victor, Cruceru Gh. Constantin, Gligor N. Ioan, Mărgărit I. Nicolae, Nicolau Constantin, Niculescu C. Mircea, Petrescu Iulian, Sbârnea D. Gheorghe, Vijelie Gh. Eugen, Voinea P. Radu.*

Pentru anul I al Politechnicei Bucureşti: *Boeangiu D. Dumitru, Costescu Gh. Ion, Papadopol Demetra-Elena, Rusu L. Mircea, Trefilov I. Mihail, Văduva F. Marin.*

Adică 1 candidat pentru clasa IV-a, 1 pentru clasa V-a, 4 pentru clasa VI-a, 2 pentru clasa VII-a, 11 pentru clasa VIII-a, şi 6 pentru anul I al Politechnicei Bucureşti. Fiecare candidat va da câte o lucrare scrisă din ambele materii la care s'a înscris. Lucrările scrise sunt eliminatorii.

Prima lucrare scrisă va avea loc Joi 24 Aprilie 1941 dela ora 8^{30} până la 11^{30}; iar a doua lucrare scrisă în aceeaşi zi, dela ora 15 până la ora 18, la Politechnică, Calea Griviţei 132, Bucureşti.

Oralul va începe Vineri 25 Aprilie, ora 8^{30}, tot în localul Politechnicei. Candidaţilor elevi de liceu înscrişi la concurs, care nu dispun de mijloace materiale pentru venirea şi întreţinerea lor în Bucureşti (după cum au arătat în cererile lor), li se vor trimite în vacanţa de Paşti sumele necesare transportului la Bucureşti şi li se va comunica locul unde vor fi găzduiţi în tot timpul concursului.

Eventualile modificări vor fi la timp comunicate.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

NOTE MATEMATICE

23. *Acum o sută de ani în lumea matematică.* (Date culese în Biblioteca Seminarului Matematic al Universităţii din Iaşi din publicaţiile timpului).

Anul 1841 înregistrează apariţia celei dintîi contribuţii originale romîneşti la minunata şi viguroasă clădire a Matematicilor. Unul din pionerii mişcării ştiinţifice dela noi, DIMITRIE ASACHI, publică la München o broşură asupra unei probleme relative la serii, întitulată „Ueber die Umkehrung der Reihen". In acelaşi an apare la Bucureşti (Tip. Colegiului „Sf. Sava") — bineînţeles jucînd cu totul alt rol şi avînd, în consecinţă, o altă valoare — „Elemente de Algebră" după APPELTAUER, tradusă de P. POENARU.

Fi va primul centenar al întrării Patriei noastre pe făgaşul ştiinţei matematice un imbold pentru cultivarea cît mai intensă a acestei ramuri esenţiale — şi e bine să repetăm aceasta — şi din punct de vedere al umanismului culturii antice. Desvoltarea matematicilor la noi — dacă, pe de altă parte, ne-am situa pe planul actual şi realist — ne va impune atenţiei ţărilor cu civilizaţia şi rolul recunoscute şi va uşura sarcina statului nostru legionar în sforţările ce le poartă pe toate tărîmurile pentru ca să ni se facă dreptate.

In decursul anului îşi face apariţia în Germania o nouă importantă revistă matematică, a cărei fondator e matematicianul GRUNERT, „Archiv der Mathematik und Physik, mit besonderen Rucksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsenstalten", constituind dintr'un anume punct de vedere o

urmare a revistei „Annales de Mathématiques pures et appliquées", publicată între anii 1810—1831 de matematicianul francez GERGONNES.

In revistele timpului colaborează matematicienii: BELL, BERTRAND, BINET, BIOT, BLANCHET, BONNET, BOOLE, BRUNO, CALIGNY, CATALAN, CAUCHY, CORIOLIS, CRELLE, DELAUNAY, ELLIS, ENCKE, GASCHEAU, GAUSS, GREGORY, GRUNERT, HAEDENKAMP, JACOBI, LAMÉ, LEBESGUE, LEJEUNE-DIRICHLET, LIOUVILLE, MINDING, MÖBIUS, OETTINGER, OLIVIER, OLTRAMARE, RAABE, SARRUS, STEINER, STERN, STURM, SYLVESTER, TERQUEM, TRANSON, WALSH, WALTON, ...;

BESSEL, PONCELET, LE VERRIER, POINSOT, ARAGO, ... lucrează în domeniile matematicilor aplicate.

Cele mai multe publicaţiuni sunt din ramura analizei matematice. Ele se datoresc în primul rînd producţiunii prodigioase a lui CAUCHY şi lucrărilor lui LEJEUNE-DIRICHLET şi JACOBI. In particular, una din preocupările comune acestor geometri a fost problema calculului şi a schimbării de variabile în integrale multiple. Cu această ocazie JACOBI, în lucrarea „De determinantibus functionalibus", publicată în „Journal für die reine und angewandte Mathematik", v. 22, pp. 319—359, întroduce noţiunea de determinant funcţional care-i poartă numele. Mai multe lucrări tratează aplicaţiile geometrice ale analizei (BIOT, BINET, LAMÉ, TRANSON, ...), unele tipuri de ecuaţii diferenţiale (GASCHEAU, LIOUVILLE ...) ş. a. Dintre puţinele lucrări de geometrie, numai STEINER, în articolul întitulat „Sur le maximum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général", publicat în „Journal de Mathématiques pures et appliquées", v. 6, pp. 105—170, utilizează metoda sintetică în geometrie.

Metodele de a determina funcţiunea perturbatoare în problema stabilirii poziţiei pe orbită a unei planete, îşi găsesc perfecţionări simţitoare în lucrările lui CAUCHY, ENCKE, LE VERRIER, ... Probleme de mecanică cerească şi de astronomie sunt, de altfel, în lumea ştiinţifică, la ordinea zilei. Astfel comisiunea însărcinată de Academia de Ştiinţe din Paris cu acordarea marelui premiu al matematicilor pe 1840, amînă decernarea acestuia, propunînd acelaşi subiect prin care se cerea perfecţionarea metodelor pentru rezolvarea problemei perturbărilor lunii sau a planetelor, şi pentru anul 1842.

Probabil datorită şi acestor din urmă preocupări, o mare atenţie se acordă, în cadrul algebrei, căutării metodelor pentru rezolvarea numerică a ecuaţiilor algebrice şi trancendente precum şi problemelor de eliminare (ENCKE, LIOUVILLE, MINDING, STERN, SARRUS, ...).

Nu au lipsit nici încercări de a se soluţiona probleme celebre. Astfel la Academia din Paris s'a prezentat o notă despre trisecţia unghiului, o „demonstraţie" a postulatului lui EUCLID, o notă asupra rectificării cercului şi o demonstraţie a unei teoreme „care coprinde de aceea a lui FERMAT ca un caz particular". Această din urmă teoremă avea următorul enunţ (Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, v. 12, p. 120): „In afară de exponentul doi, nu există nici o altă putere care să se poată desface într'o sumă de un număr oarecare de puteri cu exponenţii egali între ei însă de baze diferite". Răspunsul comisiunii însărcinată cu studiul ei, formată din CAUCHY, LIOUVILLE şi STURM, conţine doar, „pentru a arăta persoanelor că nu trebuie să se oprească căutînd demonstraţia nouei teoreme" următorul exemplu numeric care o infirmă $216 = 27 + 64 + 125$.

Apariţia, în cadrul publicaţiilor neperiodice, a cărţii lui VERHULST, Traité élémentaire des fonctions elliptiques, ouvrage destiné à faire suite aux traités élémentaires de calcul intégral, Bruxelles, 1841, 316 pp., arată că teoria funcţiunilor eliptice era îndeajuns de cristalizată la acea vreme pentru a putea pătrunde în cadrul cursurilor clasice.

D. I. M.

(Seminarul Matematic, Iaşi).

24. *Asupra problemei 5096.* Datorită unei omisiuni la transcriere, soluţia acestei probleme, publicată la pag. 153, a apărut incomplectă, ceea ce ar putea-o face puţin riguroasă pentru unii.

De aceea, după cuvintele „Vom avea deci", se va adăuga „pentru $\alpha < 1$". In acest caz, partea neglijată are o limită nulă, adică

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}}{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-1} = 0.$$

Capul $\alpha > 1$ nu mai trebue examinat deoarece, dacă există lim nu_n, nu mai poate exista în acelaşi timp o altă limită finită şi diferită de zero lim $n^\alpha u_n$.

M. G.

25. *Complimentarul şi anticomplimentarul de ordinul* n. Fie $P_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ un punct în planul triunghiului ABC. P_1 complimentarul lui P_0, P_2 al lui P_1...

$$\alpha_{n+1} = \beta_n + \gamma_n = 2\alpha_{n-1} + \beta_{n+1} + \gamma_{n-1} = 2\alpha_{n-1} + \alpha_n$$

$$\therefore \quad \alpha_{n+1} - \alpha_n - 2\alpha_{n-1} = 0.$$

Ecuaţia caracteristică

$$r^2 - r - 2 = 0$$

are rădăcinile $r_1 = -1$, $r_2 = 2$; ecuaţia în α, va admite o rădăcină de forma

$$\alpha_n = (-1)^n C_1 + 2^n C_2$$

C_1, C_2 fiind nişte coeficienţi, pe care îi determinăm cu $n = 0, 1$

$$\alpha_0 = C_1 + C_2$$

$$\alpha_1 = \beta_0 + \gamma_0 = -C_1 + 2C_2$$

deci

$$C_1 = \alpha_0 - A \quad , \quad C_2 = A$$

unde

$$A = \frac{\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0}{3}$$

atunci coordonatele lui P_n, sunt

$$\alpha_n = [2^n - (-1)^n]\, A + (-1)^n \alpha_0 .$$

Pentru β_n, γ_n expresii analoage.

Pentru $n \to \infty$, $\quad P_n \to G(1, 1, 1)$.

Analog, procedăm pentru anticomplimentarul Q_n.

$$\alpha_{n+1} = -\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = -\alpha_n + 2\alpha_{n-1}$$

$$\therefore \quad \alpha_{n+1} + \alpha_n - 2\alpha_{n-1} = 0$$

şi la fel

$$\alpha_n = A + (-1)^n 2^n (\alpha_0 - A).$$

Pentru $n \to \infty$, $\quad Q_n \to Q_\infty$ de coordonate

$$-2\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 \quad , \quad \alpha_0 - 2\beta_0 + \gamma_0 \quad , \quad \alpha_0 + \beta_0 - 2\gamma_0$$

deci punctul la infinit pe direcţia PG.

ION C. VASILIU.

26. *Asupra unei Note.*

In numărul 7, Anul XXXVIII al acestei reviste, D-l GH. TH. GHEORGHIU stabileşte că orice expresie simetrică în raport cu laturile a, b, c ale unui triunghiu se exprimă în funcţie de p, r şi R.

In cele ce urmează îmi propun să arăt că analog orice expresie simetrică în raport cu înălţimile h_a, h_b, h_c sau cu razele cercurilor exînscrise r_a, r_b, r_c ale unui triunghiu se poate exprima în funcţie de p, r şi R.

Pentru aceasta va fi de ajuns să formăm ecuaţiile ale căror rădăcini sunt respectiv h_a, h_b, h_c şi r_a, r_b, r_c şi să observăm că coeficienţii acestor ecuaţiuni sunt funcţiuni de p, r şi R.

In nota sus citată se stabileşte că a, b, c sunt rădăcinile ecuaţiei

$$(1) \qquad x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)\, x - 4prR = 0.$$

Ori se ştie că

$$h_a = \frac{2pr}{a} \quad , \quad h_b = \frac{2pr}{b} \quad , \quad h_c = \frac{2pr}{c} .$$

Deci pentru a obţine ecuaţia în y ale cărei rădăcini să fie h_a, h_b, h_c va trebui să operăm asupra ecuaţiei (1) transformarea:

$$y = \frac{2pr}{x} \quad \therefore \quad x = \frac{2pr}{y} .$$

Ecuaţia căutată este

$$(2) \qquad 2Rx^3 - (p^2 + r^2 + 4Rr)\, x^2 + 4p^2rx - 4p^2r^2 = 0.$$

Deasemenea pentru a avea ecuaţia cu rădăcinile r_a, r_b, r_c ţinem seamă de relaţiile:

$$r_a = \frac{pr}{p-a} \quad , \quad r_b = \frac{pr}{p-b} \quad , \quad r_c = \frac{pr}{p-c}$$

care ne arată că obţinem această ecuaţie prin următoarea transformare:

$$y = \frac{pr}{p-x} \quad \therefore \quad x = \frac{p(y-r)}{y} .$$

Făcând calculele găsim ecuaţia:

$$(3) \qquad x^3 - (4R + r)\, x^2 + p^2x - p^2r = 0.$$

Atât ecuaţia (2) cât şi ecuaţia (3) se pot obţine destul de uşor şi pe cale directă. Coeficienţii acestor ecuaţii fiind funcţii de p, r şi R afirmaţiunea pe care am făcut-o este astfel justificată.

Aplicaţiile făcute de D-l GH. TH. GHEORGHIU asupra ecuaţiei (1) cât şi altele analoage ce s'ar putea face relativ la ecuaţiile (2) şi (3) ne îndreptăţesc să spunem că se pot obţine relaţiuni remarcabile între elementele unui triunghiu prin procedee de natură algebrică.

CEZAR IVĂNESCU.

27. *Asupra problemei 4800.* Relaţia cunoscută

$$C_i^l = C_{i-1}^l + C_{i-1}^{l-1}$$

aplicată de k ori, reduce indicele inferior al lui C_i^l, dela i până la $i-k$, şi anume:

$$C_i^l = C_{i-1}^l + C_{i-1}^{l-1} = C_{i-2}^l + 2C_{i-2}^{l-1} + C_{i-2}^{l-2}$$
$$= C_{i-3}^l + 3C_{i-3}^{l-1} + 3C_{i-3}^{l-2} + C_{i-3}^{l-3} = \ldots$$

Deci,

$$C_i^l = C_{i-k}^i + C_k^1 C_{i-k}^{l-1} + C_k^2 C_{i-k}^{l-2} + C_k^3 C_{i-k}^{l-3} + \ldots + C_k^k C_{i-k}^{l-k}. \quad (1)$$

Inmulţind cu C_i^k, avem:

$$C_i^k C_i^l = C_i^k C_{i-k}^l + C_k^1 C_i^k C_{i-k}^{l-1} + C_k^2 C_i^k C_{i-k}^{l-2} + \ldots + C_k^k C_i^k C_{i-k}^{l-k}. \quad (2)$$

Dacă punem:

$$C_i^k C_{i-k}^n = C_{n+k}^k C_i^{n+k} \text{ (egalitatea se verifică imediat)}$$

şi $$n = l,\ l-1,\ l-2, \ldots\ l-k,$$

relaţia (2) devine:

$$C_i^k C_i^l = C_{l+k}^k C_i^{l+k} + C_k^1 C_{l+k-1}^k C_i^{l+k-1} + C_k^2 C_{l+k-2}^k C_i^{l+k-2} + \ldots C_k^k C_l^k C_i^l, \quad (3)$$

de unde

$$\sum_{i=l}^{m} C_i^k C_i^l = C_{l+k}^k \sum_{i=l}^{m} C_i^{l+k} + C_k^1 C_{l+k-1}^k \sum_{i=l}^{m} C_i^{l+k-1} + C_k^2 C_{l-k-2}^k \sum_{i=l}^{m} C_i^{l+k-2} + \ldots + C_k^k C_l^k \sum_{i=l}^{m} C_i^l$$

sau

$$\sum_{i=l}^{m} C_i^k C_i^l = C_{l+k}^k C_{m+1}^{l+k+1} + C_k^1 C_{l+k-1}^k C_{m+1}^{l+k} + C_k^2 C_{l+k-2}^k C_{m+1}^{l+k-1} + \ldots + C_k^k C_l^k C_{m+1}^{l+1}. \quad (4)$$

Punând în relaţia (4)

$$k = 3 \quad \text{şi} \quad l = 4,$$

căpătăm o relaţie din problema 4800:

$$\sum_{l=4}^{m} C_l^3 C_l^4 = C_7^3 C_{m+1}^8 + C_1^3 C_6^3 C_{m+1}^7 + C_3^2 C_5^3 C_{m+1}^6 + C_3^3 C_4^3 C_{m+1}^5,$$

sau

$$\sum_{l=4}^{m} C_l^3 C_l^4 = 35C_{m+1}^8 + 60C_{m+1}^7 + 30C_{m+1}^6 + 4C_{m+1}^5.$$

Relaţia (4) este o generalizare a problemei 4800.

VENIAMIN I. POSTOLACHE.

28. *O soluţie a problemei No. 3825.* Facem o inversiune luând ca pol punctul P, iar modulul egal cu k. Cercul O se transformă într'o dreaptă (Δ), iar vârfurile A, B, C în trei puncte A_1, B_1, C_1 situate pe (Δ).

Tangentele în A, B, C la cercul O se transformă în trei cercuri trecând prin polul P şi tangente dreptei (Δ) respectiv în punctele A_1, B_1, C_1. Laturile BC, CA, AB se transformă în cercurile PB_1C_1, PC_1A_1, PA_1B_1 şi în fine perpendicularele duse din P pe laturile triunghiului ABC şi ale triunghiului tangenţial se transformă respectiv în diametrele: d_a, d_b, d_c ale cercurilor PB_1C_1, PC_1A_1, PA_1B_1 şi în diametrele: δ_a, δ_b, δ_c ale cercurilor care trec prin P şi sunt tangente dreptei (Δ) în A_1, B_1, C_1.

Cercul care trece prin P şi e tangent dreptei (Δ), de exemplu, în A_1 se construeşte în modul următor:

In A_1 se ridică o perpendiculară pe (Δ), iar în P o perpendiculară pe A_1P; aceste două perpendiculare se taie în punctul A_2, iar cercul căutat e cercul de diametru A_1A_2.

In triunghiul dreptunghic A_1A_2P, avem:

$$\delta_a = A_1A_2 = \frac{A_1P}{\sin \widehat{PA_1B_1}} = \frac{A_1P}{\sin \widehat{A_1}}.$$

In triunghiul PB_1C_1 se ştie că avem:

$$d_a = \sqrt{\frac{B_1P \cdot C_1P}{\sin B_1 \cdot \sin C_1}}.$$

In acelaşi mod ca mai sus ajungem la alte două grupuri de relaţii analoage, care, prin înmulţire, ne dau:

$$\delta_a \cdot \delta_b \cdot \delta_c = d_a \cdot d_b \cdot d_c .$$

Observând acum, după definiţia inversiunei, că avem:

$$P\alpha \cdot \delta_a = k, \ldots, \text{ etc.},$$

relaţia precedentă ne conduce la următoarea:

$$P\alpha \cdot P\beta \cdot P\gamma = Pa \cdot Pb \cdot Pc,$$

care face obiectul problemei No. 3825.

Urmând aceeaşi cale ca mai sus s'ar putea generaliza problema pentru două poligoane de un număr oarecare de laturi.

Mai observ că avem relaţiile:

$$\delta_a \cdot d_a^2 = \delta_b \cdot d_b^2 = \delta_c \cdot d_c^2,$$

cărora le corespund următoarele:

$$P\alpha \cdot \overline{Pa}^2 = P\beta \cdot \overline{Pb}^2 = P\gamma \cdot \overline{Pc}^2.$$

CEZAR COŞNIŢĂ.

29. *Asupra problemei 4474.* In soluţia publicată la pag. 649 Vol. XLV, s'a pierdut o soluţie la cazul I, pentrucă egalitatea

$$6(a - c) = n - q$$

s'a examinat numai pentru $a > c$. Dacă însă se presupune $c > a$ atunci trebue considerat şi

$$q - n = 6 \quad \therefore \quad c - a = 1$$

care conduce la soluţia

$$6 \times 223 + 1 = 1339 \ ; \ 6 \times 232 + 1 = 1393 \ ; \ 6 \times 322 + 1 = 1933.$$

Cazul II, de la pag. 650 Vol. XLV, al aceleiaşi probleme se poate simplifica dacă se observă că din

$$6 \times acb = mpqn - 1$$

se poate deduce

$$6 \times b = 10\alpha + n - 1 \tag{1}$$

unde $0 \leqslant \alpha \leqslant 5$. Ţinând însă seamă de prima condiţie a enunţului problemei, adică de

$$6 \times abc = mnpq - 1$$

se găseşte $\alpha = 1$ şi atunci rezultă din (1)

$$6 \times b = n + 9$$

care dă

$$b = 2 \text{ cu } n = 3 \quad \text{şi} \quad b = 3 \text{ cu } n = 9.$$

Cu aceste rezultate se reduc tablourile de la pag. 649, 651 Vol. XLV şi o parte din încercările ce decurg din ele.

M. L. RUSU.

BIBLIOGRAFIE

Boletin Matematico, Anul XIII. Nr. 6. Mai 1940. Buenos-Aires.

Buletinul „I. R. E.". Anul VIII. Nr. 3. Septemvrie 1940. Bucureşti.

Buletinul Societăţii Politechnice din România. Anul LIV. Nr. 12. Decemvrie 1940. Bucureşti. Proiectul german de prescripţiuni pentru piesele supuse la flambaj de CRISTEA NICULESCU. Necesitatea înfiinţării unui oficiu de verificare a construcţiilor pe lângă Primăria Municipiului Bucureşti, de CRISTEA MATEESCU şi N. I. ODOBESCU.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XX. Nr. 11. Ianuarie 1941. Un capitol nou de Geometrie analitică de V. ALACI.

România Aeriana. Anul XIV. Nr. 12. Decemvrie 1940. Bucureşti.

Suplimentul cu exerciţii al Gazetei Matematice. Anul VII. Nr. 5. 1 Februarie 1941. Bucureşti.

FRANCIS PERRIN: « *Mécanique statistique quantique* », Paris, Gauthiers-Villars, 1939, 224 p.

Cartea aceasta face parte din Vol. II intitulat; « *Les applications de la théorie des probabilités aux sciences mathématiques et aux sciences physiques* » al colecţiei: « *Traité du calcul des probabilités et de ses applications* » publicată de EMILE BOREL.

D-l FRANCIS PERRIN, un distins fizician de şcoală nouă, profesor la Facultatea de Ştiinţe din Paris, găseşte prilejul să facă o apropiere între rezultatele unor lucrări recente, atât personale cât şi ale altor cercetători. Din acest punct de vedere cartea are o deosebită valoare, pentrucă scuteşte pe cel ce doreşte a se iniţia în unele capitole ale Statisticei moderne, de a lua drumul întortochiat al numeroaselor memorii originale, drum adesea plin de riscuri serioase.

D-sa îşi împarte cartea în trei părţi.

In prima parte autorul reaminteşte ecuaţiile fundamentale ale dinamicei

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

pentru sistemele olonome, L fiind cunoscuta funcţie a lui LAGRANGE (K — U). Dacă se ia pentru L expresia următoare:

$$-mc^2\sqrt{1-\beta^2} + \frac{e}{c}\bar{v}\bar{A} - e\Phi$$

atunci ecuaţia (1) este valabilă şi în dinamica relativistă pentru o particulă de masă m, de sarcină e, Φ şi $\bar{A}$ fiind respectiv potenţialele scalar şi vectorial ale câmpului electromagnetic, iar β câtul $\frac{v}{c}$ (c fiind vitesa luminii). Introduce apoi noţiunea de *extensiune în fază* pentru un sistem olonom de n grade de libertate, demonstrându-i invarianţa. Cu ajutorul ei enunţă *principiul ergodic* sub forma sa strictă, limitându-se, pentru *sistemele ergodice*, la acele sisteme care admit numai integrala energiei ca integrală primă. Trecând apoi la gazele perfecte dă formula de probabilitate a unei repartiţii şi deduce astfel repartiţia cea mai probabilă.

In partea II autorul se ocupă de nouile capitole ale Fizicei născute sub impulsul teoriei quantelor. Mai întâi schiţează baza mecanicei ondulatorii (HEISENBERG, SCHRÖDINGER) pornind de la funcţiunea de undă $\Psi(q, t)$ cu bine cunoscuta interpretare pe care i-a dat-o MAX BORN.

Pentru amplitudinea spaţială $\psi(q)$ a acestei funcţiuni, se consideră ecuaţia curentă

$$|\!-\!|\,\psi = E\psi,$$

unde $|\!-\!|$ este operatorul linear obţinut prin înlocuirea energiei cinetice din H prin operatorul laplacian al spaţiului configuraţiilor multiplicat cu $-\frac{h^2}{8\pi^2}$. Cu ajutorul funcţiunilor proprii respective se deduce apoi repartiţia asimptotică a stărilor staţionare, pentru a face în capitolul următor statistica quantică a gazelor perfecte şi mai departe, aceea a undelor luminoase quantificate, ajungând astfel la celebra formulă a lui PLANCK. Această parte se închee cu schiţarea teoriei căldurii specifice a solidelor — teorie născută acum trei decenii prin lucrările lui SOMMERFELD, SMOLUCHOWSKI, EINSTEIN şi mai ales DEBYE.

Partea a treia a cărţii este consacrată statisticei quantice a *sistemelor nediscernabile*. In primul capitol autorul face diferenţa între fotonii nediscernabili şi particolele discernabile, pentru ca în capitolul următor să calculeze numărul X_i al distribuţiilor distincte a n_i particule lipsite de individualitate. Astfel ajunge la formulele Statisticei BOSE-EINSTEIN (fără principiul excluziunii al lui PAULI) precum şi la formulele Statisticei după FERMI-DIRAC (cu principiul excluziunii al lui PAULI) făcând apoi comparaţia între aceste formule şi acelea ale lui BOLTZMANN. Capitolul se termină cu metoda statistică PLANCK-ALLARD. In capitolul următor se introduc pe cale statistică, noţiunile fundamentale ale Termodinamicei: temperatură, viriel, presiune, căldură, lucru

mecanic, entropie, temperatură absolută, noţiuni care se aplică la Termodinamica radiaţiei pentru a se regăsi pe cale directă legea lui PLANCK sub forma sa complectă, conformă cu legea lui WIEN şi ducând la legea lui STEFAN pentru densitatea energiei (cunoscuta expresie proporţională cu puterea a patra a temperaturii absolute). Urmează consideraţiuni asupra amestecului în echilibru cu ajutorul potenţialului chimic al moleculelor, deducându-se *legea acţiunii masei* exprimată prin aceste potenţiale precum şi formulele lui GIBBS şi VAN'T HOFF. In fine, principiul al treilea al Termodinamicei, principiul lui NERNST, cu cele două părţi ale sale, este expus sub formă statistică. Un alt capitol se ocupă cu aplicarea celor ce preced la un gaz format din particule punctuale de energie internă invariabilă. Servindu-se de proprietăţile funcţiunii

$$U_\rho(x) = \frac{x}{\Gamma(\rho+1)} \int_0^\infty \frac{z^\rho e^{-z}}{1 + x e^{-z}} dz$$

autorul ajunge la rezultate care se pot aplica în domeniul unde corecţiunile lui VAN DER WAALS sunt slabe, pentru gazele monoatomice sau pentru gazele moleculare fără *spin* şi la temperaturi joase. Pentru diferite valori ale constantelor se obţin apoi cazurile de degenerescenţă în statistica lui BOSE sau în aceea a lui FERMI. Ultimul Capitol al părţii a treia se ocupă cu stabilirea unui postulat în mecanica ondulatorie, aşa fel ca aceasta să poată prezinta rezultatele statistice bazate pe ipoteza particulelor nediscernabile, cât şi pe principiul excluziunii al lui PAULI.

Cartea este scrisă mai mult pentru fizicieni decât pentru matematicieni, deşi laturea matematică este prezentată cu multă grijă. Vreau să spun că accentul e pus tot timpul pe fenomenul fizic, nu pe transformarea matematică. De aceea matematicianul care va fi cetit, să zicem, cartea lui J. VON NEUMANN *(Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik)* va avea plăcerea, studiind cartea D-lui FRANCIS PERRIN, să găsească în ea bază fizică pentru multe capitole de aproape pură matematică din acest domeniu al Fizicei moderne.

V. VÂLCOVICI.

RADU BĂDESCU. *Sur l'équation fonctionnelle de* POINSOT *généralisée.* (Extras din „Bulletin de Mathématiques et de Physique", Politechnica, Bucureşti, An. XI).

K. REIDEMEISTER, *Die Arithmetik der Griechen*, Teubner, 1940.

Această broşură, care rezumă mai multe conferinţe ţinute de autor în diferite oraşe din Germania, apare ca Nr. 26 al colecţiei „Hamburger Mathematische Einzelschriften". După cum ne spune în prefaţă, autorul vrea să lămurească „rolul aritmeticei în cugetarea matematică a Grecilor". In deosebi se arată că în Cartea X a lui EUCLID se urmăresc în fond raţionamente aritmetice; ea constitue încoronarea desvoltării aritmetice. In acelaşi timp se lămureşte că PLATON şi pitagoricienii s'au interesat îndeosebi de cugetarea aritmetică. Autorul crede că lucrarea sa poate prezenta o importanţă şi pentru

interpretarea vechei filozofii greceşti. Indeosebi e interesantă critica „transmiterii neo-pitagoriciene" arătându-se că nu putem avea prea mare încredere în această transmitere a vechei aritmetici pitagoriciene.

Cărticica d-lui REIDEMEISTER cuprinde contribuţii serioase la cunoaşterea vechei aritmetici greceşti, oferind puncte de vedere noi prin punerea la contribuţie a spiritului său critic acut şi a temeinicelor sale cunoştinţe filologice. Ea merită a fi cunoscută de oricine se interesează de matematica greacă.

VICTOR MARIAN.

CERERI

299. In ce carte românească se vorbeşte prima oară despre *patrate magice?*

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

G. PAPELIER. Leçons sur les coordonnées tangentielles. I. Géométrie plane. II. Géométrie dans l'espace. Paris.

Donate de D-l I. IONESCU, Inginer.

MAX ZACHARIAS. Einführung in die projektive Geometrie. Lipsca 1912.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

B. NIEWENGLOWSKI. Cours d'Algebre, Tome I, II. Paris 1926.

G. SALMON, Leçons d'Algèbre Supérieure. Paris 1868.

C. A. LAISANT. Algèbre. Théorie des nombres. Paris 1895.

CH. DE COMBEROUSSE. Algèbre supérieure. Partea I, II. Paris 1929, 1923.

G. RITT. Problèmes d'Algèbre. Paris 1890.

P. AUBERT, G. PAPELIER. Exercices d'Algèbre, d'Analyse et de Trigonométrie. Tom. II. Paris 1933.

A. G. IOACHIMESCU. Culegere de Probleme de Algebră. Ediţia II. Bucureşti 1921.

A. CLEBSCH. Theorie der binären Algebraischen Formen. Leipzig 1872.

C. F. FAA DE BRUNO. Théorie des formes binaires. Turin 1876.

L'ABBÉ STOFFAES. Cours de Mathématiques supérieures. Paris 1891.

TH. ANGHELUŢĂ. Curs de Algebră Superioară. Funcţii analitice. Cluj 1940.

BACALOGLO. Elemente de Algebră. Ed. II.

TR. LALESCU. Calculul Algebric. Bucureşti 1924.

N. ABRAMESCU. Lecţiuni elementare de Algebră superioară. Teoria ecuaţiilor. Ed. V. Bucureşti 1935.

J. DUFAILLY. Algèbre. Ed. V. Paris 1880.
CH. BRIOT, E. LACOUR. Leçon d'Algèbre, Ed. XVII. Partea II. Paris 1897.
L. SAINT-LOUP. Traité de la résolution des équations numeriques. Paris 1864.
P. PORCHON. Leçons de Mathématiques. Paris 1905.
F. G. — M. Exercies de Trigonométrie. Paris 1915.
Lib. VUIBERT. Relations entre les éléments d'un triangle. Paris.
V. CRISTESCU. Culegere de probleme de trigonometrie. Partea I. Bucureşti 1936.
SPIRU C. HARETU. Curs de Trigonometrie. Bucuresci 1873.
CH. DE COMBEROUSSE. Trigonométrie rectiligne et sphérique. Paris 1928.
Donate de familia decedatei PREDUŢA D. BUNGEŢIANU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4907. *Fie* I *centrul cercului înscris triunghiului* ABC; B', C' *picioarele bisectoarelor,* α *mijlocul lui* BC.

1°. Iα *taie pe* B'C' *pe simediana din* A.

2°. *Fie* $\alpha\beta\gamma$ *o dreaptă oarecare trecând prin mijlocul laturei* BC; Iβ, Iγ *taie pe* AB, AC *în* C_a, B_a; $B_a C_a$, B'C' Iα *sunt concurente.*

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţia I-a dată de D-l CONSTANTIN V. PANTELIMON (lic. mil. Iaşi). Fie M, N intersecţiile dreptei Iα respectiv cu B'C', AB. Aplicând relaţia MENELAUS în triunghiurile BCC', BB'C' tăiate de transversala Nα, aflăm

$$\frac{IC}{IC'} : \frac{IB}{IB'} = \frac{MB'}{MC'}.$$

Fie Δ_b, Δ_c distanţele lui M la AC, AB; avem

$$\frac{MB'}{MC'} = \frac{\Delta_b}{\Delta_c} \cdot \frac{AB'}{AC'}.$$

Inlocuind în relaţia precedentă şi observând că

$$\frac{IC}{IC'} = \frac{BC}{BC'}, \quad \frac{IB}{IB'} = \frac{BC}{B'C}$$

I fiind piciorul bisectoarei, obţinem

$$\frac{\Delta_b}{\Delta_c} = \frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{B'C}{AB'} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BC}{AB}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta_b}{\Delta_c} = \frac{AC}{AB}$$

deci punctul M se află pe simediana din A.

2°. Teorema lui MENELAUS, aplicată triunghiurilor ACC', ABB', ABC tăiate respectiv de $\beta I\ C_a$, $\gamma\ B_a\ I$, $\alpha\beta\gamma$ ne dă — α mijlocul BC —

$$\frac{C_a C'}{C_a A'} \cdot \frac{\beta A}{\beta C} \cdot \frac{IC}{IC'} = 1, \quad \frac{B_a A}{B_a B'} \cdot \frac{IB'}{IB} \cdot \frac{\gamma B}{\gamma A} = 1, \quad \frac{\gamma A}{\gamma A} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} = 1$$

înmulţindu-le între ele, se află

$$\frac{C_a C'}{C_a A} \cdot \frac{B_a A}{B_a B'} \cdot \frac{IC}{IC'} \cdot \frac{IB'}{IB} = 1$$

şi ţinând seamă de prima relaţie,

$$\frac{C_a C'}{C_a A} \cdot \frac{B_a A}{B_a B'} \cdot \frac{MB'}{MC'} = 1$$

ceea ce arată că punctele B_a, M, C_a sunt colineare pe laturile triunghiului AB'C' deci $B_a C_a$ trece prin M, intersecţia dreptelor B'C', Iα.

Soluţia II-a şi generalizare date de D-nii: VICTOR L. FLORESCU şi OCTAVIAN G. RĂDULESCU (când erau în clasa VII-a, lic. mil. N. Filipescu, M-rea Dealu).

1°. Fie I un punct arbitrar pe bisectoare şi B', C' picioarele cevienelor lui. Vom considera două omografii: prima, involuţia formată de drepte simetrice faţă de AI şi trecând prin A şi care determină pe BC, B'C' diviziuni omografice; a doua, pe aceleaşi baze, determinată de drepte ce trec prin I; dacă notăm cu m, m' intersecţiile bisectoarei AI cu BC, B'C', cele două omografii au trei perechi de puncte comune: (B, B'); (C, C'); (m, m') deci sunt identice; rezultă că α fiind arbitrar pe BC, αI taie pe B'C' în α' astfel că dreptele Aα, Aα' sunt isogonale.

In particular, dacă α este mijlocul BC, Aα' este simediana din A.

2°. Fie I arbitrar în plan şi α arbitrar pe BC; Δ o dreaptă variabilă ce trece prin α, fix şi care taie pe AC, $A\beta$ în β, γ. $I\beta$, $I\gamma$ taie pe AB, AC în C_a, B_a. Punctele B_a, C_a descriu diviziuni omografice pe bazele AC, AB în care A este autoomolog (pentru Δ trecând prin A). Rezultă că $B_a C_a$ trece printr'un punct fix. Când Δ se suprapune peste BC ori trece prin I, $B_a C_a$ devine B'C' ori αI; rezultă că dreptele $B_a C_a$, B'C', $I\alpha$ sunt concurente.

Observaţii. 1. O foarte bună soluţie directă, în sensul primeia, a fost dată de D-l HORIA M. BODNĂRESCU (lic. „T. Maiorescu" Bucureşti).

2. Urmând aceeaşi metodă ca în problema 4883 (G. M. XLV—314) care de fapt este un caz particular al prezentei, pentru α la infinit, şi notând P, Q, R intersecţiile (AI, BC), (AN, BC), (AI, B'C') — N fiind punctul de concurenţă, avem

$$A(QBPC) = A(NC'RB') = I(\alpha CPB)$$

$$\therefore \frac{QB}{QC} = \left(\frac{PB}{PC}\right)^2 \cdot \frac{\alpha C}{\alpha B}$$

când α este mijlocul BC şi P piciorul uneia din bisectoare, rezultă că ANQ este simediana din A.

PROBLEMA 4947. *Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei:*

$$\frac{\sin 5x + \cos 5x}{\sec x + \operatorname{cosec} x} = k,$$

pentru diferitele valori ale parametrului k.

Să se rezolve complect ecuaţia pentru $k = \frac{11}{54}$.

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţia I-a dată de D-nii: MIRCEA A. NEGREA (Brăila), NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU (bacalaureat, Bucureşti), GHEORGHE N. B. IONESCU (lic. Ploeşti), CONST. PASCARU (lic. mil. Iaşi) şi ORIGEN MĂRCULESCU (Craiova).

Pornim dela identităţile:

$$(1)\quad \sin 5x + \cos 5x \equiv (\sin x + \cos x)(1 + 2\sin 2x - 4\sin^2 2x)\ ^{1})$$

$$(2)\quad \sec x + \operatorname{cosec} x \equiv 2\,\frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}$$

1) A se vedea „S. G. M." Vol. IV, pag. 126 exerc. VI. 347, în care se face $a = -x$.

care prin împărțire ne dau, conform enunțului:

$$\frac{1}{2}\sin 2x(1+2\sin 2x-4\sin^2 2x)=k,$$

în care făcând $\sin 2x=y$, obținem ecuația algebrică:

$$4y^3-2y^2-y+2k=0. \tag{3}$$

Vom discuta această ecuație algebrică, aplicând teorema lui ROLLE numai în intervalul $(-1,+1)$ în care poate fi cuprins y. Desigur că la fiecare rădăcină în y, vor corespunde o infinitate de rădăcini în x.

Derivata

$$f'(y)=12y^2-4y-1 \tag{4}$$

admite rădăcinile:

$$y_1=-\frac{1}{6} \quad \text{și} \quad y_2=\frac{1}{2},$$

așa încât tabloul de discuție este următorul:

k	$f(-1)$ / $2k-5$	$f\left(-\frac{1}{6}\right)$ / $2k+\frac{5}{45}$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$ / $2k-\frac{1}{2}$	$f(1)$ / $2k+1$	Natura rădăcinilor ecuației în y
$-\infty$					
	—	—	—	—	nici o rădăcină reală
$-\frac{1}{2}$	—	—	—	0	$y=1$ rădăcină simplă
	—	—	—	+	o rădăcină reală
$-\frac{5}{108}$	—	0	—	+	$\left(-\frac{1}{6}\right)$ răd. dublă și o răd. simplă
	—	+	—	+	3 rădăcini reale
$\frac{1}{4}$	—	+	0	+	$\left(\frac{1}{2}\right)$ răd. dublă și o răd. simplă
	—	+	+	+	o rădăcină reală
$\frac{5}{2}$	0	+	+	+	(-1) rădăcină simplă
	+	+	+	+	nici o rădăcină reală
$+\infty$					

După cum se vede ecuația nu admite rădăcini reale decât pentru $-\frac{1}{2} < k < \frac{5}{2}$.

Pentru $k = \frac{11}{54}$ obținem ecuația:

$$(5) \qquad 4y^3 - 2y^2 - y + \frac{11}{27} = 0$$

căreia aplicându-i metodele de găsire a rădăcinilor raționale, îi aflăm rădăcina: $y_1 = \frac{1}{3}$, apoi prin împărțirea cu $\left(y - \frac{1}{3}\right)$ găsim:

$$(6) \qquad 4y^2 - \frac{2}{3}y - \frac{11}{9} = 0 \quad \therefore \quad y_{2,3} = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{12}.$$

Cum această parte a problemei este un exercițiu de calcul, vom avea de rezolvat ecuațiile simple:

$$(7) \quad \sin 2x = \frac{1}{3} \qquad (8) \quad \sin 2x = \frac{1+3\sqrt{5}}{12} = 0{,}64235$$

$$(9) \qquad \sin 2x = \frac{1-3\sqrt{5}}{12} = -0{,}47568.$$

Prima ecuație ne dă:

$$\log \sin 2x = \operatorname{colog} 3 = \bar{1}{,}52288 \quad \therefore \quad 2x_1 = \begin{cases} k \cdot 360^0 + 19^0\,28'\,16'', 6 \\ k \cdot 360^0 + 160^0\,31'\,43'', 94 \end{cases}$$

$$\therefore \quad (7') \qquad x_1 = \begin{cases} k \cdot 180^0 + 9^0\,44'\,8'', 3 \\ k \cdot 180^0 + 80^0\,15'\,51'', 97. \end{cases}$$

A doua ecuație ne dă:

$$\log \sin 2x = \log 0{,}64235 = \bar{1}{,}80777 \quad \therefore \quad 2x_2 = \begin{cases} k \cdot 360^0 + 39^0\,58' \\ k \cdot 360^0 + 140^0\,2' \end{cases}$$

$$\therefore \quad (8') \qquad x_2 = \begin{cases} k \cdot 180^0 + 19^0\,59' \\ k \cdot 180^0 + 70^0\,1'. \end{cases}$$

A treia ecuație ne dă:

$$\log \sin(-2x) = \log 0{,}47568 = \bar{1}{,}67731 \quad \therefore$$

$$2x_3 = \begin{cases} k \cdot 360^0 - 28^0\,24'\,12'', 5 \\ k \cdot 360^0 - 151^0\,35'\,47'', 95 \end{cases}$$

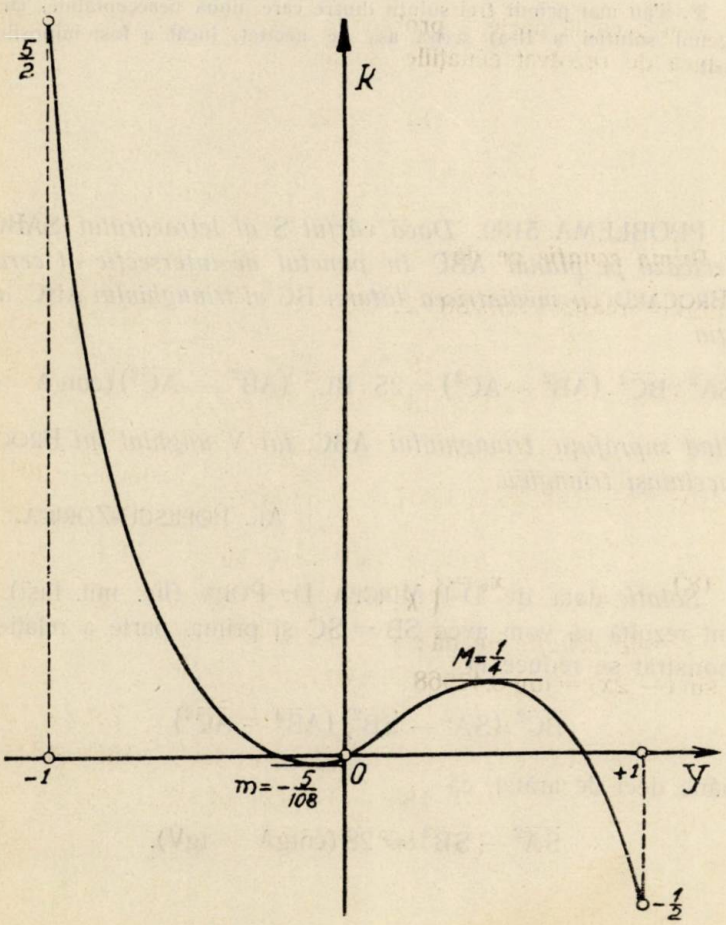
$$\therefore \quad (9') \qquad x_3 = \begin{cases} k \cdot 180^0 - 14^0\,12'\,6'', 2 \\ k \cdot 180^0 - 75^0\,47'\,53'', 98. \end{cases}$$

Soluția II-a dată de D-l IOAN V. JAREGHIE (lic. mil. Iași). Din ecuația (3) se deduce:

$$(10)\qquad k = -2y^3 + y^2 + \frac{y}{2} \quad \therefore \quad k' = -6y^2 + 2y + \frac{1}{2}\cdot$$

Rădăcinile derivatei k' fiind $\left(-\frac{1}{6}\right)$ și $\frac{1}{2}$. Se reprezintă curba dela -1 la $+1$ conform tabloului de variație:

y	-1		$-\frac{1}{6}$		0		$\frac{1}{2}$		1
k'	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
k	$\frac{5}{2}$	↘	$-\frac{5}{108}$ m	↗	0	↗	$\frac{1}{4}$ M	↘	$-\frac{1}{2}$



Dând lui k diferite valori, adică tăind curba prin drepte paralele cu axa oy (axele sunt oy şi ok) se vede câte puncte de intersecţie rezultă. Se recapătă astfel tabloul de discuţie dela prima soluţie. Aplicaţie numerică la fel ca la prima soluţie.

Observaţie. 1°. D-nii S-LT. GR. MARTEŞ şi HERMAN REISCHER (L. I. Iaşi) au trimes soluţii bune, însă şirul lui ROLLE l'au luat dela $f(-\infty)$ la $f(+\infty)$, ceea ce modifică puţin tabloul deoarece y nu poate varia decât dela -1 la $+1$.

2°. D-nii S-LT. M. GRUMĂZESCU, GH. M. DUMITRESCU (absolvent lic. „M. Viteazul"), MIRCEA D. POPA (lic. mil. Iaşi), ISAC SOLOMON (L. I. Iaşi) şi IOAN V. JAREGHIE au rezolvat foarte bine prima parte a problemei, însă la aplicaţie sau nu au băgat de seamă că ecuaţia de gradul III are rădăcina $y_1 = \frac{1}{3}$, sau au greşit calculul.

3°. S'au mai primit trei soluţii dintre care două neacceptabile, iar una (in genul soluţiei a II-a) scrisă aşa de neciteţ, încât a fost imposibil de urmărit.

PROBLEMA 5189. *Dacă vârful* S *al tetraedrului* SABC *se proiectează pe planul* ABC *în punctul de intersecţie al cercului lui* BROCARD *cu mediatricea laturei* BC *al triunghiului* ABC, *avem relaţia*

$$\Sigma\, \overline{SA}^2 \cdot \overline{BC}^2 \cdot (\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2) = 2S \cdot \overline{BC}^2\ (\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2)(\text{cotg}A - \text{tg}V)$$

S *fiind suprafaţa triunghiului* ABC, *iar* V *unghiul lui* BROCARD *al aceluiaşi triunghiu.*

AL. POPESCU-ZORICA.

Soluţie dată de D-l MIRCEA D. POPA (lic. mil. Iaşi). Din enunţ rezultă că vom avea SB = SC şi prima parte a relaţiei de demonstrat se reduce la

$$\overline{BC}^2\ (\overline{SA}^2 - \overline{SB}^2)(\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2)$$

rămâne deci de arătat, că

$$\overline{SA}^2 - \overline{SB}^2 = 2S(\text{cotg}A - \text{tg}V).$$

Fie U proiecția lui S la locul indicat, în planul triunghiului ABC; avem

$$\overline{SA}^2 - \overline{SB}^2 = \overline{UA}^2 - \overline{UB}^2$$

și $\sphericalangle UBC = V$; deci

$$\overline{UA}^2 - \overline{UB}^2 = \overline{AB}^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{BU}\cos(B - V)$$

$$= c\left[c - \frac{a}{\cos V}\cos(B - V)\right]$$

$$= c\,[a\cos B + b\cos A - a\,(\cos B + \sin B\ \mathrm{tg}V)]$$

$$= c\,[b\cos A - b\sin A\ \mathrm{tg}V] = bc\sin A(\cot A - \mathrm{tg}V] = 2S(\cot gA - \mathrm{tg}V).$$

Se observă că nu era necesar ca V să fie unghiul BROCARD ci $\sphericalangle UBC$ când U este arbitrar pe mediatoare, proiecția lui S.

PROBLEMA 5198. *Fie* M *și* N *mijloacele laturilor opuse* AB *și* CD *ale unui dreptunghiu* ABCD. *Prin* N *se duce o dreaptă* Δ, *care taie pe* AB *în* E. *Pe* MN *se iau punctele* P *și* Q, *simetrice față de* N *și așa în cât*

$$\frac{NP}{EM} = \frac{NQ}{EM} = \frac{AB}{BC}.$$

Se notează cu P′ *și* Q′ *proiecțiile lui* P *și* Q *pe* Δ *și se cere să se demonstreze că figura* CP′DQ′ *este un paralelogram în care laturile opuse* CP′ *și* DQ′ *sunt constante ori care ar fi poziția dreptei* Δ.

G-L GH. BUICLIU.

I. *Soluție* dată de D-nii ST. CETĂȚEANU (Student inginer) și M. I. TREFILOV (Lic. „N. Bălcescu", Brăila).

1°. Triunghiurile dreptunghice NP′P și NQ′Q sunt egale având ipotenusele și câte un unghiu ascuțit egale, deci

$$\overline{NP'} = \overline{NQ'}.$$

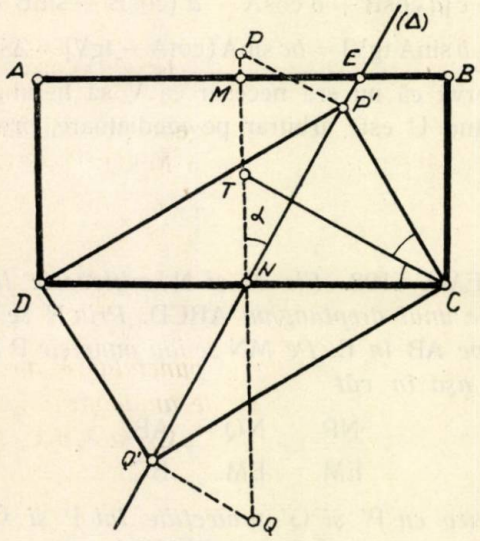
Figura CP′DQ′ având diagonalele cu mijlocul în N, intersecția lor, este deci un paralelogram.

2°. Fie T intersecția lui NM cu perpendiculara din C pe Δ. Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice CNT și NME se scoate

$$\frac{NT}{NC} = \frac{ME}{MN} = \frac{ME}{BC} = \frac{2NT}{AB} \quad \therefore \quad \frac{AB}{BC} = \frac{2NT}{ME}$$

care comparată cu relațiile din enunț dă

$$NT = \frac{PN}{2}.$$



Deci T este mijlocul lui NP și cum CT ∥ PP′ urmează că CT este perpendiculară pe mijlocul lui NP′ și că triunghiul NCP′ este isoscel. Deci

$$CP' = CN = \frac{AB}{2} = \text{const.}$$

II. *Soluție,* dată de D-nii: ST. CETĂȚEANU (Student inginer) I. D. DIACONESCU (Șc. Ofițeri de Geniu, București), H. M. BODNĂRESCU (Student, Politechnica București), GH. R. PETRESCU (Lic. „I. Maiorescu", Giurgiu), MIRCEA D. POPA, P. P. DRĂGHICESCU, I. V. JAREGHIE (Lic. militar, Iași) și E. GH. FILA.

1°. Analog cu soluția I.

2°. Notând cu α unghiul PNP', avem pe figură

$$\overline{P'C}^2 = \overline{NP'}^2 + \overline{NC}^2 - 2\overline{NC} \cdot \overline{NP'} \sin\alpha$$

$$\therefore \quad \overline{P'C}^2 = \overline{NP}^2 \cos^2\alpha + \frac{\overline{AB}^2}{4} - \overline{NP} \cdot \overline{AB} \sin\alpha \cos\alpha$$

sau înlocuind pe $\overline{NP}$ prin valoarea ce se scoate din relațiile date în enunț și ținând seamă că

$$\frac{\overline{EM}}{\overline{BC}} = \operatorname{tg}\alpha$$

găsim

$$\overline{P'C}^2 = \overline{AB}^2 \left[\operatorname{tg}^2\alpha \cos^2\alpha + \frac{1}{4} - \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha \cos\alpha \right] = \frac{\overline{AB}^2}{4} \cdot$$

S'au primit bune soluții prin geometria analitică dela D-nii: E. G. FILA, D. RIPIANU, J. SEGAL și MIREL D. STOENESCU.

PROBLEMA 5215. *Fie în triunghiul* ABC, *punctele* A_1, B_1, C_1 *picioarele înălțimilor lui pe laturi, iar* A', B', C' *intersecțiile lor cu cercul* ABC; A_b, A_c *proiecțiile punctului* A' *pe celelalte două înălțimi,* B_a, B_c *și* C_a, C_b *punctele analoage;* $A_2B_2C_2$ *triunghiul format de dreptele* A_bA_c, B_aB_c, C_aC_b *și* $A_3B_3C_3$ *triunghiul format de dreptele* A_bB_a, A_cC_a, B_cC_b. *Să se arate că:*

1°. *Triunghiurile* $A_2B_2C_2$ *și* $A_1B_1C_1$ *sunt omotetice egale;*

2°. *Triunghiurile* $A_3B_3C_3$ *și* ABC *sunt omotetice;*

3°. *Triunghiul* $A_2B_cC_b$ *și cel format de latura* BC *cu dreptele lui* SIMSON *ale punctelar* B', C' *relative la triunghiul* ABC, *sunt omotetice;*

4°. *Patrulaterele* $A_bB_aC_aC_b$, $A_bB_aA_1B_1$, A_bA_cBC *și analoagele lor sunt inscriptibile;*

5°. *Grupa de puncte* A', B_3, B_2, C' *și analoagele ei sunt grupe de puncte coliniare.*

I. GH. ZAMFIRESCU.

1°. Patrulaterul $C'C_bHC_a$ fiind inscriptibil, avem:

$$\sphericalangle C'C_bC_a = \sphericalangle C'HC_a = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle HAB = \sphericalangle ABA_1 = \sphericalangle ABC. \quad (1)$$

De altă parte:

$$\sphericalangle C_b C'B' = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle C'B'C_b \equiv \frac{\pi}{2} - \sphericalangle C'B'B = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle C'CB =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \sphericalangle C_1CB = \sphericalangle CBC_1 = \sphericalangle CBA; \qquad (2)$$

comparând (1) cu (2) deducem că:

$$\sphericalangle C' C_b C_a = \sphericalangle C_b C' B', \qquad (3)$$

deci că asemenea complementele unghiurilor egale din (3) sunt egale adică:

$$\sphericalangle C'B'C_b = \sphericalangle C_a C_b B', \qquad (4)$$

iar relațiile (3) și (4) spun că în triunghiul dreptunghiu $B' C_b C'$ dreapta $C_b C_a$ taie ipotenuza $B'C'$ în mijlocul ei. In același fel, patrulaterul $B' B_c HB_a$ fiind inscriptibil, avem egalitățile:

$$\sphericalangle B' B_c B_a = \sphericalangle B'HB_a = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle B_1BC = \sphericalangle ACB \qquad (5)$$

și

$$\sphericalangle B_c B'C' = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle B'C'C = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle B'BC = \sphericalangle ACB, \qquad (6)$$

deci

$$\sphericalangle B' B_c B_a = \sphericalangle B_c B' C' \qquad (7)$$

și asemenea:

$$\sphericalangle B' C' B_c = \sphericalangle B_a B_c C'. \qquad (8)$$

Din (7) și (8) urmează că în triunghiul dreptunghiu $B' B_c C'$ dreapta $B_c B_a$ trece prin mijlocul ipotenuzei $B'C'$. Așa dar, *intersecția* A_2 *a dreptelor* $B_a B_c$ *și* $C_a C_b$ *este mijlocul lui* $\overline{B'C'}$.

Analog arătăm că B_2, C_2 sunt respectiv mijloacele segmentelor $A'C'$ și $A'B'$.

Triunghiul $A_2B_2C_2$ fiind triunghiul median al triunghiului $A'B'C'$ *este omotetic cu el* cu raportul pe omoteție $\frac{1}{2}$; dar și $A_1B_1C_1$ este omotetic cu $A'B'C'$ cu raportul de omoteție $\frac{1}{2}$; urmează că $A_2B_2C_2$ *este omotetic și egal cu* $A_1B_1C_1$.

2°. Patrulaterul $B'B_cC_bC'$ fiind inscriptibil, avem egalităţile:

$$\sphericalangle B'C_bB_c = \sphericalangle B_cC'B' = \sphericalangle CC'B' = \sphericalangle B'BC, \qquad (9)$$

de unde rezultă că:

$$C_bB_c \parallel AC. \qquad (10)$$

Analog demonstrăm că avem:

$$A_cC_a \parallel AC \quad \text{şi} \quad A_bB_a \parallel AB. \qquad (10')$$

Urmează de aici, că *triunghiul* $A_3B_3C_3$ *este omotetic cu triunghiul* ABC.

Mai mult, observăm că C_bB_c fiind paralelă cu BC este paralelă cu $B'B_a$; asemenea A_bB_a este paralelă cu $B'B_c$; deci $B'B_aB_3B_c$ este paralelogram. Fie N intersecţia lui B_aB_c cu $B'B_3$, avem:

$$\overline{B'N} = \overline{NB_3}, \qquad (11)$$

dar A_2C_2 în triunghiul $C'B'A'$, unind mijloacele a două laturi, împarte toate segmentele, plecând prin B' la latura opusă, în părţi egale; urmează *că* B_3 *aparţine laturei opuse* $A'C'$. Asemenea, C_3 *şi* A_3 *aparţin respectiv laturilor* $A'B'$ *şi* $B'C'$. [De unde poate fi enunţată proprietatea din enunţ dela (5°)].

Proiectăm acum punctul H în A_3' pe latura $B'C'$ şi fie P şi R punctele unde $B'C'$ taie pe AA_1 şi AB. In triunghiul HPB', dreapta $A_3'B_a$ unind picioarele a două înălţimi este antiparalelă la a treia latură, adică la $B'H$; deci avem:

$$\sphericalangle C'A_3'B_a = \sphericalangle AHB'. \qquad (12)$$

De altă parte:

$$\text{arc } AB' = \text{arc } AC' \;;\; \text{arc } BC' = \text{arc } BA' \;;\; \text{arc } CA' = \text{arc } CB',$$

deci

$$\sphericalangle AHB' = \sphericalangle ARB' \qquad (13)$$

Comparând (12) cu (13) rezultă că:

$$\sphericalangle C'A_3'B_a = \sphericalangle ARB' \qquad (14)$$

şi ca urmare că:

$$A_3'B_a \parallel AB. \qquad (15)$$

Dreapta $A_3'B_a$ coincide, în baza postulatului lui EUCLIDE, cu dreapta A_bB_a şi prin urmare punctul A_3' coincide cu A_3.

Am găsit astfel, că: **vârfurile triunghiului $A_3B_3C_3$ sunt proiecţiile ortocentrului H al triunghiului ABC pe laturile triunghiului A'B'C'.**

H însă este pentru triunghiul A'B'C' centrul cercului înscris, deci A_3, B_3, C_3 sunt punctele de tangenţă ale cercului înscris în A'B'C' cu laturile acestui triunghiu. De altă parte, se ştie că dreptele, care unesc punctele de contact ale unui cerc tritangent unui triunghiu cu vârfurile corespunzătoare, sunt concurente în acelaşi punct. Aşa dar, *triunghiul* $A_3B_3C_3$ *este omologic cu triunghiul* A'B'C'.

3°. Fie E' proiecţia lui B' pe BC; dreapta $E'B_1$ este dreapta lui SIMSON a punctului B' faţă de triunghiul ABC. Din patrulaterul inscriptibil BB_1CE' avem egalităţile:

$$\sphericalangle B_1E'B' = \sphericalangle B_1CB' \equiv \sphericalangle ACB' = \sphericalangle AA'B' = \sphericalangle AA'C', \quad (16)$$

căci arc AB' = arc AC'. E'' fiind punctul unde $E'B_1$ taie pe AA', avem:

$$\sphericalangle B'E'B_1 = \sphericalangle E'E''A', \quad (17)$$

pe care comparând-o cu (16) deducem.

$$\sphericalangle E'E''A' = \sphericalangle C'A'A, \quad (18)$$

adică

$$E'B_1 \parallel A'C'. \quad (19)$$

Asemenea $F'C_1$, dreapta lui SIMSON a punctului C' faţă cu triunghiul ABC, este paralelă cu A'B' (proprietate cunoscută). Dar $A_2C_b \equiv A_2B_2$ este şi ea paralelă cu A'B', iar $A_2B_c \equiv A_2C_2$ este paralelă cu A'C'; aşa dar *triunghiul* $A_2B_cC_b$ şi cel format de dreptele $E'B_1$, $F'C_1$, BC sunt omotetice având laturile respectiv paralele:

$$E'B_1 \parallel A_2C_2 \quad ; \quad F'C_1 \parallel A_2B_2 \quad \text{şi} \quad BC \parallel C_bB_c.$$

Aceeaşi demonstraţie pentru perechile de triunghiuri analoage:

Observare. Triunghiul format de dreptele lui SIMSON ale punctelor A', B', C' faţă de triunghiul ABC este omotetic cu triunghiul A'B'C', deci cu triunghiul ortic $A_1B_1C_1$ al triunghiului ABC.

4°. Observăm că $A_bB_a \equiv A_3B_3$ fiind paralelă cu AB, avem egalitatea:

$$\sphericalangle A_bB_aC_a = \pi - \sphericalangle BAA', \quad (20)$$

dar $C_aC_b \parallel A'B'$, deci avem asemenea egalităţile:

$$\sphericalangle C_aC_bA_b \equiv \sphericalangle C_aC_bB' = \sphericalangle C_bB'A' \equiv \sphericalangle BB'A' = \sphericalangle BAA'. \quad (21)$$

Comparând relaţiile (20) şi (21) deducem:

$$\sphericalangle A_b B_a C_a = \pi - \sphericalangle C_a C_b A_b \tag{22}$$

din care rezultă că *patrulaterul* $A_b B_a C_a C_b$ *este inscriptibil.*

In acelaşi fel, observând că

$$\sphericalangle A_b B_a A' = \pi - \sphericalangle A_b B_a A = \sphericalangle BAB_a \equiv \sphericalangle BAA'$$
$$= \sphericalangle BB'A' = \sphericalangle BB_1A_1, \tag{23}$$

$(A_1B_1 \parallel A'B')$, deducem că:

$$\sphericalangle A_b B_a A_1 = \sphericalangle A_b B_1 A_1, \tag{24}$$

adică *patrulaterul* $A_b B_a B_1A_1$ *este inscriptibil.*

Acum observând că dreptele $A_bA_c \equiv B_2C_2$ şi $B'C'$ sunt paralele, deducem egalităţile:

$$\sphericalangle A_c A_b B' = \sphericalangle A_b B'C' \equiv \sphericalangle BB'C' = \sphericalangle BCC' = \sphericalangle A_c CB, \tag{25}$$

dar

$$\sphericalangle A_c A_b B' = \pi - \sphericalangle A_c A_b B;$$

deci

$$\sphericalangle A_c CB = \pi - \sphericalangle A_c A_b B, \tag{26}$$

adică *patrulaterul* $A_b A_c CB$ *este inscriptibil.*

Au rezolvat proprietăţile cerute în enunţul problemii: D-l M. AL. VASILESCU-STABU (Cl VIII-a, Lic. Militar Craiova), pe o altă cale geometrică şi D-l CONSTANTIN PANTELIMON (Cl. VIII-a, Lic. Militar Iaşi) folosind şi relaţii trigonometrice.

Observare. Construcţiile foarte exacte, cu care obişnuieşte D-l M. AL. VASILESCU-STABU să-şi însoţească soluţiile trimese, i-au semnalat proprietatea că A_3, B_3, C_3 sunt proiecţiile lui H pe laturile triunghiului A'B'C', D-sa însă n'a stăruit să demonstreze această *interesantă proprietate.*

O. N. Ţ.

PROBLEMA 5293. *Intr'un triunghiu oarecare însemnând cu* β_a, β_b, β_c; β'_a, β'_b, β'_c *lungimile bisectoarelor interioare şi exterioare, iar celelalte notaţii fiind cele obişnuite, să se demonstreze relaţiile:*

1. $$\frac{\cos\frac{1}{2}A}{\beta_a} + \frac{\cos\frac{1}{2}B}{\beta_b} + \frac{\cos\frac{1}{2}C}{\beta_c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

2. $$\frac{\sin\frac{1}{2}A}{\beta'_a} - \frac{\sin\frac{1}{2}B}{\beta'_b} + \frac{\sin\frac{1}{2}C}{\beta'_c} = 0.$$

VIRGIL GHIŢESCU.

1. D-l FLORIN N. IORGULESCU, elev Lic. Lazăr Buc., observă că relaţiile propuse se găsesc publicate şi rezolvate în „Culegere de probleme de Trigonometrie, partea 2-a, VIII, 8, 9 edit. G. M.", ceea ce este adevărat.

Din cauza acestei coincidenţe ne vom mărgini numai să schiţăm soluţionarea problemei.

Fie un triunghiu oarecare ABC şi $\overline{AA'} = \beta_a$. Avem identitatea:

$$\text{tr. } ABA' + \text{tr. } ACA' = \text{tr. } ABC.$$

Exprimând trigonometriceşte suprafaţa fiecărui triunghiu, vom avea:

$$\frac{1}{2} c\beta_a \sin\frac{1}{2}A + \frac{1}{2} b\beta_a \sin\frac{1}{2}A = \frac{1}{2} bc\left(2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A\right).$$

De unde:

$$(1) \qquad \frac{\cos\frac{1}{2}A}{\beta_a} = \frac{b+c}{2bc}.$$

Această formulă şi analoagele ei obţinute prin permutări circulare, adunate parte cu parte, ne conduc la prima relaţie care era de demonstrat.

Pentru a 2-a relaţie, considerăm în acelaşi triunghiu bisectoarea exterioară $\overline{AA''} = \beta'_a$ şi vom avea:

$$\text{tr. } ABA'' - \text{tr. } ACA'' = \text{tr. } ABC$$

de unde, ca mai sus scoatem:

$$(2) \quad \beta'_a = \frac{2bc\sin\frac{1}{2}A}{c-b}, \quad \beta'_b = \frac{2ca\sin\frac{1}{2}B}{c-a}, \quad \beta'_c = \frac{2ab\sin\frac{1}{2}C}{b-a}.$$

Tragem apoi:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A}{\beta'_a} = \frac{c-b}{2bc} \text{ etc.}$$

2. In soluţiunile primite, unii corespondenţi au folosit şi consideraţiuni geometrice, alţii au pornit direct dela formulele cunoscute (1) şi (2) sau au folosit alte exprimări cunoscute ale lui β şi β'.

Au rezolvat problema D-nii: D. BOIANGIU, D. BOJIN, C. CRUCERU, C. DIACONESCU, I. DRĂGHICESCU, I. GLIGOR, FL. IORGULESCU, P. IRIMESCU, A. JILETCOVICI, N. MOSCOVICI, MIR. NEGREA,

C. PANTELIMON, IUL. PETRESCU, MIR. POPA, VL. RACOVICEANU, A. ROHR, J. SEGAL, MIREL STOENESCU, M. VĂDUVA, H. M. BODNĂRESCU, STELIAN CETĂŢEANU, C. D. EFTIMIE şi MIR. C. NICULESCU.

3. Relaţiunile propuse sunt valabile oricare ar fi triunghiul (ceea ce nu se specifică în Culegere). Intr'adevăr, ne mai discutând pe prima, care nu prezintă nici o îndoială, când triunghiul este echilateral, numitorii în relaţia a 2-a fiind infiniţi, iar numărătorii finiţi, relaţia devine evidentă.

Dacă numai $b = c$, avem $\beta'_a = \infty$, iar ceilalţi doi termeni din partea 1-a se reduc.

4. Unii corespondenţi, pornind dela valorile lui β', deduse prin permutări circulare au conchis că în relaţia 2-a trebue pus semnul (+) în locul lui (—). De acord, numai că în cazul general $a < b < c$ — cazurile particulare au fost discutate la punctul precedent — se vede că avem $\beta'_b < 0$, deci semnul (—) este cuprins în β'_b, pe când aşa cum s'a tipărit, expresiunile β' sunt luate în valoare absolută. Geometriceşte, se vede că β'_b trebue să fie de semn contrar cu celelalte două, întrucât această bisectoare întâlneşte latura opusă când aceasta este prelungită în sens invers decât celelalte două laturi. In fine, scriind (+) peste tot, conchidem că, sinusurile fiind toate pozitive, nu se poate ca toate expresiile β' să fie şi ele pozitive, având zero în partea a 2-a.

5. Au mai stabilit relaţiuni analoage cu cele din enunţ precum urmează, D-nii:

$$\sum \frac{\cos\frac{1}{2}A}{a\beta_a} = \sum \frac{1}{ab} \quad ; \quad \frac{\sin\frac{1}{2}A}{a\beta'_a} - \frac{\sin\frac{1}{2}B}{b\beta'_b} + \frac{\sin\frac{1}{2}C}{c\beta'_c} = 0.$$

(IUL. PETRESCU).

$$\frac{\sin A}{\beta_a \beta'_a} - \frac{\sin B}{\beta_b \beta'_b} + \frac{\sin C}{\beta_c \beta'_c} = 0.$$

(M. D. POPA).

$$\sum \frac{\cos\frac{1}{2}A}{\alpha'_a} = 2\sum \frac{\cos\frac{1}{2}A}{\alpha_a} \text{ (unde } \alpha_a = \overline{AI},\ \alpha'_a = \overline{IA'}).$$

(MIREL STOENESCU).

V. GH.

PROBLEMA 5407. *Există patrate de forma aabbcc?*

I. IONESCU.

Soluție dată de D-ra LYDIA M. TUDORAN (Elevă cl. VI-a, Șc. centrală de fete „Marica Brâncoveanu", București) și de D-nii: VĂDUVA F. MARIN și BOIANGIU D. D. (Elevi-ingineri. Șc. Politechnică din București), C. M. ANDREI (Student, București). CRUCERU GH. A. (Elev cl. VIII-a, lic. „Traian", T.-Severin), GH. D. SBÂRNEA (Elev cl. VIII-a, lic. „D. A. Sturdza", Tecuci), BAKONYI C. (Elev lic. „C. D. Loga", Timișoara), PAUL T. ELIAS (cl. VII-a), M. G. POPESCU (cl. VI-a, lic. Pitești), A. N. POPA (cl. VII-a, lic. Militar, Iași), D. MUSCELEANU (cl. VII-a, lic. Caracal), V. G. BÂRLEA-SUHĂȚEANU (cl. VIII-a, Colegiul Național, „N. Filipescu", Predeal).

Singurele două cifre finale identice ale unui patrat nu pot fi decât 00 și 44. (A se vedea *„Culegere de Probleme de Aritmetică"*, Partea I-a; *„Aritmetica rațională"* de I. IONESCU, Problema Nr. 1, Cap. 48). Deci numerele căutate nu pot fi decât de forma *aabb*00 sau *aabb*44.

Numărul *aabb*00 divizat cu patratul 100 ne dă câtul *aabb* care trebuie să fie patrat. Însă din studiul Problemei 5287, publicată în Anul XLV, pag. 611, rezultă că singurele patrate de această formă sunt 0000 și 7744. Prima dă pentru problema noastră soluția formală 000000 și a doua soluție admisibilă 774400.

Numărul *aabb*44 se divide cu 11 și câtul se vede că este *a*0*b*04. Un patrat nu se poate divide cu un număr prim fără a se divide și cu patratul lui; deci $a0b04 = \mathfrak{M}11$. După criteriul de divizibilitate prin 11 trebuie ca $a+b+4-0-0=\mathfrak{M}11$, adică $a+b+4=11$ sau $a+b+4=22$. Acest din urmă caz cere $a=b=9$ de unde numărul 999944, care divizat cu 11^2 ne dă câtul 8764, care nu este patrat. Rămâne dar să luăm numai $a+b=7$. De aci soluțiile:

$$\begin{cases} a=0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ b=7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ aabb44=007744; & 116644; & 225544; & 334444; & 443344; \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \\ 552244; & 661144; & 770044. \end{matrix}$$

Numărul 007744 este o soluție formală. Dintre celelalte nu este nici unul admisibil, căci extrăgându-le rădăcina patrată se constată că nici unul dintre ele nu este patrat.

Problema admite dar soluțiunea 774400 și două soluții formale 000000, 007744.

EXERCIŢII

12. Dacă tangentele jumătăţii unghiurilor unui triunghiu oarecare sunt în progresie aritmetică, suprafaţa triunghiului este dată de formula

$$2S = (p - b)\sqrt{2pb}.$$

PETRU SIMON.

R. Avem

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}A = \frac{S}{p}\cdot\frac{1}{p-a}$$

deci şi inversele $(p-a), \ldots$ sunt în progresie aritmetică:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-c} = \frac{2}{p-b} \quad \therefore \quad \frac{b}{(p-a)(p-c)} = \frac{2}{p-b}$$

şi cum

$$(p-a)(p-c) = \frac{S^2}{p(p-b)}$$

se găseşte imediat relaţia din enunţ.

PROBLEME PROPUSE

5437. Pe latura AB a unui triunghiu ABC se ia un punct mobil M. Fie P proiecţia lui M pe AC şi R proiecţia lui P pe BC. Care este maximul ariei triunghiului MPR?

I. IONESCU.

5438. Unul din mijloacele de prezicere a viitorului este *cătatul în bobi* sau *datul în bobi.* Pentru aceasta se iau 41 de bobi, se *descântă* şi apoi se împart în trei grupe la întâmplare. Se iau din fiecare grupă bobii 4 câte 4, iar ultimele 4 (sau mai puţine) se dau la o parte aşezându-se în linie cu cele rămase în acelaşi fel dela fiecare grupă.

Bobii ce nu sunt în această linie se amestecă şi se repetă încă de două ori această operaţie.

Se obţin astfel trei linii cu câte trei grupe de boabe, în fiecare grupă fiind cel mult 4 *bobi.*

De numărul total de *bobi* din prima linie depinde în mare parte soarta faptului pentru care se dau *bobii* (restul liniilor dând numai lămuriri în legătură cu ce dă prima).

Dacă *bobii cad pe cinci* (adică numărul total în prima linie e 5) este bine, de *cad însă pe nouă*, nu este bine.

Să se arate că nu există decât aceste două posibilităţi, adică *bobii* nu pot cădea decât *pe cinci* sau *pe nouă*.

CONST. SĂNDULACHE.

5439. $\varphi(n)$ fiind numărul numerelor prime cu n şi mai mici ca n, să se arate că avem

$$\varphi(ab) \leqq \sqrt{\varphi(a^2) \cdot \varphi(b^2)}$$

oricare ar fi numerele naturale a, b. Cum trebue să fie a şi b pentru ca semnul $=$ să fie valabil.

TIBERIU POPOVICIU.

5440. Fie M un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC; A_1, B_1, C_1 mijloacele arcelor BC, CA, AB, iar I centrul cercului înscris. Să se demonstreze că:

1°. Perpendicularele din I pe MA_1, MB_1, MC_1 taie laturile triunghiului ABC în trei puncte colineare A', B', C'.

2°. Paralelele prin I la MA_1, MB_1, MC_1 taie laturile triunghiului ABC în trei puncte colineare A'', B'', C''.

3°. Mijloacele segmentelor A'A'', B'B'', C'C'' sunt colineare.

MARIN IL. PREDOESCU.

5441. Fie A, Δ şi Δ' un punct fix şi două drepte date în plan. Un punct M se mişcă pe Δ. Se cere, să se găsească locul unui punct C de pe MA ştiind că $\overline{MC}$ este egală cu distanţa dela M la Δ'.

Dacă B este un al doilea punct dat în plan, să se arate că se poate construi şi să se construiască triunghiul isoscel BMC cu vârful în M ştiind că M se mişcă pe Δ, MC trece prin A, $\overline{MC} = \overline{MB}$ şi egale cu distanţa dela M la Δ'.

G-L GH. BUICLIU.

5442. Pe o parabolă de parametru p, fie A un punct fix, la distanţa a de axă şi M variabil, care se proiectează în N pe normala din A şi în P pe paralela din A la axă; când M descrie parabola, avem:

$$\overline{MP}^2 = 2\sqrt{a^2+p^2}\cdot\overline{AN}.$$

Caz particular, când A e vârful parabolei.

N. N. MIHĂILEANU.

5443. Fie $\overline{B'C'}$ proiecţia laturei BC pe tangenta în A la cercul O circumscris triunghiului ABC şi fie A_1 intersecţia perpendicularelor din B' şi C' pe laturile AC şi AB, iar A_2 mijlocul segmentului B'C'.

Se cere locul punctelor A_1 şi A_2, când A este mobil pe cercul O.

CPT. I. GH. ZAMFIRESCU.

5444. Un cerc, care trece prin proiecţia punctului lui MIQUEL pe dreapta lui MIQUEL a aceluiaşi patrulater, taie parabola înscrisă patrulaterului în trei puncte astfel că normalele în aceste puncte sunt concurente.

CPT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

5445. Să se găsească locul punctelor, din care se pot duce la o elipsă dată normale care formează un fascicol armonic.

ION C. VASILIU.

5446. Să se calculeze pentru $n = \infty$, limita expresiei:

$$E \equiv n\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n+2} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+2}\right].$$

M. GHERMĂNESCU.

5447. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x(x+1)} = 0.$$

GH. POPESCU-BOTOŞANI.

5448. Să se arate, că dacă avem:

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\ldots+\frac{x_n}{a_n}=1,$$

avem, deasemeni:

$$x_1^{\frac{2}{3}}+x_2^{\frac{2}{3}}+\ldots+x_n^{\frac{2}{3}}\leq(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Se cere o interpretare geometrică pentru cazul particular $n=2$.

ŞERBAN GHEORGHIU.

5449. Ecuaţia

$$x^3-2a^2x^2+3a^2x-2a^2=0, \qquad (1)$$

unde a este un număr real oarecare, are o singură rădăcină reală. Parametrul a este presupus ales astfel ca ecuaţia:

$$x^3-4a^2x+4a^2=0 \qquad (2)$$

să aibă rădăcinile reale. In acest caz, să se aşeze în ordinea mărimii rădăcinile pozitive ale ecuaţiilor (1) şi (2).

TH. ANGHELUŢĂ.

5450. O bară de secţiune constantă e alcătuită în lungimea ei din trei porţiuni făcute din metale diferite. Bara este nichelată (greutatea stratului de nichel neglijabilă). Cunoscând ordinea în care sunt dispuse metalele, să se determine secţiunile de separaţie între ele, fără a înlătura stratul de nichel, printr'un procedeu de fizică şi printr'un procedeu de mecanică.

GH. D. SIMIONESCU.

5451. Una din aventurile „*Profesorului* NIMBUS“ constă în aruncarea unei săgeţi cu un arc clasic, săgeata fiind legată cu o sfoară de o măsea (pe care NIMBUS voia astfel să şi-o scoată). Săgeata este asvârlită însă cu o viteză aşa de mare, încât antrenează şi pe NIMBUS, admiţând — bine înţeles — că sfoara rezistă, iar măseaua nu cedează. Admiţând că viteza săgeţii nu scade până ce sfoara se întinde, că sfoara are o greutate neglijabilă şi că este inextensibilă, că greutatea săgeţii este 700 gr., iar a corpului lui NIMBUS 70 kg.; se pun întrebările:

1. Cu ce viteză a fost asvârlită săgeata, viteza cu care este antrenat NIMBUS fiind 10 m/sec.?

2. Este posibil să se realizeze această viteză cu un arc clasic strunit de un om?

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

Până la sfârșitul lunei precedente, s'au primit și reținut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Andonie St. Iancu (5418, 19, 23); *Andrei M. C.* (4452, 5369, 78, 407); *Bârlea-Suhățeanu G. M.* (5407); *Boldescu Petre* (5039); *Broșteanu Gh.-Taslău* (5365, 77); *Drăghicescu P. Paul* (3459, 88, 4986, 5016, 86, 176, 254, 96, 98, 368, 77, 300, 01, 18, 28, 39, 67, 68, 77, 99, 407); *Eckstein Virgil* (N); *Eftimie C. D.* (5322); *Friedman-Câmpina Barbu* (5399); *Gheorghiu E. Octavian* (5219, 307, 72); *Iacomi Mircea* (5264); *Martac C. Radu* (4452, 5392, 95, 96, 99); *Moscovici Nic.* (5369, 433); *Musceleanu Daniel* (5273, 82, 91, 369, 407); *Negrescu C. I.* (5418); *Nicolau Gr. C.* (5423); *Pantelimon V. Const.* (4452, 5194, 395, 99); *Petrescu R. Gh.* (5319, 66, 78, 416); *Pintilie I. Ioan* (5307, 26, 69, 419); *Popa D. Mircea* (5339, A); *Popa N. Aurel* (5369, 407); *Popescu Florin* (5369, 90); *Popescu Gh. Marin* (5379, 90, 95, 407, 14, 16); *Sbârnea D. Gh.* (5033, 300, 95); *Șerban A. Teodor* (4667, 5024, 52, 117, 38, 47, 76, 369, 424, 35); *Stoenescu D. Mirel* (4815, 986, 5176, 228, 328, 78, 418, 23); *Stoianovici Șerban* (5369, 77, 90); *Trefilov Mihai* (5027); *Tudoran M. Lydia* (5423); *Voinea P. R.* (5414); *Zamfir C. Ivan* (5021).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie**, *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii și nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică**, ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, III, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

VI. **Tr. Lalescu**, *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr**, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica**, *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii

{ Abonamentul anual (9 numere). Lei 50
{ Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 68.356

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVI

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1941

BIBLIOTECA CENTRALĂ SIBIIU

SUMARUL

1. Calculul vectorial (urmare) . *Dr. Ing. Plautius Andronescu.*
2. Soluţia şi generalizarea problemei 1876. *Tiberiu Popoviciu.*
3. Raport asupra lucrării D-lui Prof. Ion Ionescu. „Maxime şi minime geometrice". *Delegaţia Societăţii.*
4. Raportul comisiunii pentru premiul de aritmetică . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
5. Concursul „Gazetei Matematice" . . . *Delegaţia Societăţii.*
6. Note Matematice: 30 — 35.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 300.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 3547, 4121, 4163, 4942, 5186, 5223, 5300, 5314, 5377.
11. Exerciţii: 13.
12. Probleme propuse: 5426, 5452 — 5466.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1941

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer, şi D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1940 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: **53**64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 4**0**0, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

Avem plăcerea a anunţa că dela 20 Februarie 1941, mai fac parte din Societatea noastră şi D-nii: *C. V. Costăchescu*, Căpitan; *Paul I. Ionescu*, Profesor; *Mircea I. Rădulescu*, Inginer; *Theodor I. Ruzvan*, Inginer, *Marin D. Stancu*, Inginer; *Şerban Ţiţeica*, Licenţiat şi Doctor în ştiinţe fizice; *Eugen Vasiliu*, Inginer şi *I. C. Vasiliu*, Inginer.

CALCULUL VECTORIAL

(Urmare dela pag. 289)

§. 3. Algebra vectorială

Definiția și reprezentarea vectorului. Vectorul se definește prin produsul vectorului unitar cu o scalară, care reprezintă valoarea numerică a acelui vector. Spre exemplu: $\mathcal{A} = A\bar{a}$. Valoarea numerică se reprezintă prin litere de tipar și vectorul unitar prin litere mici cursive cu o liniuță deasupra.

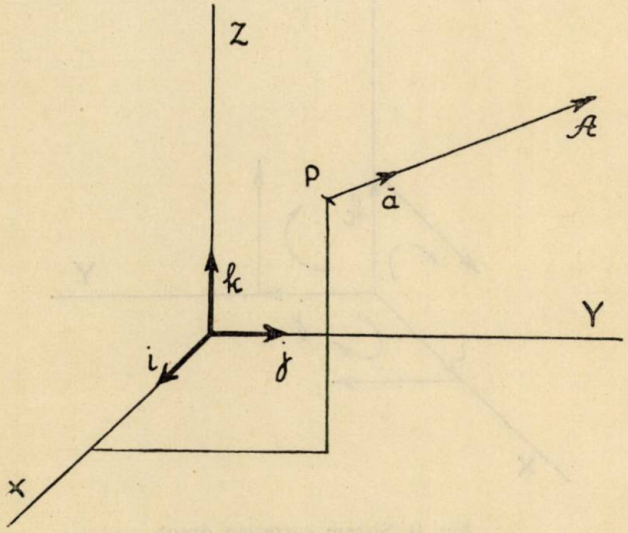


Fig. 8. Reprezentarea vectorului în spațiu.

Grafic vectorul se reprezintă printr'un segment de dreaptă, cu o săgeată (indicăm sensul) fixat într'un anumit punct și cu o anumită direcție. Vezi Fig. 8.

Introducând spre exemplu sistemul de coordonate cartesian, pentru determinarea vectorului, se introduce odată cu sistemul de coordonate trei vectori unitari de direcție constantă după axele X, Y, Z, pe care îi vom nota prin: *i*, *j*, *k* (sunt singurii vectori unitari fără liniuțe).

De aici rezultă, că fixarea vectorilor unitari *i*, *j*, *k* nu comportă cunoașterea nici unei valori numerice.

Totuşi e necesar să facem remarca, că prin introducerea vectorilor unitari: *i, j, k* sistemul cartesian devine fie drept fie stâng. Când vectorul *j* pus la vârful vectorului *i* sau *k* pus la vârful lui *j* ş. a. m. d., ne indică câte un sens de rotaţie, care după legea tirbuşonului ne dă sensul vectorului *k* resp. *i* ş. a. m. d., zicem că sistemul cartesian e drept; dacă sensul indicat de regula tirbuşonului e opus vectorului unitar respectiv, sistemul cartesian este stâng [1]). (Vezi Fig. 9 şi 10).

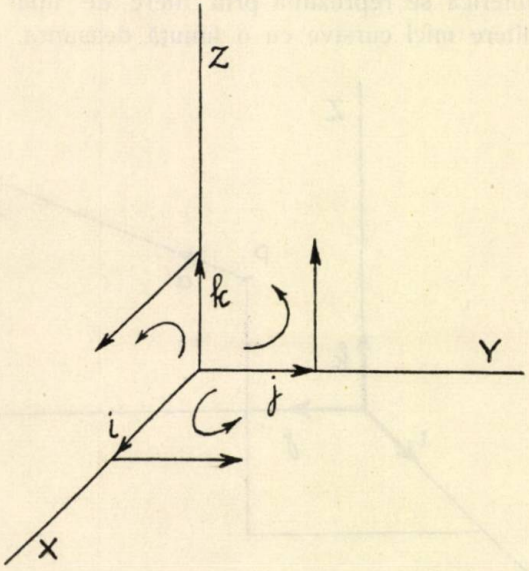


Fig. 9. Sistem cartesian drept.

E bine să se facă remarca, că odată cu fixarea sistemului cartesian s'a fixat şi caracterul de sistem drept sau stâng. In general se utilizează sistemul drept.

Se remarcă, că dacă se schimbă sensul pozitiv numai la una din axele sistemului cartesian, el devine din drept stâng sau viceversa. Ca o urmare dacă se schimbă sensul pozitiv la toate axele, sistemul cartesian deasemeni s'a schimbat, spre exemplu dacă a fost drept, devine stâng.

1) Prin regula tirbuşonului înţelegem legătura ce există între sensul de rotaţie şi de înaintare al unui tirbuşon.

Afară de cei trei vectori unitari ortogonali de direcție constantă i, j, k vom mai întâlni vectori unitari ortogonali de direcție variabilă notați prin $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ reprezentând vectorii unitari: tangențial, normal, și binormal. (Vezi Fig. 11).

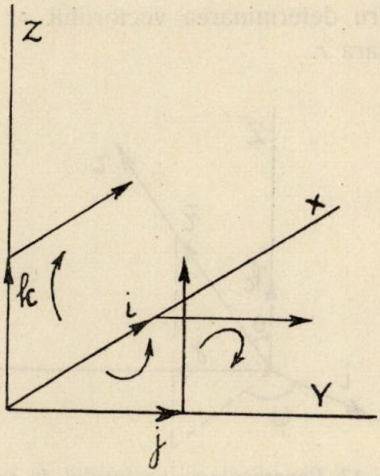


Fig. 10. Sistem cartesian stâng.

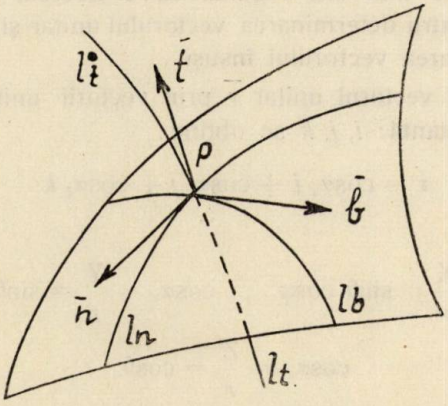


Fig. 11. Vectorii unitari: $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$.

Vom mai întâlni trei vectori unitari necomplanari, care în general nu sunt ortogonali denumiți: $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$, și pe care îi vom utiliza la descompunerea unui vector după trei direcții necomplanare.

Dintre vectorii cei mai utilizaţi e vectorul de poziţie, denumit şi vectorul de rază notat prin τ.

Vom avea: $\tau = r \cdot \bar{\tau}$ în care $\bar{\tau}$ reprezintă vectorul unitar. Din Fig. 12 se constată, că vectorul unitar $\bar{\tau}$ se determină prin două scalare: φ şi θ.

Aşadar pentru determinarea vectorului τ, mai e necesar să cunoaştem şi scalara r.

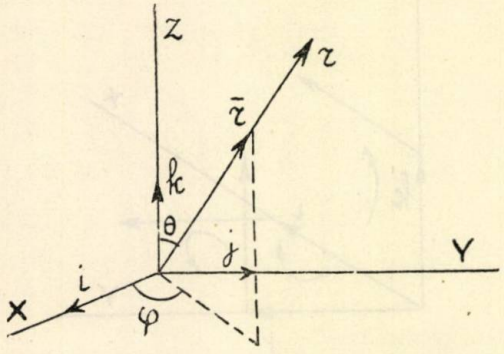


Fig. 12. Reprezentarea vectorului de rază τ.

Din cele de mai sus rezultă, că e necesar să cunoaştem două scalare pentru determinarea vectorului unitar şi încă o scalară pentru determinarea vectorului însuşi.

Exprimând vectorul unitar $\bar{\tau}$ prin vectorii unitari ortogonali de direcţie constantă: i, j, k se obţine:

$$\bar{\tau} = \cos\alpha_x \, i + \cos\alpha_y \, j + \cos\alpha_z \, k$$

în care:

$$\cos\alpha_x = \frac{X}{r} = \sin\theta \cos\varphi \quad ; \quad \cos\alpha_y = \frac{Y}{r} = \sin\theta \sin\varphi ;$$

$$\cos\alpha_z = \frac{Z}{r} = \cos\theta .$$

Când se cunosc φ şi θ se determină:

$$\cos\alpha_x \ , \ \cos\alpha_y \ , \ \cos\alpha_z .$$

Dându-se şi valoarea numerică r, se obţin X, Y, Z, cele trei valori numerice ale componentelor vectorului τ după: i, j, k.

Avem:

$$\tau = r\cos\alpha_x\, i + r\cos\alpha_y\, j + r\cos\alpha_z\, k$$

în care vom pune:

$$r\cos\alpha_x = X \quad , \quad r\cos\alpha_y = Y \quad , \quad r\cos\alpha_z = Z$$

astfel că:

$$\tau = X\, i + Y\, j + Z\, k.$$

Aşadar la determinarea vectorului τ în sistemul cartesian necesităm cunoaşterea a trei scalare: X, Y, Z. Facem remarca, că avem două feluri de grupuri de câte trei scalare la determinarea vectorului de rază τ.

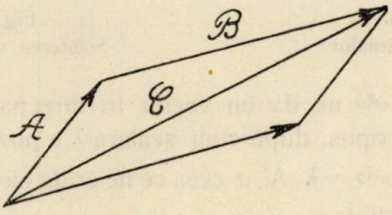
φ, ϑ, r şi X, Y, Z şi vectorul nu e determinat dacă se dau trei scalare aşa fel ca unele din ele să aparţină unui grup şi restul celuilalt grup. Spre exemplu dacă se dau X, Y, r obţinem din:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = r^2 \quad + \text{ sau } \quad -(Z).$$

Adunarea şi scăderea vectorilor.

Prin definiţie avem: (Vezi Fig. 13)

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A} = \mathfrak{C}.$$



F. 13. Adunarea vectorilor.

Datorită reprezentării grafice a vectorului, rezultă că adunarea a doi vectori se sprijină pe formarea paralelogramului. Legea comutaţiei e valabilă, deoarece felul de succedare al celor doi vectori nu influenţează vectorul rezultant. Formăm adunarea a trei vectori:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = \{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\} + \mathfrak{C} = \mathfrak{D}.$$

Legea asociaţiei e valabilă pentru că putem forma mai întâi spre exemplu suma $\{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\}$ şi vectorul ce rezultă îl vom aduna cu $\mathfrak{C}$.

Scăderea $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ înseamnă a aduna vectorul $\mathcal{A}$ cu vectorul $-\mathcal{B}$. Vectorul $-\mathcal{B}$ are sensul opus vectorului $\mathcal{B}$.

Figurile 14 şi 15 ne dau vectorii: $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ şi $\mathcal{B} - \mathcal{A}$.

Inmulţirea vectorilor.

Deosebim trei cazuri:

a) Inmulţirea unui vector cu o scalară.

b) Produsul scalar a doi vectori.

c) Produsul vectorial a doi vectori.

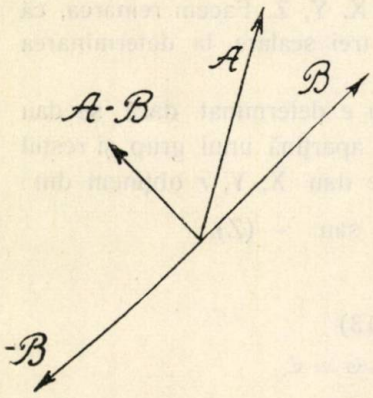


Fig. 14.
Scăderea vectorilor.

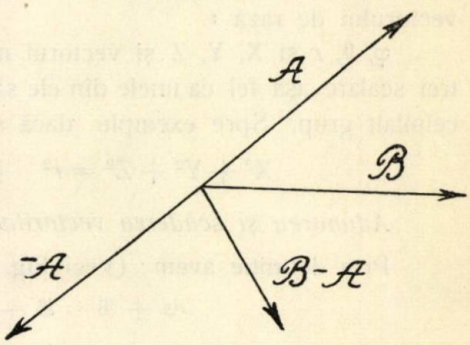


Fig. 15.
Scăderea vectorilor.

Cazul a: $\lambda \mathcal{A}$ ne dă un vector în direcţia lui $\mathcal{A}$ cu acelaşi sens sau în sens opus, după cum scalara λ e pozitivă sau negativă.

Obţinem: $\lambda \mathcal{A} = \lambda . A . \bar{a}$ ceea ce ne arată că valoarea numerică A se înmulţeşte cu λ.

Dealtfel acest caz a fost introdus odată cu definiţia vectorului.

Cazul b: Produsul scalar.

Prin definiţie produsul scalar se exprimă în felul următor: $(\mathcal{A}\,\mathcal{B}) = A . B . (\bar{a}\,\bar{b}) = AB \cos\alpha$ în care α reprezintă unghiul ce-l formează vectorii unitari: $\bar{a}$, $\bar{b}$.

Se obţine o scalară. In baza definiţiei de mai sus rezultă, că la efectuarea produsului scalar a doi vectori nu e necesar a se cunoaşte poziţia lor în spaţiu (în total 6 scalare) ci numai valorile numerice şi unghiul ce-l formează între ei vectorii unitari.

In total deci numai 3 scalare. Parantezele ( ) ne indică că se efectuează produsul scalar.

Legea comutației e valabilă.

Avem: $(\mathcal{A}\,\mathcal{B}) = (\mathcal{B}\,\mathcal{A}) = AB\cos\alpha$.

Felul de succedare al vectorilor nu influențează scalara $AB\cos\alpha$.

Legea asociației nu e aplicabilă.

Deoarece $(\mathcal{A}\,\mathcal{B})\,\mathcal{C}$ și $\mathcal{A}\,(\mathcal{B}\,\mathcal{C})$ nu sunt scalare; se obțin doi vectori unul după vectorul $\mathcal{C}$ și celălalt după vectorul $\mathcal{A}$.

Legea distribuției e valabilă.

Avem: $(\{\mathcal{A}+\mathcal{B}\}\,\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\,\mathcal{C}) + (\mathcal{B}\,\mathcal{C}) = (\mathcal{D}\,\mathcal{C})$

în care s'a pus: $\mathcal{A}+\mathcal{B} = \mathcal{D}$.

In general $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ nu se găsesc în același plan cu $\mathcal{C}$. Relația de mai sus se sprijină pe proprietățile dreptelor. Suma proiecțiilor pe o dreaptă oarecare, a două laturi neparalele din paralelogram, e egală cu proiecția diagonalei pe aceea dreaptă.

Câteva aplicații sunt necesare a fi aduse aici.

Ca o primă aplicație a efectuării produsului scalar, o avem la determinarea valoarei numerice a unui vector. Spre exemplu:

$$(\mathcal{A}\,\mathcal{A}) = \mathcal{A}^2 = A^2.$$

Exprimând vectorul $\mathcal{A}$, prin vectorii unitari ortogonali de direcție constantă i, j, k obținem:

$$\mathcal{A} = A_x\,i + A_y\,j + A_z\,k$$

$$(\mathcal{A}\,\mathcal{A}) = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2.$$

Dându-se scalarele $A_x\,A_y\,A_z$ vectorul $\mathcal{A}$ e determinat, adică se cunoaște valoarea numerică a lui și poziția vectorului unitar.

Când se dau însă scalarele: A, A_x, A_y rezultă că putem lua pe α_z mai mic sau mai mare ca 90°. (Vezi Fig. 16) deoarece se obține $\pm A_z$. E același caz ca la pag. 341. Să ne punem acum următoarea problemă:

Cunoscându-se scalarele A, B și α cu care putem determina produsul scalar al vectorilor $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ se întreabă câte scalare mai trebue să cunoaștem pentru a determina și poziția celor doi vectori în spațiu?

Se cere să se determine poziţia vectorilor unitari $\bar{a}$, $\bar{b}$. Pentru a cunoaşte poziţia vectorului unitar $\bar{a}$, e suficient să cunoaştem două scalare: φ şi θ. Pentru a cunoaşte şi poziţia lui $\bar{b}$, mai e necesar să cunoaştem o scalară; spre exemplu pe β_x, deoarece unghiul ce-l formează $\bar{b}$ cu $\bar{a}$ e cunoscut.

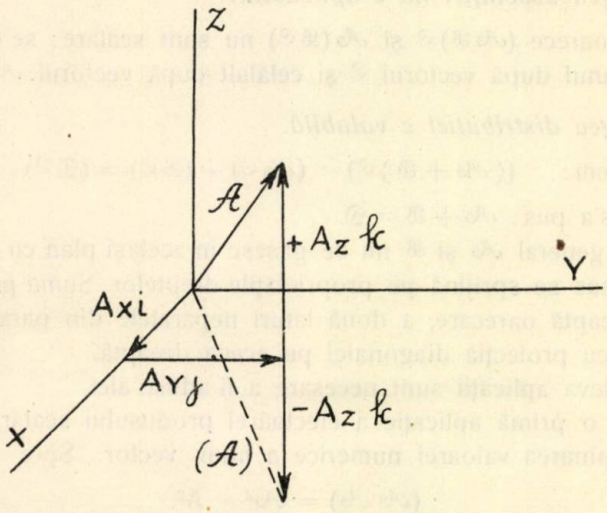


Fig. 16. Determinarea vectorului când se cunosc: A_x, A_y, A.

Exprimând însă pe $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ prin vectorii unitari ortogonali de direcţie constantă: *i*, *j*, *k*, produsul scalar ($\mathcal{A}\,\mathcal{B}$) ia forma:

$$(\mathcal{A}\,\mathcal{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB\cos\alpha$$

în care:

$$A_x B_x = A\cos\alpha_x \,.\, B\cos\beta_x$$

$$A_y B_y = A\cos\alpha_y \,.\, B\cos\beta_y$$

$$A_z B_z = A\cos\alpha_z \,.\, B\cos\beta_z$$

$$\cos\alpha = \cos\alpha_x \cos\beta_x + \cos\alpha_y \cos\beta_y + \cos\alpha_z \cos\beta_z \,.$$

Bine înţeles că în cazul acesta produsul scalar e cunoscut, când se cunosc şease scalare:

$$A_x\,,\ A_y\,,\ A_z\,,\ B_x\,,\ B_y\,,\ B_z\,.$$

Dar se cunoaşte nu numai produsul scalar, ci şi poziţia celor doi vectori. Aşa dar dacă se dau: A, B şi α pentru a forma produsul scalar, şi: φ şi θ pentru a determina poziţia lui $\bar{a}$, rezultă că: A_x, A_y, A_z, sunt cunoscute. Pe de altă parte, prin faptul că se cunoaşte α, vârful vectorului unitar $\bar{b}$ se mişcă pe cercul de bază al unui con. Poziţia vectorului unitar $\bar{b}$ devine cunoscută când se dă unul din cele trei unghiuri: β_x, β_y, β_z.

Dacă se cunoaşte spre exemplu $\cos\beta_x$ atunci din:

$$\cos\alpha = \cos\alpha_x \cos\beta_x + \cos\alpha_y \cos\beta_y + \cos\alpha_z \cos\beta_z \qquad (1)$$

$$1 = \cos^2\beta_x + \cos^2\beta_y + \cos^2\beta_z \qquad (2)$$

rezultă că se deduce $\cos\beta_y$ şi $\cos\beta_z$.

Expresiile:

$$(ii) = (jj) = (kk) = 1 \qquad (ij) = (jk) = (ki) = 0$$

ne arată că: *ijk* reprezint trei vectori unitari ortogonali, fără însă a indica dacă sistemul cartesian e drept sau stâng.

Având: $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}) = 0$ înseamnă că vectorii $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sunt ortogonali.

(Va urma)

DR. ING. PLAUTIUS ANDRONESCU
Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara.

SOLUŢIA ŞI GENERALIZAREA PROBLEMEI 1876

1. Imi propun în cele ce urmează să rezolv interesanta problemă 1876 propusă de regretatul T. LALESCU dând şi generalizarea cerută de autor. Această generalizare a fost încercată în G. M., Vol. XLV, p. 83, unde însă din cauza unei mici scăpări din vedere nu s'au dat toate soluţiile. Deasemenea s'a omis acolo să se dea soluţia problemei în cazul particular al enunţului.

Problema sub forma ei generalizată se poate enunţa astfel:

Fie $f(x) = ax^2 + bx + c$ *un polinom de gradul al doilea cu coeficienţii raţionali. Să se determine un polinom* $F(x)$ *de gradul al treilea tot cu coeficienţii raţionali astfel ca* $F(f(x))$ *să fie divizibil cu* $F(x)$.

Vom presupune că $f(x)$ este efectiv de gradul al doilea ($a \neq 0$) şi că $F(x)$ este efectiv de gradul al treilea.

Vom căuta să discutăm problema pe o cale cât se poate de elementară bazându-ne pe puține lucruri cunoscute în teoria ecuațiilor algebrice. Din analiza noastră va rezulta că în general problema nu admite nici o soluție și vom arăta cum se pot determina toate soluțiile când ele există. Vom vedea că în cazul particular al problemei 1876 avem *două* soluții.

Se poate observa dela început că dacă $F(x)$ este o soluție a problemei și $\lambda F(x)$ e o soluție, λ fiind o constantă (rațională și diferită de zero). *Nu vom considera ca distincte două astfel de soluții.*

2. Pentru rezolvarea problemei să observăm că $F(x)$ fiind o soluție și α un zero a lui $F(x)$ *și* $f(\alpha)$ *este un zero a lui* $F(x)$. Să considerăm *iteratele* polinomului $f(x)$,

$$f_1(x) = f(x),\ f_2(x) = f(f_1(x)), \ldots, f_n(x) = f(f_{n-1}(x)), \ldots$$

Rezultă atunci că toate numerile

$$\alpha, f(\alpha), f_2(\alpha), \ldots, f_n(\alpha), \ldots$$

trebue să fie zerori ale polinomului $F(x)$. Insă acest polinom este, prin ipoteză, de gradul 3 așa că numerile

$$\alpha,\ f(\alpha),\ f_2(\alpha),\ f_3(\alpha)$$

nu pot fi toate distincte. Prin urmare orice zero a lui $F(x)$ trebue să verifice una din ecuațiile

$$(1)\quad \begin{cases} f(x) - x = 0, & f_2(x) - x = 0, & f_3(x) - x = 0, \\ f_2(x) - f(x) = 0, & f_3(x) - f(x) = 0, & f_3(x) - f_2(x) = 0. \end{cases}$$

Rezultă imediat că problema noastră *admite cel mult un număr finit de soluții.*

3. E evident à priori că problema noastră va depinde în mare măsură de natura ecuației

$$(2)\qquad f(x) - x = 0.$$

Această ecuație poate să fie reductibilă sau nu. Dacă punem

$$\Delta = (b-1)^2 - 4ac,$$

ecuația (2) va fi reductibilă sau nu după cum Δ este sau nu patratul unui număr rațional. Vom nota cu u, v rădăcinile ecuației (2), care sunt numere raționale dacă ecuația e reductibilă și sunt egale dacă și numai dacă $\Delta = 0$.

Membrul întâi al fiecărei ecuaţii (1) se divide cu $f(x) - x$. Să punem, în particular,

$$f_2(x) - x = [f(x) - x]\, g(x),$$
$$f_3(x) - x = [f(x) - x]\, h(x).$$

Polinomul $g(x)$ este de gradul al doilea iar polinomul $h(x)$ este de gradul al şaselea.

Avem

$$g(x) = af(x) + ax + b + 1 = a^2x^2 + a(b+1)x + ac + b + 1$$
$$= \left(ax + \frac{b+1}{2}\right)^2 - \frac{\Delta - 4}{4}.$$

Ecuaţia

$$g(x) = 0 \tag{3}$$

e reductibilă numai dacă $\Delta - 4$ este patratul unui număr raţional. Vom nota cu u_1, v_1 rădăcinile acestei ecuaţii. Ele formează unica soluţie (afară de o permutare a lor) a sistemului

$$f(x) = y \quad , \quad f(y) = x \quad , \quad x \neq y.$$

Rădăcinile u_1, v_1 sunt egale numai dacă $\Delta = 4$, care evident şi condiţia necesară şi suficientă ca ecuaţiile (2) şi (3) să aibă rădăcini comune (una singură), ceea ce se poate verifica şi prin calcul direct.

4. Să ne ocupăm acum de polinomul $h(x)$. Avem

$$f_3(x) - f(x) = [f_2(x) - f(x)]\, g(f(x))$$
$$= [f(x) - x]\, [g(x) - 1]\, g(f(x)),$$

de unde

$$f_3(x) - x = [f(x) - x]\, [(g(x) - 1)\, g(f(x)) + 1]$$

şi

$$g(f(x)) = a\, [f_2(x) - x] + g(x) = [g(x) - 2ax - b]\, g(x),$$

prin urmare

$$h(x) = [g(x) - 2ax - b]\, [g(x) - 1]\, g(x) + 1.$$

Printr'un calcul simplu se verifică următoarea formulă

$$h(x) = P^2(x) - \frac{\Delta - 8}{4}\, Q^2(x),$$

unde

$$P(x) = [g(x) - 1] \left(ax + \frac{b-1}{2}\right) - 1,$$

$$Q(x) = g(x) - 1.$$

Se știe că rădăcinile ecuației

$$h(x) = 0, \tag{4}$$

se împart în două *cicluri* u_2, v_2, w_2; u_2', v_2', w_2' astfel ca

$$f(u_2) = v_2, \quad f(v) = w_2, \quad f(w_2) = u_2,$$
$$f(u_2') = v_2', \quad f(v_2') = w', \quad f(w_2') = u_2'.$$

Sistemul

$$f(x) = y, \quad f(y) = z, \quad f(z) = x, \quad x \neq y, \quad y \neq z, \quad z \neq x \tag{5}$$

are deci *două soluții* (afară de o permutare circulară a numerilor x, y, z). Pentru a determina direct aceste soluții din sistemul (5) să punem

$$A = x + y + z, \quad B = xy + yz + zx, \quad C = xyz.$$

Adunând membru cu membru ecuațiile (5) deducem

$$a(A^2 - 2B) + (b - 1)A + 3c = 0. \tag{6}$$

Inmulțind ecuațiile (5) cu x, y, z respectiv și adunând apoi membru cu membru obținem

$$a(A^3 - 3AB + 3C) + b(A^2 - 2B) + cA = B. \tag{7}$$

Scădem acum ecuația a doua din prima, a treia din a doua, prima din a treia, înmulțim membru cu membru rezultatele obținute și simplificând obținem

$$a^3(AB - C) + a^2 b(A^2 + B) + 2ab^2 A + b^3 - 1 = 0. \tag{8}$$

Din (6), (7), (8) putem ușor elimina pe B și C. Deducem următoarea ecuație care dă pe A

$$[2aA + 3(b-1)][a^2A^2 + a(3b+1)A + ac + 2(b^2+b+1)] = 0. \tag{9}$$

Se verifică acum ușor că dacă

$$P(x) - \frac{\sqrt{\Delta - 8}}{2} Q(x) = a^3[x^3 - A_1 x^2 + B_1 x - C_1]$$

$$P(x) + \frac{\sqrt{\Delta - 8}}{2} Q(x) = a^3[x^3 - A_2 x + B_2 x - C_2]$$

A_1, A_2 sunt tocmai rădăcinile ecuației în A,

$$a^2A^2 + a(3b+1)A + ac + 2(b^2 + b + 1) = 0,$$

iar B_1, B_2, C_1, C_2 se scot respectiv din (6) şi (7) [sau (8)]. Rezultă de aici imediat că rădăcina $-\frac{3(b-1)}{2a}$ a ecuaţiei (9) e o soluţie străină problemei şi că *cele două cicluri* u_2, v_2, w_2; u_2', v_2', w_2' *ale ecuaţiei* (4) *sunt respectiv zerorile polinoamelor*

$$(10)\quad P(x) - \frac{\sqrt{\Delta - 8}}{2} Q(x) \quad , \quad P(x) + \frac{\sqrt{\Delta - 8}}{2} Q(x).$$

Un calcul simplu ne arată că ecuaţiile (2) şi (4) nu pot avea zerori comune decât dacă

$$\Delta^2 - 3\Delta + 9 = 0,$$

ceea ce nu poate fi satistăcut pentru Δ real. Polinoamele $P(x)$, $Q(x)$ fiind totdeauna prime între ele aceasta este şi condiţia ca unul cel puţin din polinoamele (10) să aibă un zero dublu, ceea ce se poate verifica şi printr'un calcul direct.

5. Să trecem acum la rezolvarea problemei noastre. Pentru a clasifica soluţiile vom distinge trei tipuri.

Tipul I. Soluţii în care $F(x)$ este divizibil cu $f(x) - x$.

Tipul II. Soluţii în care $F(x)$ are un singur zero (simplu) comun cu $f(x) - x$.

Tipul III. Soluţii în care $F(x)$ este prim cu $f(x) - x$.

In G. M. Vol. XLV, p. 83 nu s'au considerat decât soluţiile de tipul III, fără să fi fost puse de altfel efectiv în evidenţă.

Soluţii de tipul I.

6. In acest caz $F(x)$ este de forma

$$F(x) = [f(x) - x](x - \gamma)$$

unde γ trebue să fie un număr raţional. Din

$$F(f(x)) = [f_2(x) - f(x)]\,[f(x) - \gamma]$$

se vede că γ sau $f(\gamma)$ trebue să fie o rădăcină a ecuaţiei (2). Avem deci $\gamma = u$, v sau $f(\gamma) = u$, v. Dar ecuaţia $f(x) = u$ are ca rădăcini pe u şi pe $v - \frac{1}{a}$, după cum se poate uşor verifica. Prin urmare:

Dacă ecuaţia (2) este ireductibilă nu avem soluţii de tipul I.

Dacă ecuaţia (2) este reductibilă avem în general *patru* soluţii distincte de tipul I, corespunzătoare valorilor

$$u,\ v,\ u-\frac{1}{a},\ v-\frac{1}{a},$$

ale lui γ.

Aceste soluţii se reduc numai la *trei* distincte dacă $u=v-\frac{1}{a}$ sau $v=u-\frac{1}{a}$. Un calcul simplu ne arată că aceasta are loc dacă şi numai dacă $\Delta=1$. In acest caz cele trei valori ale lui γ sunt

$$-\frac{b}{2a}-\frac{1}{a},\quad -\frac{b}{2a},\quad -\frac{b}{2a}+\frac{1}{a}.$$

In fine dâcă $u=v$, deci $\Delta=0$, soluţiile se reduc numai la *două* distincte, corespunzătoare valorilor

$$-\frac{b}{2a}-\frac{1}{2a},\quad -\frac{b}{2a}+\frac{1}{2a}$$

ale lui γ.

(Va urma) TIBERIU POPOVICIU.

RAPORT

ASUPRA LUCRĂRII D-LUI PROF. ION IONESCU „MAXIME ŞI MINIME GEOMETRICE“

Subsemnaţii: GENERAL GH. BUICLIU, AL. PANTAZI şi ING. D. STOICA, membri ai comisiunei pentru cercetarea primei lucrări propusă pentru a fi publicată în Biblioteca de Matematici elementare „G. ŢIŢEICA“, ne facem în primul rând plăcuta datorie de a depune munca noastă în această calitate, ca omagiu memoriei regretatului Profesor G. ŢIŢEICA, stâlp al *Gazetei Matematice*, care în tot cursul activităţii sale, n'a pregetat să-şi sacrifice o mare parte din timpul său preţios pentru opera de răspândirea gustului de matematici, chiar dela elementele lor, în cercurile cele mai largi ale iubitorilor de ştiinţă şi lumină.

Aducem, cu această ocazie, mulţumiri membrilor familiei Profesorului G. ŢIŢEICA, iniţiativei şi contribuţiei materiale cărora se datoreşte atât înfiinţarea cât şi scoaterea primului volum din această Bibliotecă.

Nu se putea aduce din partea *Gazetei Matematice* un mai frumos omagiu memoriei marelui învăţat G. ŢIŢEICA, decât acela ca prima monografie din Biblioteca de Matematici elementare „G. ŢIŢEICA", să fie întocmită chiar de unul din aceia care a lucrat cu G. ŢIŢEICA cot la cot încă dela începuturile *Gazetei Matematice*. In această privinţă iniţiativa D-lui Prof. ION IONESCU fondator şi stâlp al *Gazetei Matematice*, este încă o pildă de înaltă etică morală pe care acest mare îndrumător al muncii cinstite şi continue o pune ca îndreptar la îndemâna tinerilor generaţii.

Mulţumim cu recunoştinţă D-lui Prof. I. IONESCU pentru această iniţiativă şi-i mulţumim pentru că prin *„Maxime şi Minime Geometrice"* ne-a dat ocazia să ne mândrim că Biblioteca de Matematici elementare „G. ŢIŢEICA" îşi începe activitatea ei cu o lucrare pregătită în cele mai bune condiţiuni pentru continuarea operei lui G. ŢIŢEICA, de propăşire a ştiinţelor matematice.

* * *

Lucrarea D-lui Prof. I IONESCU, este o admirabilă culegere de cele mai variate probleme şi metode de rezolvare în legătură cu subiectul propus şi are darul de a da cititorilor ei, în acelaşi timp cu posibilitatea complectării cunoştinţelor de geomtrie elementară şi o expunere a unor probleme, cum este aceea a isoperimetriei, care se găseşte încă şi astăzi în sfera preocupărilor matematicilor superioare; în această privinţă volumul care va conţine această lucrare poate să-şi capete locul de cinste în biblioteca tuturor matematicienilor români.

* * *

Lucrarea este împărţită în patru părţi.

In prima parte, pe lângă un istoric foarte instructiv se găsesc comentate pentru uşurarea urmării demonstraţiilor, teoremele fundamentale şi principiile comune tuturor metodelor cunoscute în rezolvarea problemelor de maxime şi minime.

Partea II este consacrată problemelor de maxime şi minime din geometria plană, distribuite sistematic după metodele cele mai

simple de rezolvare, cu o expunere clară a fiecăreia din aceste metode; dintre acestea, unele, cum este eleganta metodă a lui FERMAT, sunt încă necunoscute multor matematicieni care au ieşit de mult din cadrul matematicilor elementare.

Partea III se ocupă cu probleme izoperimetrice, cărora li se dă o rezolvare elementară complectă, în cadrul celor mai recente cercetări matematice înalte.

Partea IV este destinată problemelor în spaţiu, după natura corpurilor geometrice, cărora li se caută maximele sau minimile. Printre acestea se găseşte şi problema atât de frumoasă şi sugestivă a construcţiei celulelor albinelor.

Numeroase figuri îngrijite şi sugestive înlesnesc celor mai începători cititori să urmărească cu înţelesnire demonstraţiile diferitelor probleme şi teoreme.

Lucrarea întrece numărul reglementat de pagini destinate publicaţiilor din Biblioteca de Matematici elementare; având în vedere unitatea şi importanţa lucrării, propunem ca Societatea să găsească mijlocul de a publica întreaga lucrare într'un singur volum, aşa cum este prezentată de autor.

G-L GH. BUICLIU, ALEX. PANTAZI,
Ing. D. STOICA.

Acest raport a fost citit şi aprobat în şedinţa din 6 Martie 1941.

RAPORTUL COMISIUNII PENTRU PREMIUL DE ARITMETICĂ

In Volumul XLV (anul 1939 — 1940) al revistei *Gazeta Matematică*, s'au publicat soluţiile la 25 probleme de aritmetică.

Corespondentul elev de liceu, care se pune în linia întâi printre rezolvitorii acestor probleme este D-l D. D. BOIANGIU (clasa VIII-a, Liceul „Traian", Turnu-Severin). D-sa este citat ca rezolvitor la 10 din aceste 25 probleme şi anume la problemele 5032, 5077, 5090, 5107, 5120, 5152, 5210, 5241, 5243 şi 5287.

In special a dat soluţia complectă, examinând şi cazuri aparte la problema 5120 şi a examinat cu multă atenţie migăloasele cazuri dela problema 5210

S'a publicat în Vol. XLV şi un exerciţiu de aritmetică propus de D-l D. D. BOIANGIU, exerciţiul 3 (107).

Nici în Vol. XLV nu s'a publicat vre-un articol sau notă semnate de elevi de liceu.

Incheiem al treilea an al înfiinţării premiului de aritmetică cu aceeaşi constatare ca şi în anii precedenţi, anume că activitatea corespondenţilor noştri în domeniul aritmeticei se resimte din cauza lipsei acestui domeniu în programele liceelor şi propunem ca premiul de aritmetică, în valoare de 5.000 lei să fie dat anul acesta D-lui D. D. BOIANGIU, care s'a situat în locul întâi al rezolvitorilor de probleme de aritmetică, mai ales prin numărul problemelor rezolvate.

Adăugăm, că posedăm dela D-sa soluţiuni bune şi la alte probleme de aritmetică, care însă nefiind publicate nu pot fi menţionate în acest raport.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI DE ARITMETICĂ

G-RAL GH. BUICLIU, ION IONESCU,
C-DOR I. ŢINTEŞ.

Acest raport a fost citit şi aprobat în Adunarea Generală dela 20 Februarie 1941.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE"

După cum s'a anunţat în numărul 4 din Decemvrie 1940 şi Nr. 6 din Februarie 1941, al *Gazetei Matematice*, anul acesta se va ţine un concurs de matematici între elevii liceelor din ţară şi studenţii anului I al Politechnicei din Bucureşti.

Dăm mai jos lista completă a candidaţilor înscrişi până la ultimul termen de 5 Martie inclusiv şi admişi pentru concurs.

Pentru Clasa IV-a: *Brighiu I. Corneliu, Ieşan Şt. Alexandru, Mateescu P. Mihaela, Mihăilescu I. Ştefan, Prisecaru D. Mircea.*

Pentru Clasa V-a: *Andrei Gh. Aurel, Cioroianu M. Constantin, Dumitrescu F. Dan, Iliescu C. Constantin, Jupcianu N. Nicolae, Marin M. Dan, Mihalcu I. Ilie, Mişicu V. Mircea, Roşu M. Mircea, Staicu I. Constantin, Timotin Al. Alexandru, Turculeţ D. Tiberiu, Udrea C. Ilie, Vasiliu Gh. Dumitru.*

Pentru Clasa VI-a: *Aron I. Gheorghe, Bădescu F. Florin, Constantinescu I. Emil, Gheorghiu D. Marius, Petrescu I. Ştefan, Popa Teodor, Popescu Gh. Marin, Prişcu R. Alexandru, Stoianovici I. Şerban, Stoika Victor.*

Pentru Clasa VII-a: *Aldea V. Virgil, Andreescu Gh. Ioan, Arendt R. Emil, Bogdan Gr. Gheorghe, Crăciunescu I. Marcel, Cristea I. Constantin, Diaconescu V. Constantin, Drăghicescu P. Paul, Floreşteanu Alexandru, Ganea M. Marin, Mănescu Gh. Ioan, Musceleanu S. Doru, Popa N. Aurel.*

Pentru Clasa VIII-a: *Aldea V. Minea, Bârlea Gh. Victor, Broşteanu Gh. Gheorghe, Chintescu M. Matei, Cruceru Gh. Constantin, Dragomir M. Adrian, Gligor N. Ioan, Mărgărit I. Nicolae, Nicolau Constantin, Niculescu C. Mircea, Petrescu Iulian, Pintilie I. Ion, Sbârnea D. Gheorghe, Şerban C. Constantin, Ştefanovici I. Mircea, Vasiliu C. Margareta, Vijelie Gh. Eugen, Voinea P. Radu.*

Pentru anul I al Politechnicei Bucureşti: *Boeangiu D. Dumitru, Costescu Gh. Ion, Papadopol Demetra-Elena, Rusu L. Mircea, Trefilov I. Mihail, Văduva F. Marin.*

Adică 5 candidaţi pentru clasa IV-a, 14 pentru clasa V-a, 10 pentru clasa VI-a, 13 pentru clasa VII-a, 18 pentru clasa VIII-a, şi 6 pentru anul I al Politechnicei Bucureşti.

Fiecare candidat va da câte o lucrare scrisă din ambele materii la care s'a înscris. Lucrările scrise sunt eliminatorii.

Prima lucrare scrisă va avea loc Joi 24 Aprilie 1941, dela ora 8^{30} până la 11^{30}; iar a doua lucrare scrisă în aceeaşi zi, dela ora 15 până la ora 18, la Politechnică, Calea Griviţei 132, Bucureşti.

Oralul va începe Vineri 25 Aprilie, ora 8^{30}, tot în localul Politechnicei. Candidaţilor elevi de liceu înscrişi la concurs, care nu dispun de mijloace materiale pentru venirea şi întreţinerea lor în Bucureşti (după cum au arătat în cererile lor), li se vor trimite în vacanţa de Paşti sumele necesare transportului la Bucureşti şi li se va comunica locul unde vor fi găzduiţi în tot timpul concursului.

Eventualele modificări vor fi la timp comunicate.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

NOTE MATEMATICE

30. *Problemă diofantiană. Să se rezolve sistemul*

$$2(x_1^3+x_2^3+x_3^3)-x_1x_2(x_1+x_2)-x_2x_3(x_2+x_3)-x_3x_1(x_3+x_1)=$$
$$2(y_1^3+y_2^3+y_3^3)-y_1y_2(y_1+y_2)-y_2y_3(y_2+y_3)-y_3y_1(y_3+y_1) \quad (1)$$
$$x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3. \quad (2)$$

Soluție. Am găsit pentru ecuația (1) următoarele două grupe de formule de rezolvare, unde se notează primul membru a lui (1) prin

$$f(x_i)=f(x_1,\ x_2,\ x_3).$$

$$\text{I}\begin{cases} x_i=f(\beta_i)-f(\alpha_i)+\alpha_i\sum_1^3\dfrac{\partial f}{\partial\alpha_i}, & (i=1,2,3)\\ y_j=\beta_j\sum_{i=1}^3\dfrac{\partial f}{\partial\alpha_i}, & (j=1,2,3)\end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases} x_i=f(\beta_j)-f(\alpha_i)+\alpha_i\left(\sum_{i=1}^3\dfrac{\partial f}{\partial\alpha_i}-\sum_{j=1}^3\dfrac{\partial f}{\partial\beta_j}\right), & (i=1,2,3)\\ y_j=f(\beta_j)-f(\alpha_i)+\beta_j\left(\sum_{i=1}^3\dfrac{\partial f}{\partial\alpha_i}-\sum_{j=1}^3\dfrac{\partial f}{\partial\beta_j}\right), & (j=1,2,3)\end{cases}$$

Pentru a avea o soluție a sistemului se vor lua formulele grupului II cu condiția

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3.$$

Exemple numerice. a) Pentru ecuația (1):

$$x_i=-29,\ -15,\ 41\ ;\quad y_i=42,\ 56,\ 70.$$

b) Pentru sistemul (1), (2):

$$x_i=-17,\ -13,\ 15\ ;\quad y_i=-9,\ -5,\ -1.$$

A. GLODEN
(Luxemburg).

31. *Relațiuni cu indicatorii.*

Se știe că:

1. Dacă A este prim cu N, atunci avem

(1) $$\varphi(A.N)=\varphi(A).\varphi(N).$$

Se poate lesne deduce apoi că:

2. Dacă B conține numai factori primi de ai lui N, în parte sau în total, atunci

(2) $$\varphi(B.N)=B.\varphi(N).$$

De aici se deduce cunoscuta proprietate, că:

3. Dacă M şi N au aceeaşi factori primi, atunci

(3) $\varphi(M.N) = M.\varphi(N) = N.\varphi(M).$

Deasemenea:

4. Dacă $N = A.B$ atunci avem

(4) $\varphi(A.N).\varphi(B.N) = N.[\varphi(N)]^2.$

5. Dacă $N = a^{\alpha}.b^{\beta}\ldots l^{\lambda}$, atunci

(5) $\varphi(a^{\alpha}.N).\varphi(b^{\beta}.N)\ldots\varphi(l^{\lambda}.N) = N.[\varphi(N)]^n$

unde n este numărul factorilor primi ai lui N.

CPT. COMANDOR I. LINTEŞ.

32. *Asupra problemei 2337.* In această problemă regretatul T. LALESCU cerea să se arate că dacă $A = A(x)$ este un polinom dat de gradul al treilea există totdeauna un polinom $F = F(x)$ de gradul al treilea şi unul singur astfel ca

$$F^2 = A + x^4R,$$

R fiind un polinom.

Soluţia dată în Vol. XLIV, p. 486 trebue completată în felul următor:

In primul rând e evident că relaţia *nu e totdeauna posibilă.* Dacă de exemplu A se divide cu x dar nu cu x^2 polinomul $A + x^4R$ nu poate fi patrat perfect. In al doilea rând e evident că dacă F este o soluţie a problemei şi $-F$ este o soluţie, după cum s'a observat de altfel şi la rezolvarea problemei.

Mai general:

Fie $n \geqq 1$, $k > 1$ *două numere naturale şi* A *un polinom de gradul n care nu se anulează pentru* $x = 0$, *deci* $A(0) \neq 0$. *Afară de un factor egal cu o rădăcină de ordinul k a lui* 1, *există totdeauna un polinom* F *de gradul n şi unul singur astfel ca să avem identitatea*

(1) $$F^k = A + x^{n+1}R,$$

unde R *este un polinom.*

Iată cum se poate stabili unicitatea soluţiei. Să presupunem că ar exista două soluţii F şi F_1. Din

$$F^k = A + x^{n+1}R \quad , \quad F_1^k = A + x^{n+1}R_1$$

deducem $$F^k - F_1^k = x^{n+1}(R - R_1).$$

Două cazuri se pot întâmpla

1°. $R = R_1$. Atunci $F^k = F_1^k$ deci $F = \alpha F_1$, unde $\alpha^k = 1$.

2°. $R \neq R_1$. Atunci $F^k - F_1^k$ este un polinom de grad cel puțin egal cu $n+1$ și se divide cu x^{n+1}. Dar

$$F^k - F_1^k = (F - \alpha F_1)(F - \alpha^2 F_1) \ldots (F - \alpha^k F_1),$$

unde α este o rădăcină primitivă de ordinul k a lui 1. Fiecare factor este cel mult de gradul n. Există deci cel puțin doi factori care se divid cu x, cu alte cuvinte putem găsi un i și un j, $1 \leqq i < j \leqq k$, astfel ca

$$F(0) - \alpha^i F_1(0) = F(0) - \alpha^j F_1(0) = 0,$$

de unde $F(0) = F_1(0) = 0$, care e în contrazicere cu (1) și cu ipoteza $A(0) \neq 0$. Acest al doilea caz nu poate deci avea loc.

Unicitatea e demonstrată.

Se poate demonstra această unicitate așa cum s'a făcut la rezolvarea problemei 2337, calculând coeficienții lui F. Fie

$$F = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$$

$$A = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \quad a_0 \neq 0.$$

Dacă punem

$$F^k = C_0 + C_1 x + \ldots + C_{nk} x^{nk}$$

avem

$$C_0 = c_0^k$$

$$C_i = k c_0^{k-1} c_i + \Phi_i(c_0, c_1, \ldots, c_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

unde Φ_i este un polinom în raport cu coeficienții $c_0, c_1, \ldots, c_{i-1}$. Deducem

$$c_0 = \sqrt[k]{a_0}, \quad c_i = \frac{a_i - c_0 \Phi_i(c_0, c_1, \ldots, c_{i-1})}{k a_0}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

care stabilește existența soluției și redemonstrează unicitatea ei în sensul enunțat.

Dacă $A(0) = 0$, relația poate fi imposibilă sau F poate să nu mai fie unic.

Fie în general

$$A = x^p (a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-p} x^{n-p}) \quad , \quad a_0 \neq 0.$$

Avem evident $p < n+1$. Problema este posibilă sau imposibilă după cum p este sau nu un multiplu de k. In primul caz, dacă $p = rk$, F trebue să fie de forma

$$F = x^r (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-r} x^{n-r})$$

şi se constată că coeficienţii $c_0, c_1, \ldots, c_{n-p}$ sunt determinaţi afară de un factor comun egal cu o rădăcină de ordinul k a lui 1 iar ceilalţi coeficienţi se pot lua arbitrar.

T. P.

33. *Asupra exerciţiului 84, XXXII, G. M.* Din nota D-lui M. D. POPA (Vol. XLVI, pag. 144), în care a rezolvat geometriceşte acel exerciţiu, reiese că ambele soluţiuni, analitică şi geometrică, erau incomplecte întrucât nu s'a considerat cazul când segmentele $\overline{MO}$ şi $\overline{PQ}$ sunt egale, paralele dar de sensuri contrare.

Datele exerciţiului fiind $(O) \equiv x^2 + y^2 - R^2 = 0$, $P(p, o)$, $M(\alpha, \beta)$, $(\Delta) \equiv \alpha x + \beta y - R^2 = 0$, avem:

$$\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \pm \frac{p\alpha - R^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Luând aceleaşi semne şi semne contrarii în ambele părţi, obţinem respectiv locurile lui M:

$$(C_1) \equiv \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 - \left(\frac{p^2}{4} - R^2\right) = 0$$

$$(C_2) \equiv \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 - \left(\frac{p^2}{4} + R^2\right) = 0.$$

Cercul (C_2) este totdeauna real; cercul (C_1) cere pentru a fi real $\frac{p}{2} \geqslant R$. Cercul (C_1) este cel rezultat prin soluţia geometrică. Să considerăm acum o poziţie astfel încât M şi P să fie de o parte şi de alta a polarei lui M. Fie M' simetricul lui M faţă cu O. Diagonala M'Q a paralelogramului M'OQP trece prin punctul fix C_1, mijlocul lui OP. Raţionând la fel ca în nota menţionată, deducem:

$$\overline{QC_1}^2 = \overline{OC_1}^2 + R^2 = \text{const.} = k'^2.$$

C_2 fiind simetricul lui C_1 faţă de O, MQC_1C_2 este un paralelogram deoarece $\overline{OC_1}$ este paralelă cu $\overline{MQ}$ şi egală cu jumătatea acesteia. Deci $\overline{C_2M} = \overline{QC_1}$. Cercul (C_2) este cel descris din C_2 ca centru şi cu raza constantă k'.

Generalizând, luăm în loc de cercul (O) conica cu centru

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

reportată la axele ei de simetrie. Egalitatea $\overline{MO} = \overline{PQ}$ exprimată analiticeşte este:

$$\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \pm \frac{\frac{\alpha x_0}{a^2} + \varepsilon \frac{\beta y_0}{b^2} - 1}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^4} + \frac{\beta^2}{b^4}}}$$

iar locul lui M este curba de gradul al IV-lea:

$$\left(x^2+y^2\right)\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right) - \left(\frac{x_0 x}{a^2} + \varepsilon \frac{y_0 y}{b^2} - 1\right)^2 = 0.$$

VIRGIL GHIŢESCU.

34. *Asupra problemei 2796 Mathesis 1933.* Enunţul just al acestei chestiuni era:

„O elipsă e tangentă în A', B', C' laturilor unui triunghiu ABC. Dacă R, R' sunt razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, A'B'C' şi a, b, c, a', b', c' sunt distanţele centrului elipsei de laturile acestor triunghiuri, produsul razelor de curbură în A', B', C' este

$$\left[4RR' \frac{a'b'c'}{abc}\right]^{3/2}.$$

R. DEAUX.

Nu cunosc soluţiile date acestei probleme[1]). Faptul că proprietatea se extinde şi hiperbolei, iar cu o oarecare modificare şi parabolei, mă face să dau şi soluţia în cazul problemei.

Fie $q^2x^2 + p^2y^2 = p^2y^2$ elipsa (E), A', B', C' trei punctepe aceasta de unghiuri excentrice α, β, γ. Se calculează coordonatele punctului A de exemplu:

$$x = p \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)} \qquad y = q \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$$

1) Problema e rezolvată în Mathesis, 1934—364 şi 1935—108, pe altă cale. In special, observaţia pentru parabolă nu e făcută acolo.

şi se deduce:

$$\overline{BC} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}[p^2\sin^2\alpha+q^2\cos^2\alpha]^{\frac{1}{2}}.$$

Ecuaţia lui BC fiind $qn\cos\alpha+py\sin\alpha-pq=0$ vom avea:

$$a=\frac{p.q.}{[p^2\sin^3\alpha+q^2\cos^2\alpha]^{\frac{1}{2}}}$$

de unde:

$$\overline{BC}=\frac{p.q\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{a\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Pe aceeaşi cale găsim:

$$\overline{B'C'}=\frac{p.q\sin(\beta-\gamma)}{a'}.$$

Suprafeţele triunghiurilor ABC, A'B'C' sunt:

$$S=pq\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$S'=2pq\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

De unde deducem:

$$R=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}}{4S}=\frac{p^2q^2}{4abc\pi\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}$$

$$R'=\frac{p^2q^2\pi\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{a'b'c'}\quad\therefore\quad 4RR'\frac{p^4q^4}{a.b.c.a'.b'.c'}.$$

Raza de curbură în A'C

$$\rho_a=\frac{[p^2\sin^2\alpha+q^2\cos^2\alpha]^{2/3}}{pq}=\frac{p^2q^2}{a^3}\quad\therefore\quad\rho_a\rho_b\rho_c=\left[4RR'\frac{a'.b'.c'}{a.b.c}\right]^{3/2}$$

Pentru hiperbola (H) $q^2x^2 - p^2y^2 = p^2q^2$, luând

$$A'\left(\frac{p}{\cos\alpha}\ ,\ \frac{q\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

coordonatele punctului A', se găseşte final

$$S = 2pq\,\frac{\pi\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\pi\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)} \qquad S' = 4pq\,\frac{\pi\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\pi\cos\alpha}$$

$$R = \frac{p^2q^2}{8abc}\times\frac{\pi\cos\alpha}{\pi\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}, \qquad R' = 2\,\frac{p^2q^2}{a'b'c'}\times\frac{\pi\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\pi\cos\alpha}.$$

De unde:

$$4RR' = \frac{p^4q^4}{abc\,.\,a'b'c'}$$

apoi

$$\rho_a = \frac{p^2q^2}{a^3}$$

şi deci

$$\left[4RR'\,\frac{a'b'c'}{abc}\right]^{3/2} = \rho_a\rho_b\rho_c\,.$$

Pentru parabola (P) $y^2 = 2px$, luându-se $A'\left(\frac{\lambda_1^2}{2p},\ \lambda_1\right)$ coordonatele punctului A', se găseşte

$$S = \frac{1}{4p}[\Sigma\lambda_1^2(\lambda_2-\lambda_3)] \quad ,\quad S' = \frac{1}{2p}[\Sigma\lambda_1^2(\lambda_2-\lambda_3)].$$

Notând a, b, c, a', b', c' distanţa *dela vârful parabolei* la laturile triunghiurilor ABC, A'B'C', şi ţinând seama că:

$$\pi(\lambda_2-\lambda_3) = -\Sigma\lambda_1^2(\lambda_2-\lambda_3),$$

avem:

$$a = \frac{\lambda_1^2}{2(p^2+\lambda_1^2)^{\frac{1}{2}}} \quad ,\quad a' = \frac{\lambda_2\lambda_3}{[4p^2+(\lambda_2+\lambda_3)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$R = \frac{\pi(\lambda_1^2+p^2)^{\frac{1}{2}}}{8p^2} \quad ,\quad R' = \frac{\pi(\lambda_2+\lambda_3)^2+4p^2]^{\frac{1}{2}}}{4p^2}$$

$$\rho_a = \frac{(p^2+\lambda_1^2)^{3/2}}{p^2}\,.$$

De unde rezultă, după toate calculele necesare

$$\left[4RR'\frac{a'b'c'}{abc}\right]^{3/2} = \frac{\pi(\lambda_1^2+p^2)^{3/2}}{p^6} = \rho_a\rho_b\rho_c .$$

Relaţia stabilită în problema 2796 *Mathesis* e deci valabilă în cazul celor trei conice, modificarea indicată pentru parabolă. Ar fi interesant desigur explicaţia geometrică a acestei modificări.

ING. ION VASILIU.

35. *Asupra Exerc. 262 T. C. din „Suplimentul" Gazetei Matematice.* Acest exerciţiu propus de D-l CPT. COMANDOR I. LINTEŞ poate fi extins.

Pentru aceasta voi calcula în această notă produsele:

1) $\sigma(p).\sigma(p^2).\sigma(p^3)\ldots\sigma(p^n)$

2) $\pi(p).\pi(p^2).\pi(p^3)\ldots\pi(p^n)$

unde $\sigma(p)$ este suma numerelor prime cu p, $\pi(p)$ produsul numerelor prime cu p, iar p este un număr prim.

1. Ţinând seamă de formulele din G. M. Anul XXXI, Nr. 3.

$$\sigma(N) = N\frac{\varphi(N)}{2} \quad ; \quad \varphi(N) = N - \Sigma\frac{N}{a} + \Sigma\frac{N}{ab} - \Sigma\frac{N}{abc} + \ldots$$

şi de

$$\varphi(N) = N - 1$$

dacă N este prim, avem

$$\sigma(p) = p\,\frac{p-1}{2} \quad ; \quad \sigma(p^2) = p^2\,\frac{p(p-1)}{2};$$

$$\sigma(p^3) = p^3\frac{p^2(p-1)}{2} \quad ; \quad \ldots\ \sigma(p^n) = p^n\frac{p^{n-1}(p-1)}{2}$$

de unde:

$$\sigma(p).\sigma(p^2).\sigma(p^3)\ldots\sigma(p^n) =$$

$$= p\,\frac{p-1}{2}.p^2\,\frac{p(p-1)}{2}.p^3\,\frac{p^2(p-1)}{2}\ldots p^n\,\frac{p^{n-1}(p-1)}{2}$$

sau

$$\sigma(p).\sigma(p^2).\sigma(p^3)\ldots\sigma(p^n) = \left(\frac{p-1}{2}\right)^n . p^{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$$

$$\sigma(p)\,\sigma(p^2)\,\sigma(p^3)\ldots\sigma(p^n) = \boxed{p^{n^2}.\left(\frac{p-1}{2}\right)^n}.$$

2. Cunoaştem formula

$$\pi(N) = \frac{N!}{\frac{N}{a}!\, a^{\frac{N}{a}}}$$

din G. M., anul XXXI, Nr. 3, şi vom avea

$$\pi(p) = \frac{p!}{p} \quad ; \quad \pi(p^2) = \frac{p^2!}{p!\, p^p} \quad ; \quad \pi(p^3) = \frac{p^3!}{p^2!\, p^{p^2}},$$

$$\pi(p^n) = \frac{p^n!}{p^{n-1}!\, p^{p^{n-1}}}$$

de unde:

$$\pi(p)\,\pi(p^2)\,\pi(p^3)\ldots\pi(p^n) = \frac{p!}{p} \cdot \frac{p^2!}{p!\, p^p} \cdot \frac{p^3!}{p^2!\, p^{p^2}} \cdots \frac{p^n!}{p^{n-1}!\, p^{p^{n-1}}}$$

$$= \frac{p^n!}{p \cdot p^p \cdot p^{p^2} \ldots p^{p^{n-1}}} = \frac{p^n}{p^{1+p+p^2+\ldots+p^{n-1}}} = \frac{p^n!}{p^{\frac{p^n-1}{p-1}}}.$$

Deci

$$\pi(p)\,\pi(p^2)\,\pi(p^3)\ldots\pi(p^n) = \boxed{\frac{p^n!}{p^{\frac{p^n-1}{p-1}}}}.$$

MARIN F. VĂDUVA
Clasa VIII-a
Liceul „Ion Maiorescu", Giurgiu.

BIBLIOGRAFIE

Deutsche Mathematik, editat de THEODOR VAHLEN. Anul V, Caetul 3. Leipzig 1940.

Pozitiva, revistă de matematici. Anul I. Nr. 5. Bucureşti. 10 Ianuarie 1941. Despre integrarea diferenţialelor totale exacte de M. MĂNESCU, Completări geometrice de M. FOCŞENEANU, O categorie de locuri geometrice de V. GHIŢESCU

Revista Matematică din Timişoara. Anul XX. Nr. 12. Februarie 1941. Un capitol de geometrie analitică (urmare) de V. ALACI.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXVI. Nr. 4. Octomvrie-Decemvrie 1940.

Supliment cu Exerciţii al Gazetei Matematice. Anul VII. Nr. 6. 1 Martie 1941. Bucureşti.

Universidad Nacional de La Plata. No. 131. Laboratorio de ensayo de materiales. La Plata. August 1940.

Idem. Nr. 133. Lista de Publicaciones. La Plata. August 1940.

ION LINTEŞ. *Memoratorul inginerului de armament,* Bucureşti 1941.

LT.-COLONEL TRAIAN N. I. PANAITESCU. *Siguranţa Transporturilor Militare. Vagoane fugite, opritori, linii de siguranţă.* (Extras din Revista Geniului pe luna Decemvrie 1940). Bucureşti.

P. SERGESCU. *Mathématiciens français du temps de la révolution française.* Bucureşti 1940.

GABRIELA ŢIŢEICA şi ALEX. STOENESCU. Probleme de Calcul Vectorial (litografiat). Bucureşti 1941.

CERERI

300. Care sunt termenii populari pentru numirea corpurilor geometrice: *prismă, paralelipiped, piramidă, cilindru, con, sferă* şi părţile ei? La cilindru am auzit prin judeţul Ilfov că i se zice *văşcălie.*

I. I.

DIVERSE

a) Sporirea Bibliotecii.

GASTON TARRY. Représentation géométrique des coniques et quadriques imaginaires. Paris 1886.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

G. FONTENÉ. Géométrie dirigé. Les angles dans un plan orienté avec des droites dirigées ou non dirigées. Paris 1897.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

M. C. JORDAN. Cours d'Analyse. Tome I, II, III. Paris 1893, 1883, 1887.

M. IACULESCU. Curs de Matematici Generale. Vol. III. Bucureşti 1930.

H. A. LORENTZ. Lehrbuch der differential und integralrechnung. Leipzig. 1907.

M. CH. HERMITE. Cours d'Analyse. Part. I. Paris 1873.

EMILE PICARD. Traité d'Analyse. Tome I, II, III. Paris 1891, 1893, 1896. 1922.

FRIEDERICH AUTENHEIMER. Elementarbuch der Differential und Integralrechnung. Weimar 1895.

E. GOURSAT. Cours d'Analyse Mathématique. Tome I, II. Paris 1927, 1933.

T. ANGHELUȚĂ. Exerciții și Probleme. Cluj 1937.

R. CLAUSIUS. De la fonction potentielle et du potentiel. Paris 1870.

F. JOACHIMSTHAL. Anwendung der Differential und Integralrechnung. Leipzig 1881.

BROMWICH. Theory of infinite series. London 1931.

E. VILLIE. Compositions d'Analyse et de Mécanique. Paris 1885.

E. VILLIE. Compositions d'Analyse Mécanique et Astronomie. Paris 1890.

M. F. TISSERAND. Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitesimal. Paris 1877.

E. FABRY. Problemes et exercices de Mathématique Générales. Paris 1927.

F. FRENET. Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal. Paris 1929.

Donate de familia decedatei PREDUȚA D. BUNGEȚIANU.

b) Ședințele Societății.

La Adunarea Generală din seara de 20 Februarie 1941, a Societății *Gazeta Matematică*, a luat parte și D-l profesor V. TEODOREANU din Iași. La deschiderea ședinței, Delegația *Gazetei* a salutat cu vie bucurie prezența distinsului membru al Societății *Gazeta Matematică*, reamintind sacrificiile făcute de D-sa la Iași, în anii 1917—1919, pentru a scoate *Gazeta Matematică*.

La finele ședinței D-l profesor V. TEODOREANU a ținut o frumoasă și însuflețită cuvântare, spunând printe altele:

Domnilor,

Noi bătrânii trăim din amintiri. Mi-aduc cu drag aminte de prima întrunire la care am luat parte acum 44—45 ani. Numai D-l IONESCU ar putea să ne spue precis unde să țineau ședințele în acel timp. Atât mi-amintesc: era o mică odăiță. Erau cei 4 stâlpi ai *Gazetei Matematice:* Mult regretații GH. ȚIȚEICA și V. CRISTESCU și D-nii ION IONESCU și A. GH. IOACHIMESCU. Numai pe CRISTESCU îl cunoșteam personal. Pe ȚIȚEICA și D-nii IONESCU și IOACHIMESCU îi cunoșteam din activitatea lor la *Gazetă*. Totdeauna, preocuparea mea ca profesor de matematici a fost activitatea elevilor mei la *Gazeta Matematică*. Mi-amintesc că ziua de 15 sau 16 a fiecărei luni, când sosea *Gazeta Matematică* la Iași, era o zi de sărbătoare. Majoritatea elevilor mei erau corespondenți ai *Gazetei*. Fiecare căuta cu emoție dacă la numele său, s'a trecut problemele ce le-a trimis. Notele ce le puneam erau proporționale cu lungimea codiței dela *Gazetă* — numărul problemelor o numeam codița elevului. Când *Gazeta Matematică* sau L'Education Mathématique sau în ultimul timp Revista Matematică din Timișoara, publica soluția unui elev al meu făceam o mare serbare la cele 2 școli unde aveam catedrele. Sunt fericit când îi văd pe foștii mei elevi că iubesc *Gazeta Matematică* mai mult ca mine. Nu citez nici pe unul care este în viață, căci aș supăra peste 1000 care o iubesc tot așa de mult. Printre cei morți voi cita pe TRAIAN LALESCU.

Vă cer ertare pentru că am vorbit până acuma despre mine şi elevii mei. Am păcătuit faţă de atmosfera de modestie care caracterizează şedinţele *Gazetei Matematice*. Să viu la obiectul cuvântărei mele. Am venit ca să-mi fac o datorie sfântă. Ştiu bine că D-l IONESCU se va supăra pe mine. Ştiu că Domnului IONESCU nu-i place să-l lauzi. Are dreptate. Insă celui mai bătrân membru al Societăţii *Gazeta Matematică*, care poate a venit pentru ultima oară la Bucureşti, îi este permis ca să spue următorul adevăr:

Sufletul Gazetei Matematice a fost şi este Domnul ION IONESCU.

Numai un suflet ales ca Domnia Sa a putut radia în ţara noastră un idealism atât de curat şi înălţător. *Gazeta Matematică* va trăi cât va trăi şi neamul nostru graţie D-lui ION IONESCU. Casa în care suntem este *copilul* D-lui ION IONESCU. Un singur lucru lipseşte acestui copil: *Bustul în bronz al tatălui său.*

D-l profesor V. TEODOREANU îşi termină cuvântarea printr'o reuşită glumă specifică „ieşenilor", încheind apoi astfel:

„Trăiască *Gazeta Matematică* şi Domnul ION IONESCU".

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3547. *Se cere suma*

$$S = 1 + 11 + 121 + 1221 + 12321 + \ldots + 12\ldots n\ldots 21$$

pentru $n < 10$ [1]).

M. ST. POPESCU.

Soluţie dată de D-l M. B. MARINAŞ.

Se observă că pentru $n < 10$, numărul $12\ldots n\ldots 21$ este patratul lui $11\ldots 1_n$, iar $123\ldots n\ n\ldots 321$ se descompune în produsul $11\ldots 1_n \times 11\ldots 1_{n-1}$. Cu această observaţie suma dată se descompune în sumele

$$S_1 = 1 + 11^2 + 111^2 + \ldots + 11\ldots 1_9^2$$

$$S_2 = 11 \times 111 + 111 \times 1111 + \ldots + 111\ldots 1_8 \times 11\ldots 1_9.$$

Suma S_1 este un caz particular al sumei

$$S_p = 1^p + 11^p + 111^p + \ldots + 11\ldots 1_q^p$$

1) Enunţ rectificat.

calculată în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXII, pag. 347, unde s'a găsit:

$$S_p = \frac{1}{9^r}\left[10^p \frac{10^{pq}-1}{10^p-1} - C_p^1 10^{p-1} \frac{10^{q(p-1)}-1}{10^{p-1}-1}\right.$$

$$\left. + C_p^2 10^{p-2} \frac{10^{q(p-2}-1}{10^{p-2}-1} \ldots + (-1)^{p-1} C_p^{p-1} 10 \frac{10^q-1}{9} + (-1)^p q\right]$$

care pentru $p = 2$ şi $q = 9$ devine

$$S_1 = \frac{1}{9^2}\left[10^2 \frac{10^{18}-1}{10^2-1} - C_2^1 10 \frac{10^9-1}{10-1} + 9\right].$$

Pentru calculul lui S_2, observăm că

$$11 \times 111 = \frac{110 \times 111}{10} = \frac{111^2 - 111}{10}$$

deci

$$S_2 = \frac{1}{10}[111^2 - 111 + 1111^2 - 1111 + \ldots + 11\ldots1_9^2 - 11\ldots1_9]$$

care se reduce la calculul lui S_p pentru p egal 1 şi 2 şi pentru $q = 9$.

Notă. 1°. In enunţul dela pag. 399, Vol. XXXII, nu se făcea nici o restricţie pentru n. In astfel de condiţiuni, numărul $12\ldots n\ldots 21$, nu mai este în general patratul lui $11\ldots1_n^2$. Valoarea lui S pentru $n \geqslant 10$ este complicată şi nu se încadrează în o formulă comodă din cauza variaţiei numărului de cifre a numerelor n, $n-1$, ...

2°. D-l P. I. GHIŞOIU (când era în clasa VI-a la Liceul „Spiru Haret", Bucureşti) a limitat valoarea lui n la 9 şi a calculat valoarea numerică a lui S pentru $n = 9$, găsind ca rezultat numărul de 17 cifre

13.717.421.082.304.527.

3°. Ceilalţi 7 rezolvitori de pe vremuri au considerat că

$$12\ldots n\ldots 21 = 11\ldots1_n^2,$$

ceea ce nu este adevărat. Raţionamentul şi rezultatul dat de ei fiind greşit nu le mai citâm numele aici.

4°. S'au mai calculat sume analoage în *Gazeta Matematică* şi anume: Suma

$$1^n + 11^n + \ldots + 11\ldots1^n$$

în Vol. XXXII, pag. 347.

Sumele

$$1 + 21 + 321 + 4321 + 54321 + \ldots$$

$$1 + 41 + 941 + 16941 + 2516941 + \ldots$$

$$1 + 81 + 2781 + 642781 + 125642781 + \ldots$$

în Vol. XXXVI, pag. 226.

Suma

$$12 + 1324 + 135246 + \ldots$$

în Vol. XXXIX, pag. 274, etc.

GH. B.

PROBLEMA 4121. *O bancă primeşte depuneri în numerariu, acordă împrumuturi şi scontează polițe (cambii) în următoarele condiții:*

a) *Dobânda pentru depuneri este de 5% şi pentru împrumuturi este de 15%. Scontul este cel comercial cu 15%.*

b) *Pentru depuneri, dobânda curge dela a zecea zi dela depunerea sumelor până inclusiv în ziua precedentă retragerii sumelor sau a lichidării contului, iar pentru împrumuturi toate zilele, inclusiv cea de facerea împrumutului şi cea de achitarea lui. Pentru sconturi se socotesc şi zilele de scontare şi de scadență.*

c) *Dobânzile se calculează pe numărul exact de zile ale anului 1931, adică 365 zile şi cu numărul exact de zile ale fiecărei luni.*

d) *Dobânzile datorite de Bancă, sau datorite ei, nu modifică conturile decât la finele anului sau la lichidare de cont. Sconturile se scad pe ziua depunerii polițelor.*

In aceste condițiuni, o persoană a făcut următoarele operațiuni cu acea bancă:

a) *La 2 Ianuarie a depus 73 000 lei.*

b) *La 20 Ianuarie a depus 29 200 lei.*

c) *La 11 Februarie ia dela Bancă 219 000 lei.*

d) *La 20 Martie a depus la Bancă, pentru încasare, o poliță de 146 000 lei cu scadența 31 Mai.*

e) *La 6 Aprilie depune 14 600 lei.*

Se cere rezultatul lichidării contului, care a avut loc în ziua de 1 Iunie 1931.

I. I.

Suma de 73 000 lei depusă la 2 Ianuarie produce dobândă dela 12 Ianuarie până la 29 Ianuarie, adică 18 zile cu 5%. Dobânda corespunzătoare este de (73 000×5×18)/36 500 = 180 lei.

La 20 Ianuarie se mai depun 29 200 lei, care încep să producă dobândă dela 30 Ianuarie. Atunci, această sumă se adaogă la cea depusă anterior şi face în total (73 000 + 29 200) = 102 200 lei care produc dobândă până la 10 Februarie, căci la 11 Februarie se ridică banii depuşi prin împrumutul făcut şi încă în plus o sumă de (219 000 — 102 200) = 116 800 lei. Dobânda sumei de 102 200 lei, dela 30 Ianuarie la 10 Februarie, adică timp de 12 zile cu 5%, este de (102 200 × 5 × 12)/36 500 = 168 lei.

Suma rămasă datorie la Bancă de 116 800 lei dăinueşte dela 11 Februarie la 20 Martie, adică 38 zile, pentru care, cu 15%, se datorează o dobândă Băncii de (116 800 × 15 × 38)/36 500 = 1 824 lei.

Datoria de 116 800 lei se stinge deabia la 20 Martie, când se depune poliţa de 146 000 lei valoare nominală. Din această sumă trebue să scădem scontul pe timpul dela 20 Martie la 31 Mai, adică pe 73 zile. Cu procentul de 15, acest scont comercial este de (146 000 × 15 × 73)/36 500 = 4 380 lei. Deci valoarea reală a poliţei este de (146 000 — 4 380) = 141 620 lei. Scăzând de aici datoria de 116 800 lei, rămân depuşi la Bancă numai (141 620 — 116 800) = 24 820 lei. Aceştia produc dobândă numai după 10 zile, adică dela 30 Martie, până în ajunul zilei de închiderea contului, la 31 Mai, adică pe timp de 63 zile. Dobânda produsă cu 5% este de (24 820 × 15 × 83)/36 500 = 214,20 lei.

La 6 Aprilie se mai depun 14 600 lei care, cu 5% produc dobândă, dela 16 Aprilie la 31 Mai, adică pe timp de 46 zile, în valoare de (14 600 × 46)/36 500 = 92 lei.

Prin depunerea sumei de 14 600 lei la 6 Aprilie, depunerile se ridică în total la (24 820 + 14 600) = 39 420 lei.

La încheerea contului, Banca datorează clientului său dobânzile de (180 + 168 + 214,20 + 92) = 654,20 lei şi el datorează Băncii 1 824 lei dobânzi. Diferenţa acestor dobânzi este de (1 824 — 654,20) = 1 169,80 lei. Reducând depunerile cu această sumă, rămâne ca depunere netă, la încheerea contului, pe ziua de 1 Iunie, suma de lei (39 420 — 1 169,80) = 38 250,20.

Pe ziua de 1 Iunie contul se va încheia cu un sold creditor, pentru acel client, de 38 250,20 lei.

Dacă se observă cu atenţiune calculele dobânzilor, se vede că datele au fost astfel aranjate în cât să se poată face uşor calculele numerice, dobânzile eşind numai una cu bani iar restul în numere întregi de lei, toate putându-se calcula exact.

Problema a fost rezolvată de D-nii A. Em. Bădescu, M. Margulius şi N. D. Zane. Din cauza unor interpretări diferite date enunţului, rezultatul definitiv de mai sus nu a fost atins de nici unul. Rezultatele obţinute au fost respectiv: 38 505,60; 38 088,20; 39 868,60 lei.

I. I.

PROBLEMA 4163. *Dacă printr'un punct* K *din planul unui dreptunghiu, ducem paralele cu laturile lui, unghiul a două diagonale adiacente, din două dreptunghiuri astfel formate, este egal cu unghiul celorlalte două diagonale ale acelor dreptunghiuri.*

Cum trebue construit punctul K *în cazul unui paralelogram pentru ca proprietatea să subziste?*

O. N. Ţino.

a. 1. Să demonstrăm proprietatea întâi în cazul unui dreptunghiu. Fie dreptunghiul dat ABCD, HKF şi GKE respectiv paralelele duse prin K la AD şi AB, punctele H şi G fiind respectiv pe AB şi AD; fie încă I, J, L, M respectiv centrele dreptunghiurilor formate KHAG, KGDF, KEBH, KFCE; P şi R punctele unde GH şi AK taie pe EF; S şi T punctele unde EH şi BK taie pe FG. *Să presupunem în primul caz, că punctul* K *este interior dreptunghiului.*

Considerăm două dreptunghiuri alăturate AHKG şi GKFD. Dreapta IJ este mediană comună celor două dreptunghiuri. Triunghiurile IKJ şi IGJ sunt egale având

$$\overline{IK} = \overline{IG} \quad ; \quad \overline{JK} = \overline{JG} \quad , \quad \overline{IJ} = \overline{IJ},$$

deci

$$\sphericalangle IGJ = \sphericalangle IKJ,$$

sau încă:

$$\sphericalangle HGF = \sphericalangle AKD. \qquad (1)$$

In acelaşi fel, considerând perechile de dreptunghiuri alăturate:

(KHAG, KEBH) ; (KEBH, KFCE) ; (KFDG, KECF),

găsim:

$$\sphericalangle EHG = \sphericalangle BKA; \tag{2}$$

$$\sphericalangle FEH = \sphericalangle CKB; \tag{3}$$

$$\sphericalangle EFG = \sphericalangle CKD. \tag{4}$$

Considerând acum două dreptunghiuri opuse la vârf, de exemplu KHAG şi KECF, avem din triunghiul PGF, ţinând seamă de egalităţile (1) şi (4), egalităţile:

$$\begin{aligned}\sphericalangle GPF &= \pi - \sphericalangle PGF - \sphericalangle PFG = \pi - \sphericalangle IGJ - \sphericalangle MFJ \\ &= \pi - \sphericalangle IKJ - \sphericalangle MKJ = \sphericalangle RMK,\end{aligned} \tag{5}$$

adică *unghiul diagonalelor adiacente* AK *şi* CK *este egal cu unghiul celorlalte două diagonale ale dreptunghiurilor* GH *şi* FE.

Proprietatea şi demonstraţia ei subzistă pentru celelalte două dreptunghiuri opuse la vârf: KEBH şi KFDG.

2. Dacă considerăm al doilea caz de figură posibil, punctul K exterior dreptunghiului, însă interior regiunii planului cuprinsă între dreptele paralele a două laturi, demonstraţia pentru două dreptunghiuri alăturate nu se modifică. Pentru dreptunghiuri care n'au o latură comună, de exemplu: KHAG şi KECF, demonstraţia se modifică astfel: $\sphericalangle HPF$ fiind exterior triunghiului EPH, avem:

$$\begin{aligned}\sphericalangle HPF &= \sphericalangle PEH + \sphericalangle EHP = \sphericalangle FEH + \sphericalangle EHG \\ &= \sphericalangle CKB + \sphericalangle AKB = \sphericalangle CKA.\end{aligned} \tag{6}$$

Aceeaşi demonstraţie pentru perechea de dreptunghiuri KEBH şi KGDF.

3. In al treilea caz de figură, când punctul K se găseşte în unghiul format de prelungirile a două laturi adiacente ale dreptunghiului, deasemenea demonstraţia pentru două dreptunghiuri alăturate (cu latură comună) nu se modifică.

Pentru dreptunghiurile KHAG şi KECF avem:

$$\begin{aligned}\sphericalangle CKA &= \sphericalangle AKD - \sphericalangle CKD = \sphericalangle HGF - \sphericalangle GFE \\ &\equiv \sphericalangle HGF - \sphericalangle GFP,\end{aligned}$$

însă unghiul HGF este unghiu exterior triunghiului GPF, deci

$$\sphericalangle CKA = (\sphericalangle GFP + \sphericalangle GPF) - \sphericalangle GFP = \sphericalangle GPF. \tag{7}$$

Aşadar, în cazul dreptunghiului proprietatea este adevărată pentru toate perechile de dreptunghiuri formate oricare ar fi poziţia punctului K în planul dreptunghiului.

b. 1. Să considerăm acum un paralelogram ABCD şi un punct K aşezat în interiorul paralelogramului. Paralelele duse prin K la laturile paralelogramului taie în H şi F pe AB şi CD, în E şi G pe BC şi AD. Fie I, J, K, L punctele de întâlnire ale diagonalelor paralelogramelor formate KHAG, KGDF, KEBH, KFCE.

Să considerăm paralelogramele alăturate KHAG şi KEBH şi să presupunem că ele se bucură de proprietatea enunţată, adică că:

$$\sphericalangle AKB = \sphericalangle GHE. \tag{8}$$

Dreapta IL trecând prin mijlocul segmentelor $\overline{AK}$ şi $\overline{BK}$ este paralelă cu EG şi ca urmare mediană comună a celor două paralelograme considerate. Punctul H' simetricul lui H în raport cu IL aparţine deci dreptei EG şi avem:

$$\overline{IH'} = \overline{IH} \;;\; \overline{LH'} = \overline{LH} \;;\; \sphericalangle IH'L = \sphericalangle IHL. \tag{9}$$

Comparând ultima egalitate din (9) cu (8), deducem că:

$$\sphericalangle IH'L = \sphericalangle IKL, \tag{10}$$

deci că patrulaterul IKH'L este inscriptibil şi fiindcă H'K ∥ IL, punctele K şi H' sunt simetrice faţă cu perpendiculara la mijlocul segmentului IL, căci

$$\text{arc } IK = \text{arc } LH' \text{ şi } \text{arc } LH'K = IKH'.$$

Având

$$\overline{IK} = \overline{LH'} \text{ şi } \overline{IH'} = \overline{LK}$$

deducem, comparându-le cu primele două egalităţi din (9), următoarele egalităţi;

$$\overline{IK} = \overline{HL} \text{ şi } \overline{LK} = \overline{IH}. \tag{11}$$

Din (11) rezultă, de o parte că HIKL este paralelogram, adică

$$AK \parallel HE \;,\; HG \parallel BK, \tag{12}$$

de altă parte că:

$$\overline{AK} = 2\overline{IK} = 2\overline{HL} = \overline{HE} \text{ şi } \overline{BK} = 2\overline{LK} = 2\overline{HI} = \overline{HG}; \tag{13}$$

dar din (12) urmează că BKGH şi AKEH sunt paralelograme, deci că:

$$\overline{EK} = \overline{BH} = \overline{HA} = \overline{KG}, \tag{14}$$

adică *punctul* K *se găseşte pe mediana* HF *a paralelogramului dat.*

Reciproc, *dacă luăm punctul* K *pe mediana* HF *a paralelogramului dat* ABCD *relativă la laturile* AB, CD, *unghiurile* AKB *şi* GHE *sunt egale.*

In adevăr, având $\overline{KE} = \| \overline{AH}$ şi $\overline{KG} = \| \overline{BH}$, patrulaterele KGHB şi KEHA sunt paralelograme, deci patrulaterul KIHL este deasemenea paralelogram şi ca urmare unghiurile lui opuse IKL şi IHL sunt egale.

Demonstraţia este valabilă chiar dacă K este exterior paralelogramului dat, însă cuprins în regiunea planului între dreptele paralele AD şi BC.

Proprietatea este adevărată, în acelaşi timp, pentru cealaltă pereche de paralelograme, care au latura comună pe mediana HF a paralelogramului dat, anume KGDF şi KECF.

Dacă considerăm perechile de paralelograme, care au latura comună pe EG, anume:

(KHAG, KFDG) şi (KHBE, KFCE),

pentru ca ele să se bucure de proprietatea enunţată, trebue ca punctul K să se găsească pe mediana paralelogramului, adică dreapta GE să fie mediana paralelogramului dat relativă la laturile $\overline{BC}$, $\overline{AD}$.

Dacă luăm, aşa dar, punctul K chiar la întretăierea celor două mediane ale paralelogramului dat, adică chiar punctul de întâlnire al diagonalelor paralelogramului dat, atunci toate perechile de paralelograme alăturate se bucură de proprietatea enunţată. Mai mult, în acest caz proprietatea este adevărată şi pentru perechile de paralelograme opuse la vârf.

2. Să considerăm acum punctul K exterior paralelogramului şi aşezat în unul din unghiurile formate de prelungirile a două laturi adiacente ale paralelogramului dat, dincolo de vârf, paralelogramele alăturate KHAG şi KEBH.

Presupunem că avem:

$$\sphericalangle AKB = \sphericalangle GHE. \qquad (15)$$

Fie H', A', I', L' proiecţiile punctelor H, A, I, L pe dreapta EK, şi $\sphericalangle BAD > \frac{\pi}{2}$; U mijlocul lui $\overline{IL}$ şi U' proiecţia lui pe EK.

Observând dela început, că:

$$\overline{I'A'} = \overline{I'K} \quad ; \quad \overline{U'I'} = \overline{L'U'} \quad ; \quad \overline{I'L'} = \overline{IL} = \frac{1}{2}\overline{GE} = \frac{1}{2}\overline{AB};$$

apoi

$$\overline{H'L'} = \overline{H'I'} + \overline{I'L'} = \overline{H'I'} + \frac{1}{2}\overline{AB},$$

avem:

$$\overline{H'U'} = \frac{1}{2}[\overline{H'I'} + \overline{H'L'}] = \overline{H'I'} + \frac{1}{4}\overline{AB}, \qquad (16)$$

dar:

$$\overline{H'I'} = \frac{1}{2}[\overline{H'A'} + \overline{H'K}] = \frac{1}{2}[\overline{HA} + \overline{H'K}]. \qquad (17)$$

Ţinând seamă de (17) avem:

$$\overline{H'U'} = \frac{1}{2}\overline{H'K} + \frac{1}{2}\overline{HA} + \frac{1}{4}\overline{AB} > \frac{1}{2}\overline{H'K}. \qquad (18)$$

Urmează de aci că simetricul lui H' în raport cu perpendiculara la mijlocul lui $\overline{IL}$ este un punct H'' (pe dreapta H'K) distinct de punctul K şi anume exterior segmentului H'K; însă acest lucru *este imposibil*, deoarece segmentul de cerc IKL descris pe $\overline{IL}$ şi capabil de unghiul IKL, în acest caz, ar tăia dreapta EG în trei puncte: H', K, H'', o imposibilitate.

3. Să examinăm acum cum trebue să luăm punctul K în planul unui paralelogram dat ABCD, pentru ca diagonalele a două paralelograme formate de paralelele EG, FH, opuse la vârf, să se bucure de proprietatea enunţată.

Să considerăm punctul K aşezat între dreptele DA şi CB la stânga diagonalei AC şi să însemnăm:

$$\sphericalangle CAK = \beta' \ , \ \sphericalangle ACK = \beta \ , \ \sphericalangle AIG = \varphi' \ , \ \sphericalangle CMF = \varphi,$$

$$\sphericalangle BAD = A \ , \ \sphericalangle CAD = A_1;$$

P şi R punctele unde GH şi AK taie pe EF.

Observăm acum că, dacă unghiurile β' şi β sunt date, punctul K este determinat şi reciproc; prin urmare problema se pune astfel: *Dacă ne dăm unghiul* β', *cum trebue să luăm pe* β *pentru ca unghiul* CKR *al diagonalelor* AK *şi* CK *să fie egal cu unghiul* GPF *al celorlalte două diagonale* GH *şi* FE *în paralelogramele opuse la vârf* KHAG *şi* KFCE.

Deoarece punctul K este perfect determinat când sunt date unghiurile β' și β urmează că unghiurile φ' și φ sunt asemenea determinate. Din triunghiurile AGK și AGI, avem imediat:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AK}} = \frac{\sin(A - A_1 - \beta')}{\sin A} = \frac{\sin\varphi'}{2\sin(\varphi' + A_1 + \beta')}, \tag{19}$$

și făcând în (19) desvoltările în raport cu φ' obținem:

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{2\sin(A_1 + \beta')\sin(A - A_1 - \beta')}{\sin A - 2\sin(A - A_1 - \beta')\cos(A_1 + \beta')}$$

sau încă, transformând produsele în sume

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{\cos[2A_1 - A) + 2\beta'] - \cos A}{\sin[(2A_1 - A) + 2\beta']}. \tag{20}$$

Tot astfel din triunghiurile ECK și ECM avem:

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{CK}} = \frac{\sin(A - A_1 + \beta)}{\sin A} = \frac{\sin\varphi}{2\sin(\varphi - A_1 + \beta)}, \tag{21}$$

din care deducem:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin(A_1 - \beta)\sin(A - A_1 + \beta)}{2\sin(A - A_1 + \beta)\cos(A_1 - \beta) - \cos A}, \tag{22}$$

apoi că:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos[(A - 2A_1) + 2\beta] - \cos A}{\sin[(A - 2A_1) + 2\beta]}. \tag{23}$$

Acum, revenind la problema care ne-am pus-o, observăm că:

$$\sphericalangle CKR = \beta + \beta',$$

iar

$$\sphericalangle GPF = \pi - (\varphi' + \varphi + \beta + \beta'),$$

deci trebue ca să avem:

$$\boxed{\varphi + \varphi' = \pi - 2(\beta + \beta')}. \tag{24}$$

Unghiurile φ' și φ fiind date prin relațiile (20) și (23), vom scrie condițiunea (24) sub forma echivalentă:

$$\operatorname{tg}(\varphi+\varphi') = -\operatorname{tg} 2(\beta+\beta'), \tag{25}$$

în care înlocuind $\operatorname{tg}\varphi$ și $\operatorname{tg}\varphi'$, avem:

$$\frac{\sin 2(\beta+\beta') - 2\cos A \sin(\beta+\beta')(A-2A_1+\beta-\beta')}{\cos 2(\beta+\beta') - 2\cos A\cos(\beta+\beta')(A-2A_1+\beta-\beta')+\cos^2 A} = \frac{\sin 2(\beta+\beta')}{\cos 2(\beta+\beta')},$$

sau:

$$\frac{-2\cos A \sin(\beta+\beta')\cos(A-2A_1+\beta-\beta')}{-2\cos A\cos(\beta+\beta')\cos(A-2A_1+\beta-\beta')+\cos^2 A} = \frac{\sin 2(\beta+\beta')}{\cos 2(\beta+\beta')},$$

sau încă simplificând prima parte cu $-\cos A$, avem:

$$\frac{\sin(\beta+\beta')\cos(A-2A_1+\beta-\beta')}{2\cos(\beta+\beta')\cos(A-2A_1+\beta-\beta')-\cos A} = \frac{\sin(\beta+\beta')\cos(\beta+\beta')}{\cos 2(\beta+\beta')}. \tag{26}$$

Condiția (26) este evident satisfăcută, dacă luăm:

$$\sin(\beta+\beta') = 0, \tag{27}$$

care dă:

$$\beta+\beta' = 0 \tag{28}$$

sau

$$\beta+\beta' = \pi. \tag{29}$$

Condiția (28) dă

$$\beta = \beta' = 0 \quad ; \quad \varphi+\varphi' = \pi;$$

cu alte cuvinte, dacă luăm punctul K oriunde pe diagonala AC, paralelogramele formate și opuse la vârf KHAG și KFCE au două diagonale în prelungire și celelalte două paralele cu diagonala BD, deci paralele între ele. Condiția (29) nu poate avea loc căci în acest caz ar urma să avem $\varphi+\varphi' = 0$, o imposibilitate.

Relația (26) mai este încă satisfacută, dacă:

$$[\cos 2(\beta+\beta') - 2\cos^2(\beta+\beta')]\cos(A-2A_1+\beta-\beta') + \cos A\cos(\beta+\beta') = 0$$

sau:

$$\boxed{\cos(A-2A_1+\beta-\beta') - \cos A\cos(\beta+\beta') = 0}, \tag{30}$$

care desvoltată în raport cu $(\beta - \beta')$ și transformată, devine, ținând seama de relațiile:

$$tgA_1 = \frac{\sin A}{k + \cos A} \left(k = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}\right) \quad \text{și} \quad tg(A - A_1) = \frac{k \sin A}{1 + k \cos A},$$

următoarea:

$$tg(\beta - \beta') = \frac{2k + (1 + k^2)\cos A - [2k \cos A + 1 + k^2]\cos A \cos 2\beta'}{(k^2 - 1)\sin A + [2k \cos A + 1 + k^2)\cos A \sin 2\beta'}. \quad (31)$$

Relația (31) determină pentru fiecare valoare a lui β', o valoare pentru $(\beta - \beta')$, deci pentru β. Această determinare depinde numai de raportul laturilor paralelogramului dat și de unghiul său A, deci ea este valabilă pentru toate paralelogramele asemenea ca acel dat. Analog studiem în celelalte două cazuri de figură.

Au rezolvat problema în cazul a două paralelograme alăturate D-nii: ALEXANDRU D. STOICA (Liceul „Marele Voevod Mihai", București), FLORENTIN SAVOVICI (Școala Ofițeri Geniu).

O. N. Ț.

PROBLEMA 4942. *Să se găsească patratul de opt cifre care se obține scriind patru cifre identice între numerele* N *și* 2N.

G-L GH. BUICLIU.

Numerele N și 2N trebuind să aibă la un loc 4 cifre, 2N va fi maximum 98 și deci

$$N \leqslant 49. \quad (1)$$

Dacă X^2 este patratul căutat, iar a un număr de o cifră, atunci conform enunțului trebue să avem una din egalitățile:

I. $X^2 = (2N)\,aaaaN = a \times 11 \times 100 \times 101 + 2000001 \times N.$

II. $X^2 = N aaaa\,(2N) = a \times 11 \times 100 \times 101 + 1000002 \times N.$

Se vede și din I și din II că X este de forma

$$X = Mult.\ 11 + r = Mult.\ 101 + r'$$

r și r' putând fi și nuli. Față de divizorul 11 un număr X și patratul său poate fi de următoarele forme corespunzătoare și reciproce

$X = 11M + 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;$ sau 10

$X^2 = 11M + 0;\ 1;\ 4:\ 9;\ 5;\ 3;\ 3;\ 5;\ 9;\ 4;$ sau $1.$

Corespondența între forma lui X și a lui X^2 față de divizorul 101 este dată în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVIII, pag. 375, unde pentru $N = 101m + 50$ trebue înlocuit $N^2 = 101m + 53$ prin $N^2 = 101m + 76$.

Notând cu D și D' coeficienții lui N în I și II se vede că

$$D.N = 2000001 \times N = (11m + 3)\, N = (101n + 100)\, N$$
$$D'N = 1000002 \times N = (11m + 3)\, N = (101n + 1)\, N.$$

Cu aceste elemente să examinăm pe rând cele două cazuri.

Cazul I. $N \leqslant 49$ poate fi una din grupele de 2 cifre cu care se termină un patrat perfect, grupe care sunt date în *Culegere de probleme de Aritmetică* de I. IONESCU ed. II pag. 267. Să considerăm una din aceste grupe, de exemplu

$$N = 16 \quad \therefore \quad 2N = 32$$

și

$$X^2 = 32aaaa16. \tag{2}$$

Când X^2 se termină cu 16, rădăcina X este de forma [1])

$$X = 50m \pm 4. \tag{3}$$

Pentru (2) avem

$$D.N = 16 \times D = 11m + 4 = 101n + 85$$

$$\therefore \quad X = 11m + 2 \quad \text{sau} \quad X = 11m' + 9 \tag{4}$$

și

$$X = 101n + 40 \quad \text{sau} \quad X = 101n' + 61. \tag{5}$$

Pe de altă parte

$$32000016 \leqslant X^2 \leqslant 32999916$$
$$5656 \leqslant X < 5748.$$

Intre aceste limite, singurele numere de formele (5) sunt

$$5696 \text{ și } 5717,$$

iar dintre acestea 5717 nu este nici de forma (3) nici de forma (4) pe când

$$5696 = 11m + 9 = 50n - 4$$

deci patratul lui 5696 se termină cu 16 și ar putea fi de forma 32*aaaa*16. Ridicând la patrat găsim

$$5696^2 = 32444416$$

care este soluție.

---

1) *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVII, pag. 367.

Procedând astfel pentru toate valorile lui N până la inclusiv 49, găsim rezultatele centralizate în următorul tabel:

Valoarea lui N	Forma lui X față de			Valorile pe care le poate avea X
	Terminația N	Divizorul		
		11	101	
00	$10n$	$11m$	$101p$	Nici una
01	$50n \pm 1$	$11m + 3$	$101p + 100$	Nici una
04	$50n \pm 2$	$11m + 1$	$101p + 7$	2848
09	$50n \pm 3$	$11m + 5$	$101p + 92$	Nici una
16	$50n \pm 4$	$11m + 4$	$101p + 85$	5696
21	$50n \pm 11$	$11m + 8$	$101p + 80$	Nici una
24	$50n \pm 18$	$11m + 6$	$101p + 77$	Nici una
25	$10n \pm 5$	$11m + 9$	$101p + 76$	Nici una
29	$50n \pm 23$	$11m + 1$	$101p + 72$	Nici una
36	$50n \pm 6$	$11m + 9$	$101p + 65$	8544
41	$50n \pm 21$	$11m + 2$	$101p + 60$	Nici una
44	$50n \pm 12$	$11m$	$101p + 57$	Nici una
49	$50n \pm 7$	$11m + 3$	$101p + 52$	Nici una

Cazul II. Se găsesc pe aceeaşi cale rezultatele din următorul tabel:

Valoarea lui 2N	Forma lui X faţă de			Ce valori poate avea X
	Terminaţia 2N	Divizorul		
		11	101	
04	$50n \pm 2$	$11m + 3$	$101p + 2$	Nici una
16	$50n \pm 4$	$11m + 2$	$101p + 4$	„
24	$50n \pm 18$	$11m + 3$	$101p + 12$	„
36	$50n \pm 6$	$11m + 10$	$101p + 18$	„
44	$50n \pm 12$	$11m$	$101p + 22$	„
56	$50n \pm 16$	$11m + 7$	$101p + 28$	„
64	$50n \pm 8$	$11m + 8$	$101p + 32$	„
76	$50n \pm 24$	$11m + 4$	$101p + 38$	„
84	$50n \pm 22$	$11m + 5$	$101p + 42$	„
96	$50n \pm 14$	$11m + 1$	$101p + 48$	„

Ridicând la patrat numerele înscrise în ultima coloană găsim că problema are următoarele soluţiuni, din care una este numai formal de 8 cifre:

$$2848^2 = 08111104 \quad ; \quad 5696^2 = 32444416;$$

$$8544^2 = 72999936.$$

Notă. 1°. D-l T. C. ŞTEFAN (Şc. Ofiţeri de Geniu) a dat soluţia complectă şi bună pe o cale diferită de precedenta. D-sa a pus în evidenţă şi patratul interesant

$$1699^2 = 02\ 886601.$$

2°. D-l S-LT. M. GRUMĂZESCU a găsit numai soluţia 8544^2, iar D-l H. L. REISCHER (Lic. Internat Iaşi), numai soluţia 2848^2.

3°. D-l EM. S. MODÂLCĂ (T.-Severin) a dat o soluţie foarte bună, ca demonstraţie dar greşind la calcule a ajuns la concluzia că problema *nu are soluţie.*

GH. B.

PROBLEMA 5186. *Se dă trapezul* ABCD *cu bazele* AD, BC. *Să se construiască două drepte paralele cu bazele pe care diagonalele şi laturile neparalele determină trei segmente egale. Notăm cu* E, F *şi* G, H *punctele unde fiecare din aceste drepte taie diagonalele. Să se arate că laturile neparalele ale trapezului* ABCD *şi cele ale trapezului* EFGH *sunt concurente.*

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţia I-a dată de D-nii: DINU A. GRIGORIU, CONST. ŞEIBULESCU (lic. „Spiru Haret"), DINU D. BUZNEA (lic. militar „N. Filipescu"), MIRCEA D. POPA (lic. militar Iaşi), CONST. CRISTEA, MIROSLAV TUDOREL (lic. militar Chişinău), EUGEN GH. FILA (student, Cluj).

Să ducem o paralelă la bazele trapezului, deasupra punctului O de întâlnire al diagonalelor şi să notăm cu P, E, F, Q punctele de întâlnire cu AB, AC, DB, DC. Avem:

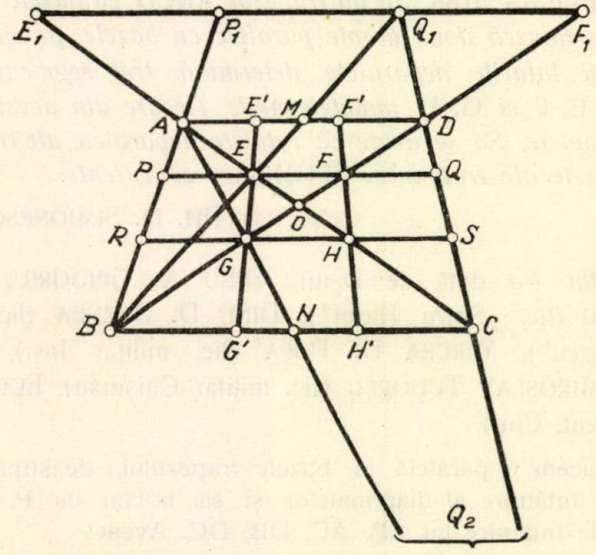
$$\frac{\overline{PE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DQ}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{FQ}}{\overline{BC}}$$

iar primul şi ultimul raport ne arată că $\overline{PE} = \overline{FQ}$, oricare ar fi poziţia acestei paralele. Pentru ca dreapta PQ să fie împărţită în 3 părţi egale va fi deci deajuns să avem $\overline{PE} = \overline{EF}$, adică punctul E va trebui să fie pe mediana vârfului B din triunghiul ABD. Rezultă următoarea construcţie: unim mijlocul M al bazei AD cu vârful B, dreapta BM întâlneşte diagonala AC în E, iar prin E se duce o paralelă la baze. Obţinem astfel $\overline{PE} = \overline{EF} = \overline{FQ}$.

In mod analog fie N mijlocul bazei BC. Dreapta AN taie diagonala BD în G. Paralela prin G la baze ne dă $\overline{RG} = \overline{GH} = \overline{HS}$ (sub punctul O).

Se cunoaşte următoarea teoremă: *mai multe drepte ce pornesc din acelaşi punct determină pe două drepte paralele segmente proporţionale.* Reciproca e adevărată: *dacă pe două drepte paralele se iau segmente proporţionale, dreptele ce unesc punctele corespunzătoare de pe cele două paralele, sunt concurente.*

Conform acestor reciproce dreptele PR, EG, FH, QS sunt concurente. Insă PR şi QS sunt tocmai laturile neparalele ale trapezului dat.



Soluţia II-a dată de D-nii: HORIA M. BODNĂRESCU (bacalaureat), EUGEN GH. VIJELIE (lic. mil. „N. Filipescu"), MIHAIL I. TREFILOV (lic. Brăila), M. AL. VASILESCU-STABU (lic. mil. Craiova), IOAN V. JAREGHIE (lic. militar Iaşi), CONST. C. MIHĂILESCU (lic. Câmpina), M. CHERŢMAN (absolvent Giurgiu), ISAC I. IANCU (elev-inginer, Iaşi). Să presupunem problema rezolvată.

Dreptele EG şi FH întâlnesc bazele AD şi BC respectiv în E', G' şi F', H'. Se demonstrează uşor că

$$\overline{AE'} = \overline{E'F'} = \overline{F'D} \quad \text{şi} \quad \overline{BG'} = \overline{G'H'} = \overline{H'C}.$$

Rezultă următoarea construcție: se împart bazele AD și BC în trei părți egale prin punctele E', F' și G', H'. Dreptele E'G' și F'H întâlnesc diagonalele în E, G și F, H. EF și GH sunt dreptele căutate.

Concurența dreptelor se arată ca la soluția I-a. Unii rezolvitori au dat demonstrația următoare:

Se știe că într'un trapez dreapta ce unește mijloacele bazelor trece prin punctul de întâlnire al laturilor neparalele. Atunci în trapezul PRHF, dreapta EG unește mijloacele bazelor, deci dreptele PR, EG, FH sunt concurente. La fel se arată că și QS trece prin intersecția dreptelor EG și FH.

Soluțiuni bune, apropiate de cele de mai sus s'au primit dela D-nii: NICOLAE D. ȘTEFĂNESCU (Ș. O. G), MIRCEA C. NICULESCU (cl. VIII-a lic. „Titu Maiorescu", București), STELIAN CETĂȚEANU (elev-inginer, București), MIRCEA L. RUSU, C. D. EFTIMIE și PAUL DRĂGHICESCU.

D-l FLORIN I. ABELES a trimes două soluțiuni dintre care una bună și una greșită.

Observațiuni. 1°. S'au primit, în afară de cele de mai sus, 9 (nouă) soluțiuni în care nu se vorbește nimic despre problema de construcție, ceea ce arată că nu s'a citit enunțul cu atenție. Problema nefiind complet rezolvată nu mai citez numele autorilor acestor soluții.

2°. Dintre toți rezolvitorii numai D-l HORIA M. BODNĂRESCU a discutat problema arătând următoarele:

a) Se pot construi 4 drepte paralele cu bazele trapezului dat în condițiile problemei, dintre care două sunt între bazele trapezului dat, iar două în afara lor (în figură e construită dreapta P_1Q_1 și indicat punctul Q_2).

b) Dacă trapezul EFGH se construește pe cele două drepte interioare bazelor sau pe cele două drepte exterioare, atunci laturile neparalele ale lui și laturile neparalele ale lui ABCD sunt concurente;

c) condiția de concurență *nu* e satisfăcută dacă se construește trapezul EFGH pe o dreaptă dintre baze și una din afară.

PROBLEMA 5223. *Să se integreze ecuația diferențială:*

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y' & y'' & y \\ y'' & y & y' \end{vmatrix} = 0.$$

MIHU CERCHEZ.

Soluția I-a dată de D-l TUDOR GOSPODIN. Determinantul dezvoltat se pune sub forma:

$$(y''+y'+y)(y''^2+y'^2+y^2-yy'-yy''-y'y'')=0.$$

Se obţin ecuaţiile:

(1) $y'' + y' + y = 0$;

(2) $y''^2 + y'^2 + y^2 - yy' - yy'' - y'y'' = 0.$

Ecuaţia (1) are ecuaţia caracteristică: $r^2 + r + 1 = 0$, cu rădăcinile:

$$r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Deci soluţia generală a ecuaţiei (1) este:

$$\boxed{y = e^{-\frac{x}{2}}\left(A_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + A_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}.$$

Ecuaţia (2) fiind omogenă, se face substituţia: $y' = uy$ $(y \neq 0)$ x fiind o nouă variabilă.

Obţin ecuaţia:

(2') $u'^2 + u'(2u^2 - u - 1) + (u^4 - u^3 - u + 1) = 0$

şi găsim 2 valori pentru u':

(3) $u' = (1-u)(u-\alpha)$, (3') $u' = (1-u)(u-\alpha^2)$

α şi α^2 fiind rădăcinile cubice imaginare ale unităţii:

$$\alpha = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \alpha^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ecuaţia (3) se mai poate scrie:

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{u-\alpha}\right)du = dx.$$

Integrând în ambii membri găsim:

$$u = \frac{\alpha + c_1 e^{x(1-\alpha)}}{1 + c_1 e^{x(1-\alpha)}}.$$

Revenind la transformarea:

$$y' = uy \quad , \quad y = Be^{\alpha x} + B'e^{x}.$$

Ecuaţia (3') va avea soluţia:

$$y = c.e^{\alpha^2 x} + c'e^{x}.$$

Ţinând seama de valorile lui α şi α^2 soluţiile generale ale ecuaţiei (2) sunt:

$$\boxed{y = B_1 e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B_2 e^{x}}.$$

Soluția II-a dată de D-nii: TEODOR ȘERBAN (elev-inginer Șc. Politehnică, București) și RIPIANU D-TRU.

Determinantul este de tipul numit circulant, el se poate desvolta sub forma:

$$(y''+y'+y)(y''+\varepsilon y'+\varepsilon^2 y)(y''+\varepsilon^2 y'+\varepsilon y)=0$$

unde ε și ε^2 au aceeași semnificație ca și mai sus.

Ecuația propusă se descompune astfel în trei ecuații liniare de ordinul 2 cu coeficienți constanți.

Rezolvând ecuațiile lor caracteristice în r, obținem soluțiile generale ale acestor trei ecuații.

Notă. — S'au mai primit soluții care comportă aceeași greșeală. „Așezând ecuația (2) sub forma:

$$\frac{1}{2}[(y-y')^2+(y'-y'')^2+(y''-y)^2]=0$$

concludem că ecuația e posibilă numai dacă:

$$y=y' \quad , \quad y=y'' \quad , \quad y'=y''$$

și se găsește astfel soluția comună a celor trei ecuații: $y=c.e^{x\alpha}$, care nu constitue doar, decât o soluție particulară a ecuației (2), soluția generală trebuind să depindă de 2 constante arbitrare, ecuația fiind de ordinul 2.

C. MIHU.

PROBLEMA 5300. *Se consideră, pe un cerc fix cu centrul în* O, *un punct variabil* M *și tangenta* AT, *într'un punct fix* A *la acest cerc. Un cerc variabil, care are centrul în* M *și rămâne tangent dreptei* AT, *întâlnește dreapta* OM *în* P *și* P'.

Să se găsească locul geometric al punctelor P *și* P'.

EMIL MORȚUN.

I. *Soluție geometrică.*

Din punctul M ducem perpendiculara MN pe diametrul AB. Unim punctul A cu punctul P. Observăm că:

$$MT = NA = MP.$$

Urmează că: $ON = OP.$

Triunghiurile OMN și OPA sunt egale căci au:

$OM = OA$, $ON = OP$, $\widehat{AOM}$ unghi comun.

Triunghiurile fiind egale urmează că:

$$\widehat{OPA} = \widehat{ONM} = 90^0.$$

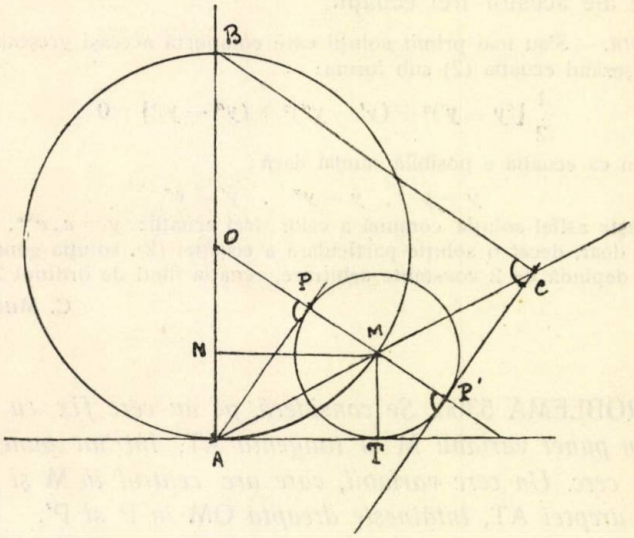
Deci, locul geometric al punctului P, este un cerc descris pe OA ca diametru.

Unim pe A cu M şi prelungim pe AM cu o distanţă egală MC; unim apoi pe C cu P'. Triunghiurile AMP şi CMP' sunt egale, căci au:

$MP = MP'$ $AM = MC$ $\widehat{AMP} = \widehat{CMP'}$; deci $\widehat{MPA} = \widehat{MP'C} = 90^0$.

Urmează că dreapta CP' este tangentă în P', cercului variabil.

Observăm apoi că în triunghiul ABC, O şi M sunt mijloacele laturilor AB şi AC. Urmează că:



BC = 2R; BC este paralelă cu OM deci perpendiculară pe CP'. Dreapta variabilă CP', rămâne la aceeaşi distanţă BC de punctul B; aşa dar această dreaptă rămâne tangentă unui cerc, cu centrul în B şi cu raza 2R. Punctul P' este proiecţia lui O pe tangentele acestui cerc.

Locul geometric al punctului P' este podara punctului O faţă de acest cerc, adică Melcul lui PASCAL.

II. *Soluţie analitică.*

Alegem origina în punctul O, axa Oy paralelă cu tangenta AT

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0 \quad (OM)\ y = \frac{\beta}{\alpha} x \quad M(\alpha, \beta) \quad \alpha^2 + \beta^2 = R^2.$$

Ecuaţia cercului variabil este:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (R - \alpha)^2 \ ; \ x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2R\alpha - \beta^2 = 0.$$

Locurile geometrice cerute se obţin eliminând pe α şi β între:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+2R\alpha-\beta^2=0 \quad y=\frac{\beta}{\alpha}x \quad \alpha^2+\beta^2=R^2.$$

Se găseşte că locul lui P este:

$$x^2+y^2-Rx=0.$$

Locul lui P' este:

$$(x^2+y^2+Rx)^2=4R^2(x^2+y^2).$$

D-l TUDOR GOSPODIN, profesor Cluj, a trimis 2 soluţii foarte bune; geometrică şi analitică.

Au dat soluţii analitice D-nii: JILETCOVICI AL., ROHR AL., POPA D. MIRCEA, LEIBOVICI SERGIU.

Un corespondent a trimis o soluţie geometrică fără figură!! S'au primit şi alte soluţii greşite.

EM. M.

PROBLEMA 5314. *Un fir inextensibil trece prin gaura unei mese orizontale, de unul din capetele sale este prinsă o greutate* P *aşezată pe masă, iar de celălalt capăt atârnă o greutate* Q *(lungimea porţiunei de fir aşezată pe masă este l). Se dă lui* P *o iuţeală* v_0 *orizontală, perpendiculară pe direcţia firului. Să se determine mărimea acestei iuţeli astfel încât greutatea* Q *să se ridice cu o înălţime h.*

Greutatea firului şi frecările se vor neglija.

GABRIELA ŢIŢEICA.

Soluţie dată de D-l EMIL S. MODÂLCĂ (Politechnica din Bucureşti).

Fie v_1 viteza lui P după ce s'a ridicat cu înălţimea h. Din teorema energiei cinetice avem:

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\frac{P}{g}v_1^2-\frac{1}{2}\frac{P}{g}v_0^2=-Qh.$$

Deasemenea, ţinând seama că P este mobil în plan în jurul unui pol (gaura mesei) sub acţiunea unei forţe (tensiunea în fir) putem întrebuinţa legea ariilor:

$$(2) \qquad v_0 l=v_1(l+h).$$

Rezolvind sistemul de ecuaţii format de (1) şi (2), căpătăm

$$v_0=(l+h)\sqrt{\frac{Qg}{P(h+2l)}}, \quad v_1=l\sqrt{\frac{Qg}{P(h+2l)}}$$

G. Ţ.

PROBLEMA 5377. *Există triunghiuri în care o latură să fie medie armonică a celorlalte două?*

I. IONESCU.

Soluție dată de D-nii: RADU P. VOINEA (Clasa VIII-a, L. F. B.), BAKONYI C. (Liceul „C. Diaconovici Loga", Timișoara), P. P. DRĂGHICESCU (Liceul militar, Iași), GH. BROȘTEANU-TAZLĂU, ȘERB. STOIANOVICI (Colegiul național, „N. Filipescu", Predeal).

Se vede *a priori* că există asemenea triunghiuri, căci echilateralele satisfac evident condițiunea cerută. Fie acum $a \leqslant b \leqslant c$. Trebue să avem:

$$(1/a)+(1/c)=(2/b),$$

$$\therefore \quad b=2ac/(a+c).$$

Pentru ca latura b astfel calculată să fie acceptabilă, trebue să avem:

$$b<a+c \quad , \quad b>c-a.$$

Inlocuind b cu valoarea lui găsită mai sus obținem:

$$2bc<(b+c)^2 \quad , \quad 2ac>(c+a)(c-a),$$

$$\therefore \quad o<a^2+c^2 \quad , \quad c^2-2ac-a^2<0.$$

Prima neegalitate este evidentă. Pentru a satisface pe a doua trebue să luăm pentru c valori cuprinse între rădăcini, și cum rădăcina cea mică este negativă, trebue să luăm c mai mic decât rădăcina cea mare care este $a(1+\sqrt{2})=2{,}4142\,.\,a$.

Dacă deci raportul între latura cea mare și cea mică nu trece de $(1+\sqrt{2})=2{,}4142\ldots$ putem găsi triunghiuri la care latura mijlocie să fie medie armonică a celorlalte două.

EXERCIȚII

13. R_1, R_2, R_3, R_4 fiind razele cercurilor circumscrise triunghiurilor formate de diagonalele unui patrulater oarecare avem:

$$R_1+R_2+R_3+R_4=\frac{plm}{S}$$

notațiile fiind obișnuite într'un patrulater oarecare.

EUG. GH. VIJELIE.

R. Se vede uşor că

$$R_1 = \frac{a}{\sin\varphi} \quad , \quad R_2 = \frac{b}{\sin\varphi}, \ldots$$

şi

$$S = \frac{lm \sin\varphi}{2} .$$

Deci

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = \frac{2p}{\sin\varphi} = \frac{plm}{S} .$$

PROBLEME PROPUSE

5426 [1]). Să se construiască un triunghiu cunoscând un unghiu, o latură şi raportul razelor a două din cercurile tritangente laturilor.

G-L GH. BUICLIU.

5452. Se cer numerele *szu* şi *s'zu* de câte trei cifre care au pe *zu* ca divizor comun maxim.

I. IONESCU.

5453. Să se determine produsul numerelor prime cu 1939 din şirul natural al primelor 1938 numere, apoi produsul numerelor prime cu 1938 din şirul natural al primelor 1939 numere.

Să se compare rezultatele.

CPT. COMANDOR I. LINTEŞ.

5454. Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul format de axele radicale ale unui cerc O cu alte trei cercuri de centre A, B, C. Perpendicularele duse prin O pe cevienele A_1M, B_1M, C_1M ale unui punct M din planul triunghiului $A_1B_1C_1$ intersectează laturile triunghiului ABC în trei puncte colineare pe o dreaptă perpendiculară pe OM.

THEODOR G. COCEA.

5455. Fie patrulaterul inscriptibil BCDE ale cărui diagonale se taie în punctul I. Fie încă intersecţiile A şi A_1 ale perechilor de drepte (BC, DE) şi (BE, DC); ω şi ω_1 punctele MIQUEL ale patrulaterelor ABIE şi A_1DIE; tangentele duse în I la cercurile BIC, DIE, BIE, CID taie dreptele AC, AD, A_1B, A_1C respectiv în punctele M, N, M_1, N_1; tangentele duse în punctul A la cercurile

1) Problema 5426, propusă la pag. 278 din Nr. 5, Vol. XLVI al *G. M.*, trebue înlocuită fiind *identică* cu problema Nr. 1828, propusă de acelaşi autor la pag. 16, Nr. 1, din Martie 1940, Vol. XX al *Revistei Matematica Timişoara*.

ABD, AEC taie dreptele IB, IE în punctele P, Q, iar tangentele duse în punctul A_1 la cercurile A_1BD, A_1EC taie dreptele ID, IE în punctele P_1, Q_1. Să se arate, că:

1°. Punctele A, I, ω sunt colineare. Deasemenea punctele A_1, I, ω_1.

2°. Patrulaterul $AA_1\omega\omega_1$ este inscriptibil.

3°. Dreptele MN şi PQ se taie pe dreapta AI; dreptele M_1N_1 şi P_1Q_1 se taie pe A_1I.

4°. Punctele M, N, M_1, N_1 sunt colineare.

5°. Dreptele PQ şi P_1Q_1 se taie pe dreapta AA_1.

HORIA M. BODNĂRESCU.

5456. Se dă un patrulater ABCD şi se notează cu O, E, F intersecţiile diagonalelor şi ale perechilor de laturi opuse.

Să se demonstreze că triunghiul complementar al triunghiului OEF este omologic cu fiecare din cele patru triunghiuri ce se obţin din patrulaterul ABCD lăsând câte un vârf deoparte.

GH. D. SIMIONESCU.

5457. Fie M, N, P trei puncte în planul triunghiului ABC, astfel ca

$$\sphericalangle BAP = \sphericalangle NAC = \frac{1}{n} A$$

$$\sphericalangle ABP = \sphericalangle MBC = \frac{1}{n} B$$

$$\sphericalangle BCM = \sphericalangle NCA = \frac{1}{n} C.$$

Fie M', N', P' punctele determinate de perechile de drepte (BM, AN); (CN, BP); (AP, CM). Dreptele MM', NN', PP' taie laturile BC, CA, AB în punctele M'', N'', P''. Să se arate, că:

1°. Dreptele AM, BN, CP sunt concurente.

2°. Dreptele AM', BN', CP' sunt concurente.

3°. Dreptele AM'', BN'', CP'' sunt concurente.

4°. Dreptele MM', NN', PP' sunt concurente.

MIRCEA D. POPA.

5458. Unui patrat dat să i se circumscrie un paralelogram de suprafaţă maximă sau minimă şi care să aibă o latură de direcţie dată.

G-L GH. BUICLIU.

5459. Un exagon articulat ABCDEF, ale cărui laturi sunt paralele trei câte trei, se deformează, vârfurile A şi F rămânând fixe. Se cere locul geometric al intersecţiei diagonalelor AD, BE, CF.

V. THÉBAULT.

5460. Se consideră punctul F şi dreapta D. Fie M un punct mobil pe D; o dreaptă ce trece prin M şi face cu MF un unghiu constant şi de acelaşi sens, u, înfăşoară o parabolă P, de focar F, a cărei axă face cu D unghiul u.

Fie şi parabola P' ce corespunde aceluiaşi unghiu u, în sens contrar; P şi P' se taie în două puncte reale U, V pe perpendiculara din F pe D şi două puncte imaginare pe omotetica (F, 2) a dreptei D. Dacă O este proiecţia lui F pe D, punctele U, V sunt puncte inverse în raport cu cercul (O, F).

Să se afle înfăşurătoarea parabolelor P, când u variază.

Să se transforme figura într'o inversiune de pol F, modul arbitrar.

Să se demonstreze şi direct propoziţia obţinută.

N. N. MIHĂILEANU.

5461. Se consideră curba definită de ecuaţiile

$$x^2 = \frac{t^3 - 4m^2t + 4m^2}{4(t - m^2)}, \quad y^2 = \frac{-t(t-2)^2}{4(t-m^2)},$$

unde t este parametrul, iar m o constantă reală.

Să se determine:

1°. Intervalul în care poate varia t pentru ca această curbă să fie reală;

2°. ecuaţia carteziană a curbei;

3°. forma curbei.

TH. ANGHELUŢĂ.

5462. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{x-c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{x-c}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{c}-\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b})(\sqrt{x-b}-\sqrt{x-c})(\sqrt{x-c}-\sqrt{x-a})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{c}-\sqrt{a})}.$$

LT. C. IONESCU-ŢIU.

5463. Patru persoane joacă împreună o partidă de *bridge* în trei *robbere*.

1°. Să se exprime valoarea fiecărui robber în funcţie de sumele iniţiale şi finale ale celor patru jucători.

2°. Să se găsească condiţia necesară ca doi jucători să fie câştigători, respectiv pierzători finali. Să se deducă, invers, că unul din cei doi jucători este sigur câştigător, respectiv pierzător final.

3°. Să se găsească condiţiile necesare şi suficiente ca *unul*, *doi* sau *trei* din cei patru jucători să fie câştigători finali.

4°. Cunoscând sumele iniţiale ale jucătorilor şi ştiind că sumele finale sunt în progresie aritmetică sau geometrică, să se determine efectiv valoarea fiecărui robber precum şi sumele finale. Discuţie.

M. GHERMĂNESCU.

5464. Fie P şi Q punctele unde tangenta în punctul M la curba (C) întâlneşte axele OX, OY, presupuse perpendiculare. Se cere:

1°. Să se determine curba (C) astfel ca perpendiculara în P, pe OX şi perpendiculara în Q pe OY să se întâlnească pe normala în M la această curbă.

2°. Să se arate că segmentul PQ, determinat de axe pe tangentă, are aceeaşi lungime pentru toate punctele curbei (C).

3°. Să se arate că tangenta în punctul M la curba (C) este dreapta trecând prin acest punct şi pe care axele de coordonate determină segmentul de lungime minimă.

ŞERBAN GHEORGHIU.

5465. Să se determine funcţiile $f(x)$, care verifică ecuaţia funcţională

$$f(x^{\alpha}) = x^{\beta} f(x),$$

unde α şi β sunt constante pozitive.

G. CĂLUGĂREANU.

5466. Se cere să se determine funcţiile continue $f(x)$ de o variabilă reală x, astfel ca $f(x+y+z)$ să fie produsul unei funcţii de x cu o funcţie de y şi z.

TIBERIU POPOVICIU.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Alexe Costin (4368); *Andrei Gh. A.* (5423); *Andrei M. Const.* (4368, 5451); *Andrievici N. Nicolae* (4368); *Badea A. Ioan* (4368, 5386, 400); *Bădulescu P. Nicolae* (2684, 5375, 436); *Bodnărescu M. Horia* (5400); *Bogdan Gh. Gr.* (4368, 5407); *Botez Marcel* (5364); *Cetăţeanu St.* (5113); *Cristea P.* (5364); *Cruceru G. Const.* (4368); *Diaconescu Const.* (5364); *Drăghicescu P. Paul* (2717, 4396, 5050, 80, 82, 125, 55, 211, 27, 33, 88, 308, 24, 36, 48, 59, 75, 85, 86, 87, 93, 98, 400, 09, 13, 14, 20, 23, 24, 28, 31, 33, 34, 35, 36); *Dumitrescu Cezar* (4452, 5362, 64); *Florescu L. Victor* (4368); *Ganea Marin* (4368, 5447); *Gheorghiu E. Oct.* (5311, 413, 20, 37); *Giuglan D.* (4452, 5362); *Giulgiu T. D-tru* (5364); *Holca L. Radu* (5364); *Inculeţ I. Ion* (4602, 5451); *Ionescu Cicerone* (5364, 78); *Martac V. Radu* (4368); *Marteş Gr.* Subloc. (4368, 5420, 35, 42); *Mihăilescu C. Const.* (4368, 667, 5319, 447); *Modâlcă S. Emil* (5239, 313, 14, 31, 74, 75, 436, 38); *Moscovici E. N.* (5447); *Negrescu C. I.* (5368, 400); *Nicolau Gr. Const.* (5328); *Niculescu C. Mircea* (5268, 378, 400); *Nistor I. I.* (5362, 64); *Pantelimon V. Const.* (4368, 5400, 34); *Petrescu I. Ştefan* (4368); *Petrescu R. Gh.* (4368); *Pintilie I. Ioan* (5413); *Popa N. Aurel* (3513, 5319, 38, 63, 65, 413, 23); *Popescu Fl.* (4452, 368, 5415, 47); *Popescu Gh. Marin* (5413); *Popescu-Greaca I. I.* (5378); *Popişcă V. Mircea* (5362, 64); *Raicu S. Virgil* (5362, 64); *Russu L. Mircea* (4028, 368, 5199, 231, 320, 43, 420, 35, 38); *Sbârnea D. Gh.* (4368, 5050, 80, 5437, 38, 47); *Şerban A. Teodor* (5386, 436); *Sotirescu Nic.* (5432); *Staicu Const.* (4452, 536, 64, 78, R); *Stoenescu D. Mirel* (5400, 34); *Stoianovici I. Şerban* (4368, 5413); *Văduva F. Marin* (4368, 5415, 17); *Vasiliu G. D-tru* (5369, 78); *Vijelie Gh.* (4667); *Vijelie Gh. Const.* (5319, 28); *Vijelie Gh. Eug.* (5307, 434); *Voicu D. Gh.* (4368, 5413); *Voinea P. Radu* (5378, 86, 400, 37); *Zaharia O. Gh.* (4368).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, III, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*

Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. **Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii

Abonamentul anual (9 numere). Lei 50

Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 69.297.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVI

NUMĂRUL 8. — APRILIE 1941

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNEA SIBIIU

SUMARUL

1. Errare humanum est . . . . . *I. Ionescu.*
2. Philipp Melanchton și matematicile . . . *Victor Marian.*
3. Calculul vectorial (urmare) . *Dr. Ing. Plautius Andronescu.*
4. Premiul „Ing. Al. Roșu" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
5. Note Matematice: 36 — 40.
6. Bibliografie.
7. Cereri.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 3127, 3208, 3945, 4470, 4934, 5050, 5080, 5195, 5323, 5338, 5436.
10. Exerciții: 14.
11. Probleme propuse: 5260, 5437, 5467 — 5481.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1941

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer, şi D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1940 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: **53**64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **4**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLVI. Nr. 8 *SUPLIMENT* APRILIE 1941

RECREAŢIUNI

1. **Tabla lui Pitagora.** La o grădină de copii, se începea cântecul acestei table astfel:

O dată *unu, unu* | Soldatul dă cu tunul, | Tunul face poc, | Soldatul stă *pe loc.*

C. V. COSTĂCHESCU.

*

2. **O definiţie a egalităţii.** *Egalitatea* înseamnă tratarea *inegală* a lucrurilor *inegale.* (Din Cartea «*Pentru Legionari*» pag. 413).

I. L.

*

3. **Matematica şi Muzica.** Muzica nu permite simplificarea fracţiilor! Astfel 4/4 nu este 1 !.

C. STAICU.

*

4. **Cele patru operaţiuni aritmetice.** Pe o partitură datorită lui C. JUSTIN am găsit:

I. *Aritmetica* e lumea | Dar cam greu de studiat; | Cine-o poate şti pe toată | Ăla e solid bărbat. |

II. Are patru *operaţii* | Diferite'n felul lor, | Greu e să le ştii pe toate | Dar de explicat, uşor. |

III. Cel zgârcit un singur lucru | Dela naştere a'nvăţat | Să tot facă zi şi noapte | *Operaţii* de-*adunat.* |

IV. Cel stricat, ce moştenit-a | Dela tatăl său avut? | Ce-aţi crezut că poate face? | *Operaţii*... de *scăzut.* |

V. Omul însurat de tânăr | Şi la fire liniştit | Face des, pe nesimţite | *Operaţii*... *de'nmulţit.* |

VI. Iară cel zevzec la minte | Şi la pungă garnisit | Face-ntr'una la ne-toate *) | *Operaţii* de'*npărţit.* |

H. P. IONESCU.

*

5. **Adunarea biologică.** La ora de Anatomie, Profesorul explică:

„Omul are pe cele două maxilare câte 4 *incisivi*, 2 *canini*, 4 *premolari* şi 6 *molari*; în total 32 dinţi. Dacă considerăm un şir de fracţii unde numărătorul să arate dinţii de pe maxilarul superior şi numitorul pe cei de pe maxilarul inferior, adunându-le căpătăm:

$$(4/4) + (2/2) + (4/4) + (6/6) = (16/16) = 32 \text{ dinţi.}$$

Aici 16 ne arată că sus avem 16 dinţi şi jos tot atâţia".

---

*) In originalul primit la Redacţie era un cuvânt care nu avea ce căuta aici la *Recreaţii.* Fără să întrebăm autorul l'am înlocuit cu altul care-i cam rimează.

Un elev nedumerit, riscă să întrebe:

„Domnule Profesor, cum ați adunat fracțiile fără ca numitorii să fie comuni!".

Profesorul: „Taci prostule! asta nu-i adunare matematică, asta-i altă istorie, e *adunare biologică*".

Autentic.

C. N. AVRAMESCU.

Ar fi fost mai nemerit să i se zică adunare *boi logică!*

GH. B.

*

6. **Noțiuni fracționare!** La ora de Automobilism, D-l căpitan fiind întrebat de un elev ce deosebire este între un „*camburant*" și un „*carburant*", ne spune:

„D-lor, aceste două noțiuni, aduse la același numitor, sunt echivalente".

C. PANTELIMON.

*

7. **Demonstrații „sui generis".** 1. Dacă $s(n)$ reprezintă suma divizorilor lui N, atunci avem:

$$s(6^7) - s(6) = \mathfrak{M}7.$$

Avem:

$$s(6^7) - s(6) = s(6) \cdot (6^6 - 1) = s(6) \cdot 7 \cdot 6665 = \mathfrak{M}7.$$

2. Deasemenea, dacă $p(N)$ reprezintă produsul divizorilor lui N, atunci avem:

$$p(2^7) - p(2) = \mathfrak{M}7.$$

In adevăr:

$$p(2^7) - p(2) = p(2)(2^6 - 1) = p(2) \cdot 3 \cdot 7 = \mathfrak{M}7.$$

I. L.

*

8. **Două definiții.** *In probleme-minuni* am găsit următoarele două definițiuni:

Infinitul. Este o sferă al cărui centru se găsește pretutindeni dar ale cărei margini nu le găsim nicăeri.

Eu. Eu sunt o ființă nedesăvârșită și mărginită, care prin o mișcare firească tinde către *infinit.*

A. BURICOVICI

*

9. **Matematica în contrast cu Botanica.** In matematică a „Divide" înseamnă a „împărți" pe când Botanica spune: algele se „înmulțesc" prin „diviziune"!

C. STAICU

*

10. **Lirism matematic.** In *„Adevărul literar și Artistic"*, Anul XII seria II-a No. 647 din 30 Aprilie 1933, se găsește următorul *„Reproș"* :

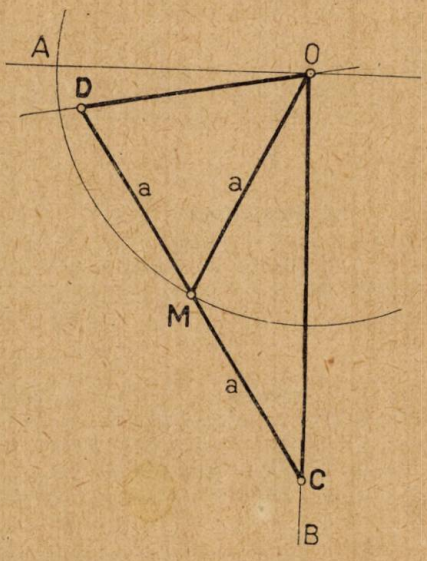
Urmând aceleași tainice *orbite* | Și descriind mereu aceleași *cercuri :* Purtam dorinți în suflet și ispite. | Și ne-ntâlneam și Luni și Marți și Mercuri. | Când m'ai lăsat și am uitat de toate, | Și mai ales vremurile acele | Schimbându-și *centrul* vechiu de *gravitate* | Ne-am despărțit ... ca două *paralele.* | Le-am *calculat* adesea ... *infinitul.* |

M'a speriat distanța dintre ele | Precum la fel am calculat *zenitul* | Și cu *nadirul* fericirii mele. | Ne-am împăcat și pe aceeași *temă* | Ți-am dat în dar a versului amor | De ce-mi credeai iubirea ... *teoremă* | Când ea-i de mult o veche *axiomă !*

R. ZAHARIAN.

*

11. **Prin un punct se pot duce în același plan vertical o infinitate de orizontale.** Fie un punct O. Ducem orizontala OA, verticala OB și un cerc cu centrul în O și de rază *a*. Pe acest cerc să luăm *un punct oarecare* M iar pe verticala OB un punct C astfel încât MC = MO = *a*. Se prelungește dreapta MC cu segmentul MD = *a* și se unește D cu O.



Avem prin urmare în triunghiul ODC în care OM este mediană :

$$OM^2 = \frac{1}{2}(OD^2 + OC^2) - \frac{1}{4}DC^2. \quad (1)$$

Dar : $OM = \frac{1}{2}DC.$

Rezultă $DC^2 = OD^2 + OC^2.$

Triunghiul ODC este deci dreptunghic în O. Dreapta OC fiind verticală, rezultă că OD este orizontală. Am construit deocamdată două orizontale trecând prin O, O*a* și OD.

Deplasând pe M pe cerc și repetând construcția putem obține *un număr infinit de orizontale, toate trecând prin* O *și toate fiind situate într'un același plan vertical.*

Relația (1) este cunoscută.

AL. STOENESCU.

*

12. **Aria trapezului.** Un Domn profesor universitar mi-a comunicat că printre geometriile aprobate pentru învățământul secundar a fost una care demonstra astfel că aria unui trapez este semisuma bazelor înmulțită cu înălțimea.

Dacă înmulțim baza cea mare cu înălțimea obținem evident o arie prea mare. Dacă înmulțim baza cea mică cu înălțimea obținem o aria prea mică. Aria adevărată se găsește între aceste două. Ca să compensăm eroarea făcută într'un sens cu cea făcută în sensul opus, să facem semisuma celor două arii, ceea ce revine la a înmulți semisuma bazelor cu înălțimea.

I. I.

*

13. **Planuri sociale şi artistice.** In *«Universul literar»*, XLIV No. 5 pag. 78, găsesc:

„ ... Negresa JOSEPHINE BAKER este punctul de intersecţie al planurilor sociale şi artistice la Paris.

14. **Dreptele isotrope.** Ecuaţiile lor sunt:

$$y = ix + k \quad , \quad y = -ix + k'.$$

O dreaptă este în acelaşi timp şi perpendiculară şi paralelă cu ea însăşi! Căci:

$$\mathrm{tg}V = (m - m')/(1 + mm') = (i - i)/(1 + i^2),$$

căci avem $i = i$ şi $i^2 = -1$.

Distanţa dela un punct la una din drepte este O. Fie x_1, y_1 coordonatele unui punct M. Avem pentru distanţa lui d la aceste drepte:

$$d = \pm (y_1 \pm ix_1 + k)/(\sqrt{1 + i^2}) = 0.$$

Unghiul lor este i.

$$\mathrm{tg}V' = (i + i)/\sqrt{1 - i^2} = 2i/2 = i,$$

în loc de $2i$.

Dreptele sunt concurente în punctul $[(k - k')/2i, \frac{1}{2}(k + k')]$.

Punctele la infinit sunt *puncte ciclice* căci:

$$x^2 + y^2 = 0.$$

V. C. POPESCU.

*

15. **Românizare.** Dintr'un Certificat tradus din ruseşte, eliberat de Şcoala tecnică superioară din Kiev, găsim traduse unele cursuri astfel:

„Geometria de desen, Analize celor mici, partea I, II, III, Baze mecanice, Impotrivirea materialelor, Statornicia construcţiilor, proiect de pod neîntrerupt proiect de pod curent, etc.“. Actul este din Zastavna, datat 13 Iulie 1934.

I. I.

*

16. **Infinitu** ∞. In volumul tipărit în cinstea lui GHEORGHE HERGOPOL (Vezi *Gazeta Matematică*, Anul curent pag. 302 MIELU PANSIVU i-a scris:

La Gazetă, în formule, | Multe semne ai cunoscut, | Dar mai toate ţi-au fost nule, | Numai ăsta ţi-a plăcut. | | Numai lui i-ai dat valoarea | Şi cu drag l'ai zeţuit, | Fiindcă ţi-a plăcut Licoarea | Să o sorbi la *infinit*. |

*

17. **Prim.** (′). *Primă*. Din acelaşi volum:

Semnul ăsta matematic, | Ca un ghimpe ascuţit | Ştiu că nu ţi-a fost simpatic | In suflet ţi-a stat înfipt. Numai el ţi-a fost calvarul, | Fiindcă „primă“ se exprimă, | Şi ţi-ai încasat salarul | Totdeauna ... fără *Primă*? |

MEIŢĂ ŢEPELUŞ.

*

18. **Tipărirea Gazetei Matematice de Gheorghe Hergopol.** In acelaşi *Album* mai găsim:

Meşter fără de pereche, | La formule ai lucrat; | Ţi-a fost floare la ureche | Cât era de complicat. | | Necazul ce nu-l vei uita, | Că-ţi făcea viaţa amară, | Era data când „Gazeta“ | trebuia ca să apară. | | Atunci deveneai vulcanic | Vreai să fii la punct, mă rog!.. | Şi ca un despot tiranic, | Deveneai ... un *pisălog!* |

GH. LAZĂR.

ERRARE HUMANUM EST

Una din axiomele pentru activitatea omenească este şi cea exprimată în titlul acestui articol. Cine nu activează, cine nu lucrează, nu greşeşte, căci nu are ce greşi. Dar şi lor totuşi li se poate spune că fac o greşeală mare, enormă, că îşi duc viaţa ca trântori pe acest pământ! *Zero* este şi limita superioară a numerelor negative iar nu numai limita inferioară a celor pozitive! Cine lucrează, nu poate să nu greşească niciodată. De aceea la slujbele religioase dela înmormântări se cere ertarea greşelilor. In rugăciunea pe care preoţii creştini o fac pentru ertarea păcatelor celor repausaţi, se spune:

„Ca un Dumnezeu bun şi iubitor de oameni, iartă-l, că nu este om care să nu viețuiască şi să nu greşească; că tu singur eşti fără păcat; dreptatea ta este dreptate în veac, şi cuvântul tău adevăr“.

Cauzele erorilor sunt numeroase. Voiu vorbi aci numai de cele matematice. Este adevărat că neştiinţa este isvorul lor cel mai bogat; aceste erori s'ar putea însă numi *erori voite* căci nimeni nu pune pe cineva, care nu se pricepe, să facă sau să scrie ceea ce nu a învăţat ceea ce nu a studiat. Aşa, cei ce se apucă să scrie despre *cuadratura cercului, trisecţiunea unghiului, dublicarea cubului, postulatul lui* EUCLID, *mişcarea perpetuă* nu fac greşeli, ci scriu direct opere care să dovedească neştiinţa lor.

Tot greşeli voite sunt acelea pe care le face cineva când cu ştiinţă îşi pune numele sub, sau înaintea unui articol, la o notă sau la o problemă, care au fost produse de altul. Asemenea greşeli sunt de fapt incorectitudini pentru cei ce le fac intenţionat, şi cine le descoperă este dator să le semnaleze, în mod obiectiv, fără să caute a aduce jigniri autorilor acestora falsi, revistele şi cărţile ştiinţifice neavând printre scopurile lor şi polemicele personale. Trebue restabilit adevărul şi numai atâta! Şi aceasta, pentru că este posibil ca mai mulţi cercetători să ajungă la aceleaşi rezultate cam în acelaşi timp sau ca cineva să regăsească ceea ce s'a găsit de alţii mai înainte.

Aşa de exemplu mai în toate geometriile se găseşte următoarele afirmaţiuni:

Linia dreaptă este drumul cel mai scurt dintre două puncte.
Perpendiculara este mai scurtă ca oblica.
Cercul este locul punctelor egal depărtate de un punct.
Suma unghiurilor unui triunghiu este două unghiuri drepte.

Putem conchide de aci că toţi autorii acelor geometrii sunt plagiatori? Chestiunea plagiatului în Matematică este foarte delicată şi foarte greu de stabilit. In Revista *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, Volumul IX, (1902), am propus chestiunea următoare cu Nr. 2278, la care nu s'a primit nici un răspuns până la încetarea apariţiei acelei Reviste:

„Quand peut-on dire qu'un Ouvrage ou un article de Mathématiques a été plagié et quels sont les caractères d'après lesquels on peut reconnaître un tel plagiat? Est-il suffisant d'annoncer les Ouvrages consulté pour pouvoir reproduire ou traduire des passages entiers sans demander la permission de l'auteur" ?

J. JONESCO (Bucarest).

Din faptul că e greu de demonstrat dacă avem de a face cu un plagiat matematic, nu rezultă că în matematici plagiatul este permis. De aceea, una din datoriile Revistelor de matematici este de a arăta pe primii autori ai unor chestiuni tratate anterior.

In *Recenzia* pe care am făcut-o în *Gazeta Matematică*, Anul XL (1934—1935) cărţii lui MAURICE LECAT: „*Erreurs de mathématiciens des origines à nos jours*" am arătat că, în afară de GALOIS, care a murit la etatea de 21 ani însă, nu există matematician cu „*Casier vièrge*". Printre cei „*Greşiţi*" figurează numele lui ABEL, CAUCHY, CAYLEY, CHASLES, DESCARTES, EULER, FERMAT, GALILEO, GAUSS, HERMITE, JACOBI, LAGRANGE, LAPLACE, LEIBNIZ, NEWTON, POINCARÉ, SYLVESTER, şi alţi mulţi!

Isvoarele de erori sunt numeroase: lipsă de atenţie la calcule sau demonstraţii, graba de a publica manuscrisele înainte de a le revizui, distraţia la pregătirea lucrărilor, preocuparea de alte griji în timpul studiilor. Peste toate acestea vin uneori şi erorile de tipar. Erorile nu au consecinţe funeste şi pot aştepta să fie descoperite şi corectate. Nu e ca la inginerie, undé ele pot avea consecinţe funeste, şi de aceea legile cer azi ca un calcul tecnic să fie verificat de o altă persoană înainte de a se începe executarea unei lucrări. De aci însă nu rezultă că erorile matematicianilor nu trebuesc semnalate.

Cu ocazia semnalării se petrec deseori polemici care nu au ce căuta în matematici. După cum a spus VIÈTE, în chestiuni de matematici discursurile oratorilor şi pledoariile avocaţilor nu au nici o valoare. Totuşi, uneori se întrece măsura în răspunsurile care se dau unor *„greşiţi"*. Aşa de exemplu, în Revista *L'Intermédiaire des mathématiciens*, în 1905, Vol. XII, pag. 50, CRUT pune chestiunea:

„Il paraît manifeste que, dans tout quadrilatère inscriptible, la longueur de la diagonale extérieure est plus grande que la somme des deux diagonales intérieurs.

J'en voudrais une démonstration géométrique rigoureuse.

La pag. 167, MILÈSE dă răspunsul:

Si dans le quadrilatère ABC, *les côtés* AB, CD *se coupent en* E, *et* AD, BC, *en* F, *et si l'on suppose que* B *et* D *se rapprochent indéfiniment de* C, *à la limite* (AB + BD) *tend vers* AC, *et* EF *vers* O. *Donc, la propriété, qui paraissait manifeste, est inéxacte.*

Şi la *Gazeta Matematică* se primesc asemenea tratamente pentru cei ce greşesc, însă nu li se dă de regulă curs. Noi primim cu plăcere orice semnalări de erori strecurate şi rectificări şi este mai bine ca ele să se facă de cititorii *Gezetei Matematice* decât de terţe persoane. De aceea, dăm precădere articolelor şi notelor de această natură. In această privinţă încă dela începutul secolului actual am admis întru totul părerile foştilor Directori ai Revistei menţionată mai sus, C. LAISANT şi E. LEMOINE, publicate în Anul VI (1899), pag. 41 pe care le reproducem aci, şi cu aceasta încheiu acest articol extramatematic".

„Nous avons, en outre, reçu plusieurs observations, quelques-unes fort vives, au sujet de cette question 1243. Nous ne saurions désormais en insérer aucune, les réponses déjà publiées permettant à tous les lecteurs de se faire une opinion en connaissance de cause. Mais il nous paraît nécessaire de profiter de cette ocasion pour rappeler que *l'Intermédiaire* est destiné, non pas *exclusivement* aux savants de premier ordre, mais aussi aux travailleurs plus modestes qui pourraient être heureux d'éclaircissements donnés par les premiers ; en matière mathématique, on peut toujours arriver à faire prévaloir ce qu'on croit être la vérité sans se départir du plus grand calme. Le droit à l'erreur est le premier de tous dans le domaine de la Science, montrer à quelqu'un qu'il se trompe est beucoup plus efficace que de se fâcher contre lui; et il est arrivé aux plus illustres de se tromper quelquefois.

Quant au reproche d'ignorance, que nous entendons parfois adresser à certains de nos collaborateurs, il faudrait pour arriver à comprendre: 1° que les mathématiciens les plus éminents eux-même sont ignorants de questions spéciales sur lesquelles leurs études n'ont pas porté; 2° que d'une façon générale l'ignorance humaine est considérable, quand on compare le peu de vérités que nous connaissons à l'immensité de celles qui nous chappent. Et cela devrait inspirer un peu d'indulgence, surtout quand il s'agit d'un recueil tel que le nôtre, où des questions parfois bien élémentaires ont trouvé leur place à côté de problèmes relevant des plus hautes branches de la Science. Cela ne nous a pas empêché de poursuivre notre but, et nous sommes en droit de nous féliciter des résultats obtenus; grâce à ce journal, qui n'en tire nulle vanité, la question des Congrès internationaux a été discuté, et elle a pu aboutir; grâce à lui, des mémoires intéressants, de Notes nombreuses, ont paru dans d'importants recueils ou dans *Compte rendu de l'Académie des Sciences* (pour parler de la France seulement) sur des sujets, dont l'idée première avait été prise dans nos questions ou dans nos réponses.

C'est pourquoi nous persistérons résolument dans notre métode, accueillant le plus libéralement possible les Communications".

I. IONESCU.

PHILIPP MELANCHTON ŞI MATEMATICILE

PHILIPP MELANCHTON (1497—1560), — cu numele adevărat SCHWARTZERD, — prieten şi aderent al lui LUTHER, doctrinar al protestantismului, a fost şi un vestit profesor şi umanist. Se poate spune chiar că a fost unul din cei mai mari profesori ai Germaniei, numit de contemporani şi recunoscut de posteritate ca *„praeceptor Germaniae"*. Una din preocupările lui de căpetenie era promovarea ştiinţelor în universităţile germane. Nu este ştiinţă care să nu-l înşire printre protagoniştii ei, fiindcă vastele lui cunoştinţe le cuprindea pe toate şi grija lui protectoare se extindea asupra tuturora.

In istoria matematicilor din veacul al XVI-lea, MELANCHTON ocupă un loc de onoare fiindcă, deşi nu a fost matematician, a contribuit ca puţini alţii la propăşirea acestor ştiinţe. Nu numai la Wittenberg, unde a fost profesor dela 1518 până la moartea sa întâmplată la 1560, ci şi la celelalte Universităţi protestante, unde influenţa sa personală era hotărîtoare, a folosit toate mijloacele pentru ca matematicile să obţină locul ce li se cuvine în învăţământ.

Astfel, a intervenit ca la Wittenberg, la fel ca la universitatea din Viena, să se creeze o a doua catedră de matematici, catedră ce o încredinţă lui RHETICUS [1]), pe atunci în etate de abia 23 de ani. A dat programe pentru învăţământul matematicilor, a scos manuale de matematici şi a ajutat şi pe alţii, printre care pe M. STIFEL [2]), să scoată astfel de manuale, scriind el însuşi prefeţele la aceste cărţi. Atât în prefeţe, cât şi în vestitele sale „*declamaţii*" a insistat asupra utilităţii învăţământului matematicilor, nu numai pentru viaţa de toate zilele, ci şi pentru cultura minţii şi a sufletului. „*Declamaţiile*" erau discursuri festive ţinute la diverse ocaziuni, ca deschiderea solemnă a unui an şcolar, etc. O astfel de „*declamaţie*" a fost cetită de însuşi MELANCHTON despre REGIOMONTANUS [3]), o alta scrisă tot de el a fost cetită de RHETICUS în ziua de 5 Ianuarie 1537, ca lecţie de deschidere.

Cetind „*declamaţiile*" şi prefeţele lui MELANCHTON aflăm păreri foarte avansate şi pline de actualitate. Dar dăm şi peste observaţii şi îndemnuri care ne fac să zâmbim. Astfel în „*declamaţia*" cetită de RHETICUS aflăm următorul program pentru învăţământul matematicei la Universitatea din Wittenberg: „*Inceputurile aritmeticei, adunarea şi scăderea sunt absolut necesare aplicaţiei zilnice şi atât de uşoare încât elevii le pot învăţa uşor; regulele înmulţirii şi împărţirii cer desigur mai multă atenţie, dar cu puţin efort pot fi înţelese curând*". Afirmaţia aceasta însă e uşor de explicat dacă ne gândim că pe atunci matematicile începeau a fi studiate abia la Universitate. Se poate chiar spune că prin activitatea sa MELANCHTON a fost printre cei dintâi întemeietori şi îndrumători ai învăţământului matematicilor în Germania.

*

Intâmplător mi-au căzut în mână patru manuale de matematici editate de MELANCHTON şi colaboratorii lui. La toate patru

1) GEORG JOACHIM RHETICUS (1514—1576) profesor de matematici la Wittenberg şi aderent al ideilor lui COPERNIC, s'a îngrijit de tipărirea operei acestuia.

2) MICHAEL STIFEL (1486—1567) călugăr augustinian, apoi adept al lui LUTHER, a scris „*Arithmetica integra*" apărută la 1544 cu prefaţa lui MELANCHTON.

3) IOANNES REGIOMONTANUS (1436—1476) cu numele adevărat JOHANN MÜLLER, elev şi pe urmă colaborator al lui FEUERBACH la traducerea „*Almagestei*" lui PTOLEMEU. A fost profesor la Universitatea din Viena.

prefețele au fost scrise de el și datează din anii 1531—1538. Le rezum în cele ce urmează, deoarece sunt foarte puțin cunoscute și cuprind multe idei interesante, care reoglindesc felul de a vedea al acestui vestit profesor dându-ne detalii prețioase și asupra matematicienilor cu care era în relații.

Prima prefață a fost scrisă în 1531 la tratatul „*De Sphaera*“ al lui SACROBOSCO [1]) și e dedicată lui SYMON GRYNAEUS [2]). Ideile desvoltate aici de MELANCHTON sunt următoarele:

„In orice știință au un rol important *Elementele* introductive, fiindcă ele pregătesc pe elevi pentru aprofundarea ei. De aceea trebue să fim recunoscători acelora care au scris *Elementele* astronomiei și cosmografiei, nu numai din cauza importanței acestor științe, ci și din cauza dificultăților unei astfel de lucrări, care cere multă iscusință și prudență“. „*Din acest motiv mi-a plăcut totdeauna minunata carte a lui* JOANNES DE SACROBUSTO, *care mi se pare că a alcătuit* Elementele *cele mai potrivite de acest gen și am văzut în Gimnazii de multe ori oameni foarte învățați, cari în unanimitate preferau această carte altora de același fel, și doreau ca ea să se găsească în toate școlile și să treacă prin toate mâinile,... această carte se cetește de multe secole cu aprobarea tuturor doctorilor*“. CANTOR susține că elogiul lui MELANCHTON este exagerat fiindcă manualul nu e decât o compilație după „*Almagesta*“ și unele astronomii arabe.

Trecând la folosul astronomiei ne dă următorul pasaj de un rar entusiasm: „*Cine poate fi atât de indiferent, atât de nesimțit, ca privind vre-o dată cerul și observând pe el minunatele lumini și succesiunile atât de variate cu care se efectuiază mișcările, să nu dorească a cunoaște legile acelor mișcări, adică ordinea sigură manifestată de voința divină? Căci corpuri atât de diferite și situate la distanțe atât de mari nu ar fi cercetate și pătrunse de*

---

1) JOANNES DE SACROBOSCO sau SACROBUSTO (mort în 1246), cu adevăratul nume JOHN DE HOLYWOOD, matematician englez; a fost profesor la Paris, unde a predat astronomia și matematicile. Tratatul său «*De Sphaera*» s'a tipărit mai întâi în 1526.

2) SYMON GRYNAEUS (mort în 1541) a fost profesor de teologie la Bâle, unde în 1533 a scos cea dintâi ediție în limba greacă a *Elementelor* lui EUCLID, împreună cu *Comentariile* lui PROCLUS, iar la 1538 prima ediție grecească a *Almagestei* lui PTOLEMEU.

agerimea minții omenești, dacă Dumnezeu nu ar fi stimulat și îndemnat sârguința unor oameni de valoare. Așa dar fiindcă natura conduce pe oameni la aceste științe, trebue considerați ca lipsiți de minte acei care nu se impresionează de frumusețea acelor lucruri și de farmecul cunoștinții. Și foarte bine spune PLATON, *că omului i s'au dat ochi în vederea astronomiei. El voia anume să arate că în întreaga natură nimic nu e mai frumos decât acele lumini cerești și oamenii sunt seduși de natură îndeosebi ca să se delecteze de această frumuseță. Căci după cum pe cer luceşte soarele, tot astfel și în om, pe care din cauza mai multor asemănări l'au numit „microcosmos" sunt ascunse anumite lumini întocmai ca stelele. Prin urmare cei care disprețuesc acele lumini înrudite nu știu să aprecieze opera naturii și de aceea merită să li se scoată ochii, fiindcă nu vreau să-i folosească în scopul pentru care îndeosebi au fost creați, mai ales că acea cunoștință ne aduce aminte de Dumnezeu și nemurirea noastră. Căci nu se poate ca mintea omenească să nu constate că trebue să existe o minte oarecare, ce dirijează și guvernează toate, dacă observă acele mișcări invariabile și legile marilor orbite și ale stelelor. Căci într'un astfel de caz nimic nu poate exista sau dura printr'o altă putere lipsită de inteligență"*. Recunoaștem aici argumentul de totdeauna al teologilor.

După ce insistă asupra importanței astronomiei pentru religie și viața de stat, căci fără ea viața omenească s'ar degrada la una animală, elogiază din nou pe autorii manualelor de astronomie care au reînviat studiul acestei științe. *„Și în acest domeniu se cuvine să-i acoperim pe aceștia cu laude, fiindcă această doctrină, după ce câteva secole nu i s'a dat nici o atenție, nu de mult a reînflorit în Germania, datorită celor doi bărbați iluștrii* PURBACH [1]) *și* REGIOMONTANUS, *dintre care unul e din Nürnberg, iar celălalt s'a născut în apropierea Franței. Insuși acest fapt ne arată că acești eroi au fost îndemnați să cultive aceste științe de către o putere divină deosebită. In adevăr când au mai avut atâta strălucire aceste studii după ce s'au stâns în Egipt? Căci, deși Arabii*

1) GEORG PEURBACH sau PURBACH (1423—1461), a fost profesor la Universitatea din Viena, unde a format o vestită școală de matematică. A avut ca elev și pe REGIOMONTANUS. Aritmetica lui a apărut la 1511 sub titlul «*Opus algorismi jocundissimum*».

au invadat cu mare forță terenul părăsit de Greci, astfel că au răspândit aceste științe în apus până în Spania, totuși scrierile lor arată că această națiune ciudată nu s'a ocupat într'atâta cu observarea mișcărilor, cât cu prezicerile de care erau atât de ahtiați încât nefiind mulțumiți de Astrologia *lui* PTOLEMEU, *care se poate considera ca o parte a fizicei, s'au ocupat și cu sorții și alte genuri de preziceri.*

Compatrioții noștri însă au redus întreg studiul la partea cea mai importantă a doctrinei, au corectat demonstrațiile mai obscure ale lui PTOLEMEU *și le-au publicat, și pentru a transmite posterității arta ne-au instruit prin mijlocirea diverselor feluri de comentarii. Cei vechi laudă porumbul lui* ARCHYTAS *și diferitele opere ale lui* ARCHIMEDE, *dar cu mult mai vrednic de admirat este acel* „Libellus Theoreticarum" *al lui* PURBACH, *care cuprinzând esențialul operei prolixe a lui* PTOLEMEU, *ne înfățișează orânduirea lumilor. Ce să spun despre celelalte opere, despre întreaga epitome, despre tabele, în care a arătat profesorilor modul de procedare pentru însușirea artei".*

Restul acestei prefețe, destul de lungă de altfel, e mai puțin interesant deoarece polemizează cu teologii epicurieni, admițând împotriva lor posibilitatea prezicerilor și arătând că acelea nu sunt în contrazicere cu Sf. Scriptură. Fie de ajuns să menționăm că după MELANCHTON *„eclipsele au avut totdeauna consecințe triste"*, acest fapt fiind admis de mai multe secole, astfel că nu e bine ca *„un om instruit să nu fie de acord cu consimțământul atâtor veacuri"*. Sfârșește adresându-se lui GRINAEUS, căruia i-a adresat această prefață deoarece *„menționarea acestor științe îmi reamintește totdeauna de tine, lucru de care e martor preavrednicul bărbat* IACOB MILICHIUS[1]), *care predând aici aceste științe, discutăm mult împreună supra lor, amintindu-te adesea în aceste discuții"*. Cuvinte care dovedesc preocuparea continuă a lui MELANCHTON față de științe.

(Va urma) VICTOR MARIAN.

1) IACOB MILICHIUS (1501—1559) profesor de filozofie la Wittenberg, a ținut primele cursuri de matematică la acea Universitate.

CALCULUL VECTORIAL

(Urmare dela pag. 345)

Cazul c: Produsul Vectorial.

Prin definiţie, produsul vectorial se exprimă în felul următor:

$$[\mathcal{A}\,\mathcal{B}] = AB \sin\alpha \bar{n}$$

în care vectorul unitar $\bar{n}$ perpendicular pe planul format de $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ are sensul indicat de regula tirbuşonului (în sistemul cartesian drept) sau un sens opus (în sistemul cartesian stâng). Sensul de rotaţie e format, punând vectorul $\mathcal{B}$ la vârful vectorului $\mathcal{A}$. Vezi Fig. 17.

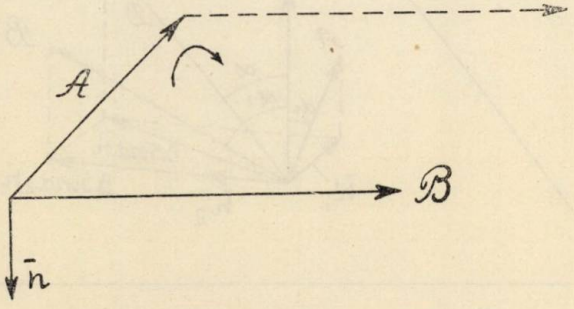


Fig. 17. Fixarea în spaţiu a vectorului $\bar{n}$.

Mărimea AB sinα reprezintă grafic suprafaţa paralelogramului format de vectorii $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$. Parantezele [ ] ne indică că se efectuează produsul vectorial. Pentru determinarea produsului vectorial e necesar să se cunoască cinci scalare şi anume: A, B, α şi două pentru poziţia vectorului unitar $\bar{n}$. Pe de altă parte mai rezultă, că prin cunoaşterea vectorului $\bar{n}$ se cunoaşte şi planul în care au loc cei doi vectori, dacă bine înţeles se dă punctul în spaţiu de unde pornesc cei doi vectori.

Poziţia relativă a celor 2 vectori e deasemenea fixată, de îndată ce se cunoaşte $\bar{n}$, datorit aplicării regulei tirbuşonului.

Legea comutaţiei nu e valabilă.

Avem: $[\mathcal{A}\,\mathcal{B}] = -[\mathcal{B}\,\mathcal{A}]$.

Legea asociației nu se poate aplica.

Formând: $\mathfrak{A}\,[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]$ se vede ușor, că expresia nu ne indică nimic; pentruca ea să aibă un sens, va trebui complectată fie în felul: $(\mathfrak{A}\,[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}])$ sau în felul $[\mathfrak{A}\,[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]]$ după cum vom vedea mai târziu.

Legea distribuției e valabilă.

Avem: $$[\{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\}\,\mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}] + [\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}] = [\mathfrak{D}\,\mathfrak{C}]$$

sau:

$$A\,.\,C\,.\,\sin\alpha_1\,\bar{n}_1 + BC\sin\alpha_2\,\bar{n}_2 = DC\sin\alpha\,\bar{n}$$

în care: $$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=\mathfrak{D}.$$

Egalitatea de mai sus se verifică ușor privind figura 18.

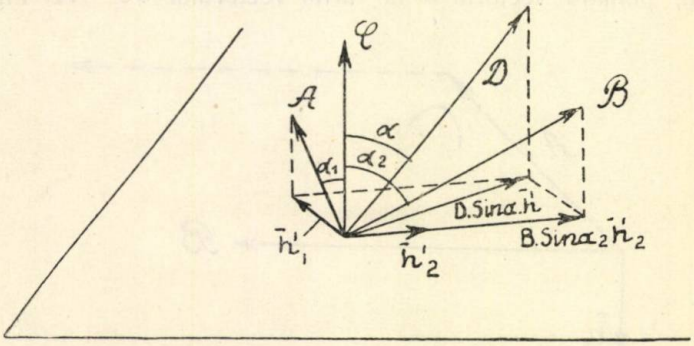


Fig. 18. Formarea produsului vectorial.
$[\{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\}\,\mathfrak{C}] = [\mathfrak{D}\,\mathfrak{C}]$.

Ținând seama, că suma proiecțiilor vectorilor $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ pe planul perpendicular pe $\mathfrak{C}$ e egală cu proiecția vectorului rezultant $\mathfrak{D}$, adică:

$$A\sin\alpha_1\,\bar{n}'_1 + B\sin\alpha_2\,\bar{n}'_2 = D\sin\alpha\,\bar{n}'$$

obținem:

$$AC\sin\alpha_1\,\bar{n}_1 + BC\sin\alpha_2\,\bar{n}_2 = DC\sin\alpha\,\bar{n}$$

în care $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$, $\bar{n}$ sunt rotiți cu 90° față de $\bar{n}'_1\,\bar{n}'_2\,\bar{n}'$ în sensul corespunzător aplicării regulei tirbușonului.

Așa dar paralelogramul de pe plan format de vectorii $A\sin\alpha_1\,\bar{n}'_1$, $B\sin\alpha_2\,\bar{n}'_2$ și $D\sin\alpha\,\bar{n}'$ e rotit cu 90° și valorile numerice ai celor trei vectori se înmulțesc cu C.

Produsul vectorial se mai poate exprima simbolic și în felul următor:

$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] = \underline{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}\,\underline{\mathfrak{B}}.$$

In cazul: $\underline{\mathcal{A}\,\mathcal{B}}$ înseamă că proiecția lui $\mathcal{B}$ pe planul perpendicular pe $\mathcal{A}$ se înmulțește cu scalara A și se rotește după sensul

Sensul corespunde regulei tirbușonului.

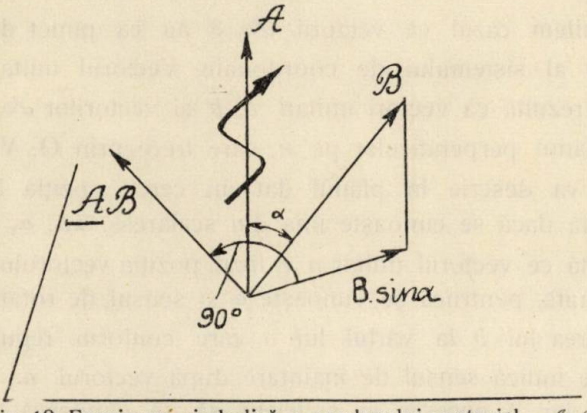


Fig. 19. Exprimare simbolică a produsului vectorial: $\underline{\mathcal{A}\,\mathcal{B}}$.

lui $\mathcal{A}$ cu 90° aplicând regula tirbușonului. (Vezi Fig. 19) și în cazul: $\underline{\mathcal{A}\,\mathcal{B}}$ proiecția lui $\mathcal{A}$ de pe planul perpendicular pe $\mathcal{B}$ se

Sensul corespunde invers regulei tirbușonului.

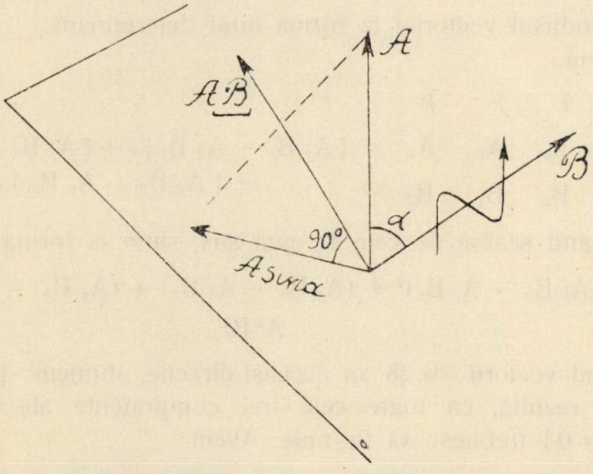


Fig. 20. Exprimare simbolică a produsului vectorial: $\underline{\mathcal{A}\,\mathcal{B}}$.

înmulțește cu scalara B și se rotește invers sensului indicat de regula tirbușonului. (Vezi Fig. 20).

Să ne punem următoarea problemă: Dându-se scalarele A, B, α precum şi poziţia vectorului unitar $\bar{n}$ se întreabă câte scalare mai sunt necesare pentru determinarea vectorilor $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ în spaţiu?

Admitem cazul că vectorii $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ au ca punct de pornire centrul O al sistemului de coordonate. Vectorul unitar $\bar{n}$ fiind cunoscut, rezultă că vectori unitari $\bar{a}$, $\bar{b}$ ai vectorilor $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ se vor găsi în planul perpendicular pe $\bar{n}$, care trece prin O. Vârful vectorului $\bar{a}$ va descrie în planul dat un cerc; poziţia lui e deci determinată dacă se cunoaşte una din scalarele: α_x, α_y, α_z.

Odată ce vectorul unitar $\bar{a}$ e fixat, poziţia vectorului unitar $\bar{b}$ e determinată, pentrucă se cunoaşte α şi sensul de rotaţie, indicat prin punerea lui $\bar{b}$ la vârful lui $\bar{a}$ care conform regulei tirbuşonului ne indică sensul de înaintare după vectorul $\bar{n}$.

Aşa dar e necesar şi suficient să se cunoască o singură scalară pentru determinarea poziţiei în spaţiu a vectorilor $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$.

Când vectorii: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ se reprezint prin vectorii unitari ortogonali de direcţie constantă: i, j, k

$$\mathfrak{A} = A_x\, i + A_y\, j + A_z\, k \quad ; \quad \mathfrak{B} = B_x\, i + B_y\, j + B_z\, k = i$$

atunci produsul vectorial ia forma unui determinant.

Avem:

$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \{A_y B_z - A_z B_y\}\, i + \{A_z B_x - A_x B_z\}\, j + \{A_x B_y - A_y B_x\}\, k.$$

Ţinând seamă de cele de mai sus, $\sin^2\alpha$ ia forma:

$$\sin^2\alpha = \frac{(A_y B_z - A_z B_y)^2 + (A_z B_x - A_x B_z) + (A_x B_y - A_y B_x)^2}{A^2 B^2}.$$

Când vectorii $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ au aceeaşi direcţie, obţinem: $[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] = 0$ de unde rezultă, că toate cele trei componente ale vectorului $\{[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] = 0\}$ trebuesc să fie nule. Avem:

$$A_y B_z - A_z B_y = 0 \quad ; \quad A_z B_x - A_x B_z = 0 \quad ; \quad A_x B_y - A_y B_x = 0$$

sau

$$\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}.$$

Formând expresiile: $i = [jk]$, $j = [ki]$, $k = [ij]$ ele ne arată că: i, j, k sunt vectori unitari ortogonali. De îndată ce vectorii unitari: i, j, k sunt fixaţi la un sistem de coordonate, atunci se poate şti dacă acel sistem e drept sau stâng.

Caracterul polar şi axial al vectorilor

Dacă prin schimbarea sensului pozitiv al axelor sistemului de coordonate, vectorul îşi schimbă semnul spre exemplu: din plus

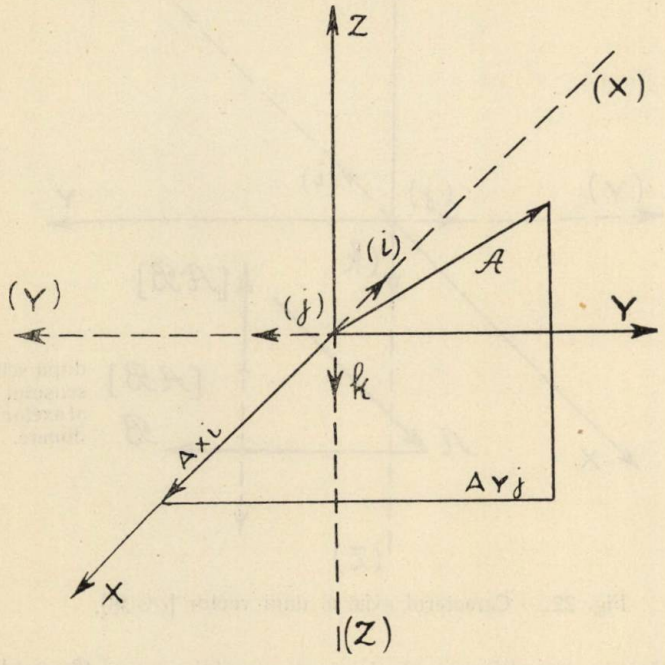


Fig. 21. — Caracterul polar al unui vector.

în minus zicem că vectorul e polar, dacă nu, vectorul e denumit axial. In figura 21 se poate uşor vedea că faţă de noile axe (liniile punctate) după care se fixează noii vectori unitari $(i)\,(j)\,(k)$, componentele vectorului $\mathcal{A}$ vor apare în forma $-A_x\,i$, $-A_y\,j$, $-A_z\,k$ şi deci vectorul $\mathcal{A}$ obţine semnul minus.

Vectorul $[\mathcal{A}\,\mathcal{B}]$ e axial, când $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ sunt vectori polari. Când se schimbă sensul pozitiv al axelor sistemului de coordonate ştim că acel sistem devine spre exemplu din drept, stâng, cum e cazul din figura 22.

Ca urmare aplicând regula inversă a tirbuşonului (valabilă pentru sistemul stâng) vectorul $[\mathcal{A}\,\mathcal{B}]$ va fi dirijat în jos adică în sensul pozitiv a noii axe (z).

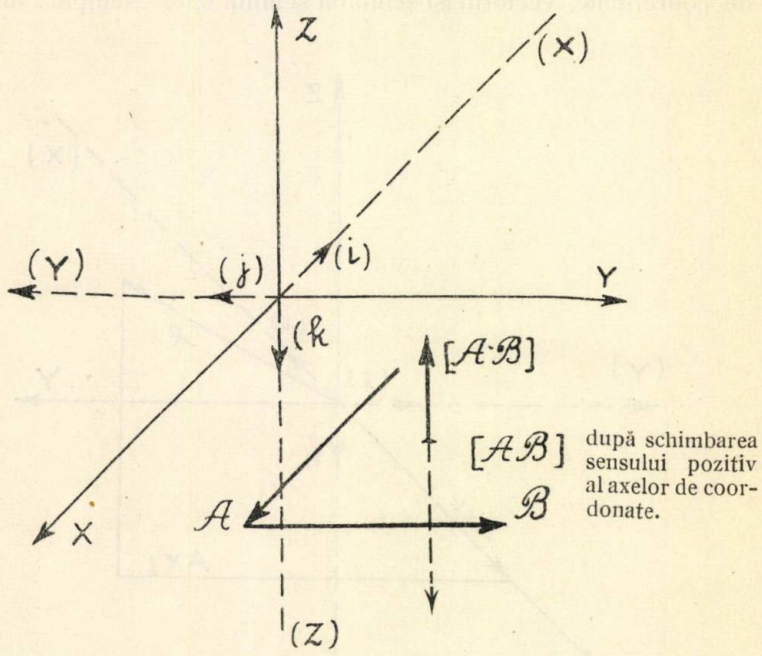


Fig. 22. — Caracterul axial al unui vector $[\mathcal{A}\,\mathcal{B}]$.

Pentru simplificare s'a luat $\mathcal{A}$ paralel cu x şi $\mathcal{B}$ paralel cu y. In cazul sistemului drept avem:

$$[A_x\, i\,.\,B_y\, j] = A_x\, B_y\,.\, k \qquad \text{(dirijat în sus)}$$

şi în cazul sistemului stâng obţinem:

$$[-A_x\, i\,.\,-B_y\, j] = A_x\, B_y\, k \qquad \text{(dirijat în jos).}$$

Prin introducerea caracterului de vector polar şi axial putem forma următoarele şase cazuri:

Produs scalar

a) a doi vectori polari de unde rezultă o scalară ①.

b) al unui vector polar cu unul axial de unde rezultă o pseudo-scalară ③.

c) al unui vector axial cu unul axial de unde rezultă o scalară ⑤.

Produs vectorial

d) a doi vectori polari de unde rezultă un vector axial ②.

e) al unui vector polar cu unul axial de unde rezultă un vector polar ④.

f) al unui vector axial cu unul axial de unde rezultă un vector axial ⑥.

Cazurile ① și ② sunt deja cunoscute.

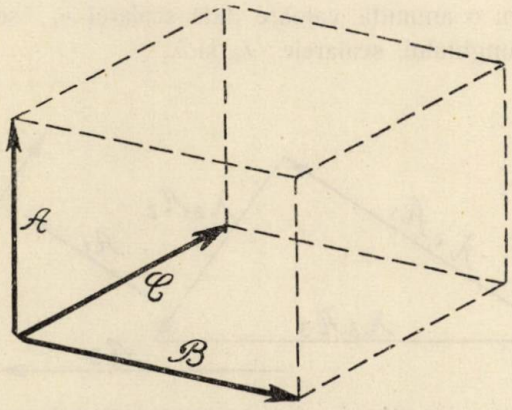


Fig. 23. — Reprezentarea grafică a pseudoscalarei: $(\mathfrak{A}\,[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}])$.

Trecem la cazul ③

Se obține:

$$(\mathfrak{A}\,[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]) = (\mathfrak{B}\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}]) = (\mathfrak{C}\,[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]).$$

Mărimea de mai sus reprezintă o pseudoscalară, adică o scalară care își schimbă semnul cu schimbarea sensului pozitiv al axelor de coordonate.

Pseudoscalara reprezintă grafic volumul paralelipipedului format de vectorii: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. Vezi fig. 23.

Când vectorii: $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sunt exprimați cu ajutorul vectorilor unitari: i, j, k, pseudoscalara $(\mathcal{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}])$ ia forma unui determinant:

$$(\mathcal{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

Ca aplicații considerăm pe următoarele:

Egalitatea $(\mathcal{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]) = 0$ ne arată că vectorii $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sunt complanari.

De altfel și egalitatea $\lambda_1 \mathcal{A} + \lambda_2 \mathfrak{B} + \lambda_3 \mathfrak{C} = 0$ ne arată că vectorii $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sunt complanari. Spre exemplu din fig. 24 reese că ținând seama de poziția vectorilor, avem $\lambda_1 > 0 . \lambda_2 < 0$ și $\lambda_3 < 0$. Admitem că vectorii $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sunt cunoscuți; în cazul acesta, pentru o anumită valoare dată scalarei λ_1, se deduc, din formarea triunghiului, scalarele: λ_2 și λ_3.

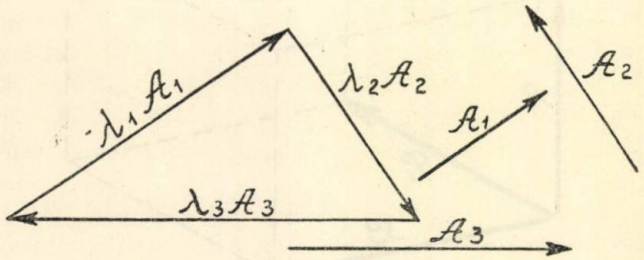


Fig. 24. $\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3$ sunt complanari.

Egalitățile:

$$(i\,[j\,k]) = (j\,[k\,i]) = (k\,[i\,j]) = 1$$

ne arată că vectorii: i, j, k, sunt unitari și ortogonali.

(Va urma)

DR. ING. PLAUTIUS ANDRONESCU
Profesor la Școala Politechnică din Timișoara.

PREMIUL „INGINER AL. ROȘU“

Subsemnații membri în Comisiunea pentru decernarea premiului „ING. AL. ROȘU“ cercetând volumul XLV al *Gazetei Matematice* pentru alegerea celui mai harnic corespondent de liceu, am constatat următoarele:

Premiantul anului trecut D-l MIRCEA D. POPA, elev în clasa VIII-a la Liceul Militar din Iași ne-a dovedit că alegerea D-sale din grupul corespondenților *Gazetei* a fost fericit făcută, întrucât și în cursul volumului XLV D-sa a fost dela distanță cel mai harnic elev de liceu rezolvitor de probleme și i s'ar cuveni cu prisosință și anul acesta premiul „ING. AL. ROȘU“.

Totuși pentru răsplătirea acelor corespondenți ai *Gazetei* care dacă nu au putut egala cu D-l MIRCEA POPA s'au întrecut în a rezolva probleme dintre cele mai grele, dovedind că nu urmăresc numai figurarea în *Gazetă* cu un număr mare de probleme rezolvate și urmăresc și atacarea acelor probleme de o anumită greutate, alegerea noastră din anul acesta s'a făcut în persoana D-lui PANTELIMON V. CONSTANTIN, elev în clasa VIII-a la Liceul Militar General Macarovici din Iași.

D-l PANTELIMON V. CONSTANTIN pe lângă faptul că a rezolvat un număr apreciabil de probleme, fiind trecut pe copertele anului XLV cu 60 probleme rezolvate și în cuprinsul volumului XLV cu 23 probleme rezolvate publicate figurând astfel imediat după D-l MIRCEA POPA. Ca activitate desfășurată, a căutat să se ocupe mai ales de acele probleme dificile pentru care nu mulți corespondenți au găsit soluțiuni.

Astfel sunt problemele 4398, 4883, 4956, 5201, 5310 la care figurează numai cu câte un singur rezolvitor, iar problemele 5065, 5066, 5210, 5266 fiind rezolvate cu multă îngrijire.

Având în vedere că D-l PANTELIMON V. CONSTANTIN, lucrează la *Gazeta Matematică* încă din anul XLII, desfășurând continuu o activitate bogată, propunem ca premiul „ING. ALEXANDRU ROȘU“ pentru anul XLV să se acorde D-lui PANTELIMON V. CONSTANTIN, elev clasa VIII-a la Liceul Militar din Iași.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „ING. AL. ROȘU“

GH. I. DUMITRESCU, AL. AL. ROȘU, D. STOICA.

Citit în Adunarea Generală din 20 Februarie 1941. Adunarea aprobă ca în conformitate cu statutele, să se acorde premiul D-lui MIRCEA D. POPA.

NOTE MATEMATICE

36. *Terminologia Ştiinţifică Românească.* Academia Română a tipărit o broşură de 7 pagini cu norme pentru nomenclatura matematică şi fizică românească.

Iată un rezumat pentru termenii matematici.

Se va întrebuinţa terminaţiune *ie* în loc de *iune* la cuvinte ca *direcţie, expresie, fracţie, funcţie.* Se exceptează *acţiune, inversiune.* Se va putea zice indiferent *reacţie* sau *reacţiune.* La *impulsiune* se va zice *impuls.*

Nu se va pune *h* înainte de *iperbolă, ipotenuză, ipoteză, omolog* ci numai la cuvintele ce derivă din *hecto, hidro, helio.*

Se va zice după voie *iuţeală* sau *viteză*; nu însă *celeritate, repeziciune.*

Se va zice *forţă* produsului unei *mase* prin *acceleraţie.* Produsului dintre o forţă şi deplasarea punctului ei de aplicaţie pe direcţia forţei se va numi *lucru* sau *lucru mecanic,* iar acesta raportat la unitatea de timp este *putere* iar nu *putinţă.*

La cuvintele *algebră* şi *formulă* accentul va fi pe silaba penultimă, iar la *conică* pe prima silabă.

Se va zice la feminin *axă, problemă, teoremă* iar nu la masculin *ax, problem, teorem.*

Pentru plural se va zice *arce* în geometrie şi *arcuri* la mecanisme, *plane* în geometrie şi planuri la proiecte, desemne; *sinusuri, cosinusuri, corpuri, cupluri, diametre, intervale, poli, metri* pentru măsuri şi *metre* pentru aparate de măsură.

Cuvintele *greutate* sau *gravitate* se pot întrebuinţa după voie.

Terminaţiune *triţă, trice* se va înlocui cu *toare* ca la *bisectoare, directoare, generatoare.* Se va menţine însă cuvântul *matrice.*

Cuvintelor *bilion, trilion,* etc. li se dau sensul german adică 10^{12}, 10^{18}, etc. *Miliardul* rămâne cu sensul actual 10^{9}.

Se vor întrebuinţa cuvintele *cifră* (nu ţifră), *centezimal* (nu centizimal), *complement, complementar* (nu compliment, complimentar), *desen, desenare (desemnare* rămâind numai cu sensul de *indicare); diferenţiere,* (nu diferenţiare); *ecuaţie* (nu ecvaţie sau equaţie); *ecuator* (nu ecvator sau equator); *liniar* (nu linear); *masă, mase* (nu massă, masse); *metodă* (nu metoadă); *parcurge* (nu percurge); *parenteză* (nu paranteză sau parantez); *proiect* (nu proect); *traiectorie* (nu traectorie sau trajectorie).

Academia are în pregătire şi un dicţionar de termenii matematici.

I. I.

37. *Numere interesante cu 10 cifre diferite* [1]). Pentru N_6 începând cu 4 am găsit următoarele 163 soluţiuni ale ecuaţiei

$$6 \times N_6 = N$$

unde N_6 conţine 9 cifre diferite între ele şi diferite de 6, iar N este un număr de 10 cifre diferite.

N_6	N	N_6	N
401 527 893	2 409 167 358	419 507 823	2 517 046 938
402 789 315	2 416 735 890	419 572 830	2 517 436 980
403 289 751	2 419 738 506	419 573 280	2 517 439 680
405 178 293	2 431 069 758	419 582 730	2 517 496 380
405 179 283	2 431 075 698	421 950 783	2 531 704 698
405 179 328	2 431 075 968	423 078 195	2 538 469 170
405 182 793	2 431 096 758	423 079 851	2 538 479 106
405 279 183	2 431 675 098	423 107 985	2 538 647 910
405 279 318	2 431 675 908	423 195 078	2 539 170 468
405 281 793	2 431 690 758	423 195 780	2 539 174 680
405 291 783	2 431 750 698	427 195 083	2 563 170 498
405 317 928	2 431 907 568	427 195 830	2 563 174 980
405 329 178	2 431 975 068	427 308 195	2 563 849 170
409 517 283	2 457 103 698	427 890 153	2 567 340 918
409 517 328	2 457 103 968	427 890 315	2 567 341 890
409 518 273	2 457 109 638	427 891 503	2 567 349 018
409 521 783	2 457 130 698	427 891 530	2 567 349 180
409 523 178	2 457 139 068	427 905 183	2 567 431 098
409 527 183	2 457 163 098	427 905 318	2 567 431 908
409 527 318	2 457 163 908	428 053 179	2 568 319 074
409 528 173	2 457 169 038	428 073 195	2 568 439 170
409 531 728	2 457 190 368	428 179 053	2 569 074 318
409 532 178	2 457 193 068	428 195 073	2 569 170 438
409 532 718	2 457 196 308	428 195 730	2 569 174 380
409 732 851	2 458 397 106	428 305 179	2 569 831 074
409 851 273	2 459 107 638	428 307 195	2 569 843 170
410 973 285	2 465 839 710	429 051 783	2 574 310 698
412 730 985	2 476 385 910	429 053 178	2 574 319 068
415 027 893	2 490 167 358	429 851 073	2 579 106 438
415 278 930	2 491 673 580	429 857 301	2 579 143 806
417 805 329	2 506 831 974	429 857 310	2 579 143 860
417 829 053	2 506 974 318	430 152 789	2 580 916 734
417 830 529	2 506 983 174	430 278 915	2 581 673 490
417 905 328	2 507 431 968	430 517 829	2 583 106 974
418 053 279	2 508 319 674	430 518 279	2 583 109 674
418 279 053	2 509 674 318	430 528 179	2 583 169 074
418 305 279	2 509 831 674	430 728 195	2 584 369 170
419 507 283	2 517 043 698	430 729 851	2 584 379 106
419 507 328	2 517 043 968	430 782 195	2 584 693 170

1) Urmare la Nota dela pag. 575 Vol. XLV *Gazeta Matematică.*

N_6	N	N_6	N
430 827 195	2 584 963 170	459 023 178	2 754 139 068
431 072 985	2 586 437 910	459 027 183	2 754 163 098
431 502 789	2 589 016 734	459 027 318	2 754 163 908
431 527 890	2 589 167 340	459 028 173	2 754 169 038
431 780 529	2 590 683 174	459 031 728	2 754 190 368
431 790 528	2 590 743 168	459 032 178	2 754 193 068
431 805 279	2 590 831 674	459 032 718	2 754 196 308
431 950 728	2 591 704 368	473 285 109	2 839 710 654
432 195 078	2 593 170 468	473 285 901	2 839 715 406
432 719 580	2 596 317 480	473 285 910	2 839 715 460
432 805 179	2 596 831 074	473 290 851	2 839 745 106
432 807 195	2 596 843 170	473 291 085	2 839 746 510
432 905 178	2 597 431 068	475 032 891	2 850 197 346
450 719 283	2 704 315 698	475 328 901	2 851 973 406
450 719 328	2 704 315 968	475 328 910	2 851 973 460
450 728 193	2 704 369 158	478 903 251	2 873 419 506
450 731 928	2 704 391 568	478 910 325	2 873 461 950
450 782 193	2 704 693 158	485 072 931	2 910 437 586
450 827 193	2 704 963 158	485 079 231	2 910 475 386
451 728 309	2 710 369 854	485 091 273	2 910 547 638
451 732 809	2 710 396 854	485 107 293	2 910 643 758
451 782 309	2 710 693 854	485 127 309	2 910 763 854
451 827 309	2 710 963 854	485 729 301	2 914 375 806
452 178 309	2 713 069 854	485 729 310	2 914 375 860
452 317 809	2 713 906 854	485 792 301	2 914 753 806
452 731 809	2 716 390 854	485 792 310	2 914 753 860
452 817 309	2 716 903 854	485 901 273	2 915 407 638
453 172 809	2 719 036 854	485 912 730	2 915 476 380
453 217 809	2 719 306 854	489 012 753	2 934 076 518
453 271 809	2 719 630 854	489 027 513	2 934 165 078
457 192 830	2 743 156 980	489 127 503	2 934 765 018
457 193 280	2 743 159 680	489 127 530	2 934 765 180
457 281 930	2 743 691 580	489 130 275	2 934 781 650
457 319 280	2 743 915 680	491 273 085	2 947 638 510
457 819 230	2 746 915 380	492 307 851	2 953 847 106
457 821 930	2 746 931 580	492 310 785	2 953 864 710
458 192 730	2 749 156 380	492 850 731	2 957 104 386
458 271 930	2 749 631 580	492 851 073	2 957 106 438
459 017 283	2 754 103 698	492 857 301	2 957 143 806
459 017 328	2 754 103 968	492 857 310	2 957 143 860
459 017 823	2 754 106 938	493 072 851	2 958 437 106
459 018 273	2 754 109 638	493 107 285	2 958 643 710
459 021 783	2 754 130 698		

G-L GH. BUICLIU.

38. *Asupra conicelor înscrise unui triunghiu.* Fie ABC un triunghiu; AA′, BB′, CC′ înălţimile sale; (O) şi (O_9) cercul circumscris şi al celor 9 puncte; α, β, γ şi α', β', γ' proiecţiile ortogonale ale unui punct arbitrar P din plan pe BC, CA, AB şi AA′, BB′, CC′.

Punctul P este focarul unei conice (Σ), înscrisă triunghiului ortic A'B'C', al cărui centru ω coincide cu acela al cercului circumscris triunghiului podar al lui P în raport cu triunghiul A'B'C'. Cum laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC și înălțimile AA', BB', CC' sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului A'B'C', rezultă că *dreptele* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ $\gamma\gamma'$ *concură în centrul* ω *al conicei, de focar* P, *înscrisă triunghiului* A'B'C'. Ori, conjugatul isogonal al punctului P în triunghiul A'B'C' este simetricul P' al lui P în raport cu centrul ω al conicei (Σ). Punctele P, P' sunt puncte duble ale involuției determinată pe dreapta $P\omega$ de către perechile de laturi ale patrulaterului ABCH și deci de către conicele circumscrise acestui patrulater. P *și* P' *sunt deci punctele de contact al axei focale al conicei* (Σ) *cu hiperbolele echilatere* ABCPH *și* ABCP'H [1]).

Observațiuni. 1°. Când punctul P este pe cercul (O_9), conica (Σ) este o parabolă, cu focarul în P, înscrisă triunghiului A'B'C'; centrul ω al lui (Σ) este aruncat la infinit în direcție perpendiculară dreptei lui SIMSON al punctului P pentru triunghiul A'B'C' iar *dreptele* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ *sunt paralele.* Rezultă că *tangenta în* P *la hiperbola echilateră* ABCPH *este perpendiculară pe dreapta lui* SIMSON *a acestui punct, față de triunghiul* A'B'C'.

2°. Când P coincide cu centrul I al unuia din cercurile tritangente triunghiului ABC, dreptele $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ se taie pe dreapta OI. In adevăr, tangenta în I la hiperbola lui FEUERBACH ABCIH este chiar dreapta OI [2]), care coincide deci cu axa focală a conicei (Σ). Se deduce următoarea teoremă:

In triunghiul ABC, *înscris în cercul* O, *fie* D, E, F *punctele de contact ale unui cerc tritangent de centru* I, *cu laturile* BC, CA, AB *și* α, β, γ *proiecțiile lui* I *pe înălțimile* AA', BB', CC'; *dreapta* OI *trece prin punctul de întâlnire al dreptelor* Dα, Eβ, Fγ *și prin conjugatul isogonal al punctului* I, *în raport cu triunghiu ortic* A'B'C' *al triunghiului fundamental.*

V. THÉBAULT.

1) J. DIEUDONNÉ. *Mathésis*, 1936—230.
2) V. THÉBAULT, *Mathésis*, 1914—248.

39. *Numere perfecte pare.* Se ştie că expresiunea numerelor perfecte pare este: $2^n(2^{n+1}-1)$ unde numărul din paranteză trebue să fie prim.

Iată aici 14 numere perfecte pare:

No.	n	$2^n(2^{n+1}-1)$	Produsul
1	1	6	2×3
2	2	28	4×7
3	4	496	16×31
4	6	8128	64×127
5	12	33550336	4096×8191
6	16	8589869056	65536×131071
7	18	137438691328	262144×524287
8	28	144115187807420416	$268435456 \times 536870911$
9	30	2305843008139952128	$1073741824 \times 2147483647$
10	40	2417851639228158837784576	$1099511627776 \times 2199023255551$
11	60	2658455991569831744654692615953842176	$1152921504606846976 \times 2305843009213693951$
12		191561942608236107294793378082303638130997321548169216	
13		13164036458569648337239736045 87 2291022347231838694311778372 8128	
14		1447401115466452442794637312608598848157 36774914748358890663543491319915 2128	

Aceste valori au fost luate din: „Tables de Logarithmes“ par I. DUPUIS; „Exercices d'Arithmétiques“ par J. FITZ-PATRICK şi din „*The Mathematical Gazette*“, XXIII—255, ele mai trebuesc complectate cu produsul numerelor respective.

I. L.

40. *Asupra trisecţiunii unghiului.* Se ştie că un unghiu oarecare nu se poate împărţi în trei părţi egale prin o construcţie care să nu utilizeze decât rigla şi compasul. Explicaţia constă în faptul că liniile trigonometrice ale unui unghiu se determină în funcţie de liniile trigonometrice ale unghiului triplu printr'o ecuaţie algebrică de gradul III-lea ale cărei soluţii nu se poate exprima numai cu rădăcini pătrate. Soluţiile unei ecuaţii de gradul III-lea se pot însă găsi prin aproximaţii succesive de numere raţionale. Corespunzător acestui fapt se pot găsi construcţii grafice numai cu rigla şi compasul care să rezolve geometric problema prin aproximaţii. Una din aceste construcţii se arată în prezenta notă.

Considerăm un triunghiu echilateral OAB şi fie M mijlocul lui AB. Fie ME semidreapta exterioară triunghiului OAB care pleacă din M astfel ca $\sphericalangle AME = \alpha$ şi OE semidreapta ce pleacă din O interioară triunghiului astfel că $\sphericalangle AOE = \frac{1}{3}\alpha$. Dreapta OE întâlneşte pe AB în D. Se demonstrează uşor prin relaţii trigonometrice în triunghiurile OMD şi OME că avem: $OD = 2 . ME$ oricare ar fi unghiul α.

Iată cum procedăm la construcţie. Presupunem unghiul α dat. Construim triunghiul OAB şi dreapta ME. Luăm pe ME un punct E_1. Dreapta OE_1 întâlneşte AB în D_1, luăm $ME_2 = \frac{1}{2} OD_1$. Dreapta ME_2 întâlneşte pe AD în D_2, şi aşa mai departe. E uşor de văzut că punctele D_1, D_2,... tind în acelaşi sens, oricare ar fi punctul D_1 dela care plecăm, către punctul D care dă soluţia problemei. Pentru a avea o aproximaţie rapidă putem lua pe D_1 astfel: construim în interiorul triunghiului $\sphericalangle AOI = \alpha$. I fiind pe AB, şi luăm $AD_1 = \frac{1}{3} AI$.

Consideraţiile precedente se aplică atunci când $\alpha < 90^0$. Când $90^0 < \alpha < 180^0$ aplicăm procedeul la unghiul $180^0 - \alpha$ şi luăm apoi diferenţa dela unghiul găsit la 60^0, ceea ce se construeşte uşor.

ST. CETĂŢEANU.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine. Tome XXIII-ème, No. 1. C. BUDEANU. Sur l'encadrement mathématique des phénomènes électriques par rapport à la structure granulaire de l'électricité. S. STOILOV. Sur une extension topologique du principe du maximum du module et ses applications à la théorie des fonctions. ILIE I. POPA. Sur les réseaux plans. Bucureşti 1940.

Idem. No. 3. N. CIORANESCO. Le mouvement d'un point matériel dans un milieux résistant sous l'action d'une force centrale. N. THÉODORESCO. Géométrie Finslérienne et propagation des ondes. N. THÉODORESCO. Géodésique de longueur nulle et propagation des ondes. Bucureşti 1940.

Idem. No. 5. D. POMPEIU. Les sommes des nombres entiers. Bucureşti 1941.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXI. Nr. 1. Martie 1941. *20 ani, majoratul* de G-L GH. BUICLIU. Determinarea substituţiilor ortogonale, a căror modul este un determinant simetric de TH. ANGHELUŢĂ. Rezolvarea câtorva probleme de navigaţie costieră cu ajutorul trigonometriei patratice de CPT. C. COSTĂCHESCU.

Universidad Nacional de La Plata. Publicaciones de la Facultad de Ciencias Fisicomatematicas. No. 132, 134, 135, 136. La Plata (Argentina) 1940.

ION C. DUMITRIU. Profesor la Colegiul Naţional „Carol I" Craiova. *Exerciţii şi Probleme de Algebră Elementară pentru clasele IV, V şi VI de liceu.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită. Craiova 1941. Culegerea se adresează începătorilor în studiul algebrei elementare, compusă în general din exerciţii uşoare şi conţine şi exerciţii propuse din reviste de matematice. Unele exerciţii sunt urmate de indicaţii sau au răspunsuri. Cartea conţine 120 pagini şi o erată de aproape 2 pagini, totuşi o recomandăm cărora se adresează. Costul este 80 lei, depozit la autor şi la librăria „Ramuri" Craiova.

C. I. Ţ.

FLORICA CÂMPAN. *Note Biografice în legătură cu activitatea matematică a lui* EMANOIL BACALOGLU. (Extras din Analele Academiei Române, Memoriile Secţiuni Ştiinţifice, Seria III. Tomul VI. Mem. 4). Bucureşti.

G. MACOVEI. Profesorul G. ŢIŢEICA. Discurs de recepţiune la Academia Română. Bucureşti 1940.

ACADEMIA ROMÂNĂ. *Terminologia ştiinţifică românească.* I. *Norme şi precizări generale.* II. *Ştiinţe matematice şi fizice.* Bucureşti 1940.

N. DONICI. *Adeziunea României la Uniunea astronomică internaţională.* (Extras din Memoriile Secţiunii Ştiinţifice ale Academiei Române, Seria III, Tomul XVI. Mem. 1). Bucureşti 1940.

P. SERGESCU. *Mathématiciens français du temps de la révolution française.* Analele Academiei Române (Memoriile Secţiunii Ştiinţifice, Seria III, Tomul XVI, Mem. 11). Bucureşti 1940, 48 pp.

Acesta e titlul celei mai noi lucrări de istoria matematicilor a D-lui P. SERGESCU, profesor la Universitatea din Cluj, a cărui activitate în acest domeniu este cunoscută şi apreciată nu numai în ţară, ci şi în străinătate. Lucrarea a fost pregătită cu ocazia împlinirii unui veac şi jumătate dela marea revoluţie.

In pasajul introductiv D-l SERGESCU menţionează că „există un schimb neîntrerupt de influenţe între viaţa socială şi viaţa ştiinţifică oricât de abstractă ar fi ea, cum este aceea a matematicilor". Aceste interacţiuni se remarcă îndeosebi în epocele agitate, cum a fost revoluţia franceză.

Capitolul I se ocupă cu *„făuritorii reînoirii matematice"*. Unii dintre ei, ca J. S. BAILLY, CONDORCET, G. MONGE, L. CARNOT, VANDERMONDE, FOURIER, au luat parte activă la revoluţie, alţii, ca J. L. LAGRANGE, P. S. LAPLACE, DELAMBRE, MÉCHAIN, BORDA, PRONY, LACROIX, etc. au trăit revoluţia. In sfârşit, dela „Şcoala Politehnică" au eşit matematicieni de talia lui S. POISSON, ARAGO, BIOT, AMPÈRE, MALUS, CAUCHY, BINET, etc. Toţi sunt trecuţi în revistă în acest capitol, împreună cu activitatea lor matematică într'un mod frapant şi atrăgător.

Capitolul II ne înfăţişează noul aspect al matematicii sub influenţa revoluţiei. Locul culturii enciclopedice îl ia specializarea, activitatea ştiinţifică se deplasează dela Academii la Şcolile superioare, îndeosebi la „Şcoala Normală" şi „Şcoala Politehnică", producţia ştiinţifică" sporeşte şi odată cu ea are loc o revenire la spiritul critic şi desvoltarea punctului de vedere istoric. In acelaşi timp cercetarea matematică ia un caracter mai colectiv dând naştere la diverse societăţi matematice.

In Capitolul III se discută noile probleme impuse matematicei, ca realizarea sistemului metric, apoi noile ramuri matematice, ca geometria descriptivă a lui MONGE, geometria de poziţie a lui L. CARNOT, analiza şi teoria funcţiilor ale lui CAUCHY, geometria proiectivă a lui PONCELET, fizica matematică şi tehnică, precum şi desvoltarea algebrei.

Memoriul se încheie cu o bogată bibliografie cuprinzând detalii interesante şi puneri la punct foarte preţioase. Scrisă într'un stil curgător, broşura D-lui SERGESCU se citeşte cu multă plăcere.

In realitate ea poate fi considerată ca un *„aperçu"* asupra desvoltării matematicei franceze în veacul al XVIII-lea şi XIX-lea.

VICTOR MARIAN.

CERERI

Răspuns la Cererea Nr. 295. Anul XLV, pag. 584.

Mi se aduce la cunoştinţă existenţa unei broşuri cu istoricul cifrelor, scrisă în limba română şi intitulată:

Cifrele arabe. *Istoricul şi originea lor. Teoria formaţiunii lor. Cifrele sub imprimerie, de* GHEORGHE BAŞTURESCU. Bucureşti 1901.

I. I.

DIVERSE

a) Şedinţe.

Societatea Română de Matematici a ţinut şedinţe în 3.III şi 24.III cu următoarele comunicări:

D. POMPEIU. Asupra integralei curbilinii.

D. BARBILIAN. Metricele jordaniene şi reprezentarea conformă.

GR. MOISIL. Asupra unor clase de grupuri abeliene.

C. POPOVICI. Asupra atracţiei luminoase.

AL. GHICA. Asupra funcţiunilor quasi analitice generale.

AL. PANTAZI. Deformarea proiectivă a quadruplurilor stratificabile.

b) Sporirea Bibliotecii.

PAUL MANSION. J. J. SYLVESTER (1814—1897), 1913.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

DIM. NĂSTURAŞ. Teoria asupra dreptelor paralele şi rolului lor. Bucureşti 1905.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

R. D'ADHEMAR. Exercices et Léçons d'Analyse. Paris 1908.
DAVID EMMANUEL. Lecţiuni de teoria funcţiunilor. Bucureşti 1924.
H. LAURENT. Théorie des résidus Paris 1865.
PAUL MONTEL. Leçons sur les entieres ou méromorphes. Paris 1932.
TRAIAN LALESCU. Tratat de Geometrie Analitică. Bucureşti 1923.
N. ABRAMESCU. Lecţiuni de Geometrie Analitică. Cluj 1927.
JOSEPH CARNOY. Cours de Géometrie Analytique. Paris 1886.
M. G. DE LONGCHAMPS. Géometrie Analytique. Paris 1884.
B. NIEWENGLOWSKI. Cours de Géometrie Analytique. Tome I, II, III, IV. Paris 1926, 1929, 1926.
E. PRUVOST. Leçons de Géometrie Analytique. Paris 1886. Tome II.
A. RÉMOND. Géometrie Analitique. Paris 1887.
G. SALMON. Traité de Géometrie Analytique. Part. I, II. Paris 1882, 1903.
A. IMBER ET M. WEILL. Cours de Géometrie Analytique. Paris 1888.
E. JOUFFRET. Géometrie a quatre dimensions. Paris 1903.
KARL DOEHLEMANN. Geometrische Transformationen. Berlin 1930.
N. ABRAMESCU. Lecţiuni de geometrie pură infinitezimală. Cluj 1930.
GASTON JULIA. Eléments de Géometrie infinitésimale. Paris 1936.
G. BOULIGAND. Leçons de Geometrie Vectorielle. Paris 1924.
GASTON JULIA. Exercices d'Analyse. Paris 1928.
Donate de familia decedatei PREDUŢA D. BUNGEŢIANU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3127 [1]). *Se consideră în spațiu trei axe* D_1, D_2, D_3 *pe care se iau punctele fixe* O_1, O_2, O_3 *și punctele variabile* M_1, M_2, M_3, *astfel ca între segmentele orientate* $\overline{O_1M_1}$, $\overline{O_2M_2}$, $\overline{O_3M_3}$ *să existe relațiile*

$$\alpha_1 \overline{O_1M_1} + \alpha_2 \overline{O_2M_2} + \alpha_3 \overline{O_3M_3} = k$$
$$\alpha_1' \overline{O_1M_1} + \alpha_2' \overline{O_2M_2} + \alpha_3' \overline{O_3M_3} = k',$$

unde α_i, α_i', k *și* k' *sunt numere date.*

Să se găsească locul geometric al centrului de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$.

(Se cere o soluție geometrică sau vectorială).

D. V. IONESCU.

Să notăm *segmentele orientate* $\overline{O_1M_1}$, $\overline{O_2M_2}$, $\overline{O_3M_3}$ cu r_1, r_2, r_3. Vom admite, ceea ce corespunde de altfel sensului problemei, că ecuațiile

$$\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_3 = k$$
$$\alpha_1' r_1 + \alpha_2' r_2 + \alpha_3' r_3 = k',$$

se pot rezolva în raport cu două din variabilele r_1, r_2, r_3 presupunând a treia cunoscută.

Schimbând notația, soluția ecuațiilor de mai sus se scrie astfel

$$(1) \qquad \begin{aligned} r_1 &= a_1 + b_1 r \\ r_2 &= a_2 + b_2 r \\ r_3 &= a_3 + b_3 r \end{aligned}$$

unde a_1, a_2, a_3 și b_1, b_2, b_3 sunt numere date, iar r este un parametru arbitrar.

Acest lucru fiind precizat, vom da două soluții problemei propuse.

---

1) Enunț rectificat.

I. *Soluție vectorială.* Să notăm cu O o origină arbitrară și cu $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ trei vectori unitari plasați pe cele trei axe D_1, D_2, D_3 vom avea

$$\vec{OM_1} = \vec{OO_1} + (a_1 + b_1 r)\vec{u_1}$$
$$\vec{OM_2} = \vec{OO_2} + (a_2 + b_2 r)\vec{u_2}$$
$$\vec{OM_3} = \vec{OO_3} + (a_3 + b_3 r)\vec{u_3}$$

și prin urmare centrul de greutate G al triunghiului $M_1 M_2 M_3$ este dat de

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OM_1} + \vec{OM_2} + \vec{OM_3}),$$

adică

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OO_1} + \vec{OO_2} + \vec{OO_3} + a_1\vec{u_1} + a_2\vec{u_2} + a_3\vec{u_3}}{3} + \frac{b_1\vec{u_1} + b_2\vec{u_2} + b_3\vec{u_3}}{3} r.$$

Membrul al doilea fiind un polinom de gradul întâi în r, rezultă că *locul lui* G *este dreapta care trece prin punctul* G_0 *definit de vectorul*

$$\vec{OG_0} = \frac{\vec{OO_1} + \vec{OO_2} + \vec{OO_3} + a_1\vec{u_1} + a_2\vec{u_2} + a_3\vec{u_3}}{3}$$

și este paralelă cu vectorul

$$\vec{V} = \frac{b_1\vec{u_1} + b_2\vec{u_2} + b_3\vec{u_3}}{3}.$$

II. *Soluție geometrică.* Să notăm cu O_1' și O_1'' punctele de pe axa D_1 care corespund la aceleași valori r' și r'' ale parametrului r, și să notăm cu r_1' și r_1'' segmentele orientate $\overline{O_1O_1'}$, $\overline{O_1O_1''}$. Avem

$$r_1 = a_1 + b_1 r \quad , \quad r_1' = a_1 + b_1 r' \quad , \quad r_1'' = a_1 + b_1 r''$$

de unde rezultă că

$$\frac{r_1' - r_1}{r_1'' - r_1} = \frac{r' - r}{r'' - r}$$

sau

$$\frac{\overline{M_1O_1'}}{\overline{M_1O_1''}} = \frac{r' - r}{r'' - r}.$$

Deasemenea dacă luăm pe axa D_2 punctele O_2' şi O_2'', iar pe axa D_3 punctele O_3' şi O_3'' care corespund la aceleaşi valori r' şi r'' ale parametrului r, vom avea

$$\frac{\overline{M_2O_2'}}{\overline{M_2O_2''}} = \frac{r' - r}{r'' - r}, \quad \frac{\overline{M_3O_3'}}{\overline{M_3O_3''}} = \frac{r' - r}{r'' - r}$$

şi deci

$$\frac{\overline{M_1O_1'}}{\overline{M_1O_1''}} = \frac{\overline{M_2O_2'}}{\overline{M_2O_2''}} = \frac{\overline{M_3O_3'}}{\overline{M_3O_3''}}$$

adică punctele M_1, M_2, M_3 împart segmentele $O_1'O_1''$, $O_2'O_2''$, $O_3'O_3''$ în acelaş raport.

Aşa fiind, să considerăm pe două drepte din spaţiu Δ şi Δ' punctele A, B pe prima şi apoi A', B' pe a doua. Pe prima dreaptă să luăm un punct M şi pe a doua un punct M' astfel ca

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}},$$

şi să dovedim că *locul geometric al punctului* P *care împarte segmentul* MM' *într'un raport dat este o dreaptă.*

Pe dreapta AA' să luăm punctul C astfel ca

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{PM'}} = k$$

şi prin C să ducem dreptele Δ_0, Δ_0' paralele cu Δ şi Δ'. Paralelele duse prin M şi B la AA' întâlnesc dreapta Δ_0 în N şi D, iar paralelele duse prin M' şi B' la A'A întâlnesc pe Δ_0' în N' şi D'. Dreptele MN, M'N' fiind paralele, dreptele MM', NN' se întâlnesc într'un punct care este tocmai punctul P. Intr'adevăr, avem

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PM'}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{N'M'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} = k.$$

In plus avem

$$\frac{\overline{PN}}{\overline{PN'}} = k,$$

iar dreapta NN' este paralela cu DD'.

Această relaţie arată că locul geometric al punctului P′ este dreapta care uneşte punctul C cu punctul C′ care împarte segmentul DD′ în raportul k, adică

$$\frac{\overline{C'D}}{\overline{C'D'}} = k.$$

Mai observăm că mai avem şi relaţiile

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PC'}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MA'}} = \frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}}.$$

Să revenim acum la problema noastră şi să notăm cu P_1 mijlocul lui M_2M_3. După proprietatea stabilită mai sus locul geometric al punctului P_1 este o dreaptă D_4 deoarece raportul $\frac{\overline{P_1M_2}}{\overline{P_1M_3}}$ este egal cu -1, iar pe această dreaptă putem alege două puncte O_4', O_4'' (analoagele punctelor C şi C′) astfel ca să avem

$$\frac{\overline{M_1O_1'}}{\overline{M_1O_1''}} = \frac{\overline{P_1O_4'}}{\overline{P_1O_4''}}.$$

Centrul de greutate G al triunghiului $M_1M_2M_3$ se găseşte pe dreapta P_1M_1 şi avem $\frac{\overline{GM_1}}{\overline{GP_1}} = -2$ ceea ce dovedeşte, după proprietatea demonstrată mai sus că locul geometric al lui G este tot o dreaptă.

III. *Generalizare.* Din demonstraţiile date mai sus rezultă următoarea generalizare:

Se consideră în spaţiu dreptele O_1O_1'', $O_2'O_2''$, ..., $O_n'O_n''$ *şi pe fiecare din ele luăm câte un punct* M_1, M_2, ..., M_n *astfel ca să avem*

$$\frac{\overline{M_1O_1'}}{\overline{M_1O_1''}} = \frac{\overline{M_2O_2'}}{\overline{M_2O_2''}} = \ldots = \frac{\overline{M_nO_n'}}{\overline{M_nO_n''}} = \lambda.$$

Când λ *variază locul geometric al baricentrului maselor* k_1, k_2, ..., k_n, *a căror sumă nu este nulă, plasate în punctele* M_1, M_2, ..., M_n *este o dreaptă.*

D. V. I.

PROBLEMA 3208. *Să se rezolve sistemul:*

$$x_0 + x_1 + \ldots\ldots + x_m + k = 0$$

$$A_n^1 x_0 + A_{n+1}^1 x_1 + \ldots + A_{n+m}^1 x_m + k = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_n^m x_0 + A_{n+1}^m x_1 + \ldots + A_{n+m}^m x_m + k = 0$$

unde k *este dat, iar* A_i^h *este simbolul aranjamentelor.*

TH. ANGHELUȚĂ.

Soluție dată de D-nii VALERIU NOVAC și IONEL STAMATE (Student Fac. Șt. Timișoara).

După regula lui CRAMER avem:

$$x_p = -\frac{D_p}{D}, \quad p = 0,1,\ldots, m$$

unde am pus

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots\ldots 1 \\ A_n^1 & A_{n+1}^1 \ldots A_{n+m}^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n^m & A_{n+1}^m \ldots A_{n+m}^m \end{vmatrix},$$

$$D_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots\ldots 1 & k & 1 \ldots\ldots 1 \\ A_n^1 & A_{n+1}^1 \ldots A_{n+p-1}^1 & k & A_{n+p+1}^1 \ldots A_{n+m}^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n^m & A_{n+1}^m \ldots A_{n+p-1}^m & k & A_{n+p+1}^m \ldots A_{n+m}^m \end{vmatrix}.$$

Introducând simbolul combinărilor avem:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots\ldots 1 \\ C_n^1 & C_{n+1}^1 \ldots C_{n+m}^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n^m & C_{n+1}^m \ldots C_{n+1}^m \end{vmatrix} . 1!\, 2! \ldots m! = 1!\, 2! \ldots m!,$$

căci ultimul determinant are valoarea unu. Pe de altă parte pentru a calcula pe D_p, avem nevoie de valoarea determinantului

$$\Delta_{i+1}^{p+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots\ldots 1 & 1 \ldots\ldots 1 \\ A_n^1 & A_{n+1}^1 \ldots A_{n+p-1}^1 & A_{n+p+1}^1 \ldots A_{n+m}^1 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n^{i-1} & A_{n+1}^{i-1} \ldots A_{n+p-1}^{i-1} & A_{n+p+1}^{i-1} \ldots A_{n+m}^{i-1} \\ A_n^{i+1} & A_{n+1}^{i+1} \ldots A_{n+p-1}^{i+1} & A_{n+p+1}^{i+1} \ldots A_{n+m}^{i+1} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n^m & A_{n+1}^m \ldots A_{n+p+1}^m & A_{n+p+1}^m \ldots A_{n+m}^m \end{vmatrix}$$

care este determinantul minor al determinantului D_p corespunzător elementului din linia $i+1$ şi coloana $p+1$.

Δ_{i+1}^{p+1} se calculează folosind metoda dată de D-l Prof. TH. ANGHELUŢĂ [1]). Pentru aceasta considerăm determinantul auxiliar.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots\ldots 1 \ldots\ldots 1 \\ A_n^1 & A_{n+1}^1 \ldots A_{n+p} \ldots A_{n+m}^1 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n^{i-1} & A_{n+1}^{i-1} \ldots A_{n+p}^{i-1} \ldots A_{n+m}^{i-1} \\ a_0 & a_1 \ldots\ldots a_p \ldots\ldots a_m \\ A_n^{i+1} & A_{n+1}^{i+1} \ldots A_{n+p}^{i+1} \ldots A_{n+m}^{i+1} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n^m & A_{n+1}^m \ldots A_{n+p}^m \ldots A_{n+m}^m \end{vmatrix}.$$

Δ_{i-1}^{p+1} este determinantul minor al determinantului A corespunzător elementului a_p.

In determinantul A lăsăm prima coloană neschimbată, iar în loc de celelalte punem diferenţa între coloana considerată şi cea

1) TH. ANGHELUŢĂ, Curs de Alg. Sup. p. 90, Ex. 33 (lit. 1940), G. M., Vol. XXX, prob. 3128, p. 149.

precedentă. Făcând această transformare succesiv de i ori şi folosind egalitatea

$$A_p^h = A_{p-1}^h + hA_{p-1}^{h-1}$$

$$A = \frac{m!(m-1)!\ldots(m-i+1)!}{i!} \begin{vmatrix} \Delta^i a_0 & \Delta^i a_1 \ldots \Delta^i a_p \ldots \Delta^i a_{m-i} \\ A_n^1 & A_{n+1}^1 \ldots A_{n+p}^1 \ldots A_{n+m-i}^1 \\ A_n^2 & A_{n+1}^2 \ldots A_{n+p}^2 \ldots A_{n+m-i}^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n^{m-i} & A_{n+1}^{m-i} \ldots A_{n+p}^{m-i} \ldots A_{n+m-i}^{m-i} \end{vmatrix}$$

unde am notat

$$\Delta^h a_p = \Delta^{h-1} a_{p+1} - \Delta^{h-1} a_p .$$

Pentru a calcula ultimul determinant, să calculăm determinantul

$$B_j = \begin{vmatrix} A_n^1 & A_{n+1}^1 \ldots A_{n+j-1}^1 & A_{n+j+1}^1 \ldots A_{n+m-i}^1 \\ A_n^2 & A_{n+1}^2 \ldots A_{n+j-1}^2 & A_{n+j+1}^2 \ldots A_{n+m-i}^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n^{m-i} & A_{n+1}^{m-i} \ldots A_{n+j-1}^{m-i} & A_{n+j+1}^{m-i} \ldots A_{n+m-i}^{m-i} \end{vmatrix} .$$

Trecând la simbolul combinărilor avem:

$$B_j = 1!\,2!\ldots(m-i)! \begin{vmatrix} C_n^1 & C_{n+1}^1 \ldots C_{n+j-1}^1 & C_{n+j+1}^1 \ldots C_{n+m-i}^1 \\ C_n^2 & C_{n+1}^2 \ldots C_{n+j-1}^2 & C_{n+j+1}^2 \ldots C_{n+m-i}^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_m^{m-i} & C_{n+1}^{m-i} \ldots C_{n+j-1}^{m-i} & C_{n+j+1}^{m-i} \ldots C_{n+m-i}^{m-i} \end{vmatrix} .$$

Dând factor comun în prima coloană pe n, în a doua pe $n+1,\ldots$, în cea ultimă pe $n+m-i$, iar în linia întâia pe 1, în a doua $2,\ldots$, în ultima pe $m-i$, obţinem

$$B_j = 1!\,2!\ldots(m-i)!\,\frac{m-i+1}{n+j}\,C_{n+m-i}^{m-i+1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots\ldots 1 & 1 \ldots\ldots 1 \\ C_{n-1}^1 & C_n^1 \ldots\ldots C_{n+j-2}^1 & C_{n+j}^1 \ldots\ldots C_{n+m-i-1}^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{n-1}^{m-i-1} & C_n^{m-i-1} \ldots C_{n+j-2}^{n-i-1} & C_{n+j}^{n-i-1} \ldots C_{n+m-i-1}^{n-i-1} \end{vmatrix} .$$

Determinantul din urmă a fost calculat de D-l Prof. TH. ANGHELUȚĂ [1]) și are valoarea C_{m-i}^{j}. Prin urmare avem:

$$B_j = 1!\ 2! \ldots (m-i)!\ \frac{m-i+1}{n+j}\ C_{n+m-i}^{m-i+1}\ C_{m-i}^{j}$$

și deci desvoltând pe A după elementele primei linii

$$A = \frac{1!\ 2! \ldots\ m!}{i!}\ (m-i+1)\ C_{n+m-i}^{m-i+1} \sum_{j=0}^{m-i} (-1)^j \frac{C_{m-i}^{j}}{n+j}\ \Delta^i a_j$$

ținând seama de formula [2])

$$\Delta^i a_j = a_{j+1} - C_i^1\ a_{j+i-1} + \ldots + (-1)^h\ C_i^h\ a_{j+i-h} + \ldots + (-1)^i\ a_j$$

luând $j+i-h=p$ sau $h=j+i-p$. Coeficientul lui a este deci

$$(-1)^{j+i-p}\ C_i^{j+i-p}.$$

In desvoltarea lui A coeficientul lui a_p este

$$(-1)^{i+p}\ \Delta_{i+1}^{p+1} = \frac{1!\ 2! \ldots\ m!}{i!}\ (m-i+1)\ C_{n+m-i}^{m-i+1} \sum_{j=0}^{m-i} \frac{C_{m-i}^{j}}{n+j}\ C_i^{j+i-p}.$$

Prin urmare

$$D_p = k \sum_{i=0}^{m} (-1)^{i+p}\ \Delta_{i+1}^{p+1}$$

și deci soluția sistemului propus este:

$$x_p = -k \sum_{i=0}^{m} (-1)^{i+p}\ \frac{m-i+1}{i!}\ C_{n+m-i}^{m-i+1} \sum_{j=0}^{m-i} \frac{C_{m-i}^{j}\ C_i^{p-j}}{n+j},\quad p=0, 1, \ldots n.$$

Observare. Considerăm sistemul mai general obținut din cel propus, punând în loc de K numerile $k_0, k_1, \ldots, k_m$. In acest caz avem:

$$D_p = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{i+p}\ k_i\ \Delta_{i+1}^{p+1}$$

și modificarea lui x_p urmează imediat.

Să luăm în particular sistemul în care $k_1 = \ldots = k_m = 0$

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_m + k_0 = 0$$

$$A_n^1\ x_0 + A_{n+1}^1\ x_1 + \ldots + A_{n+m}^1\ x_m = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_n^m\ x_0 + A_{n+1}^m\ x_1 + \ldots + A_{n+m}^m\ x_m = 0.$$

Acest sistem are soluția:

$$x_p = (-1)^{p+1}\ \frac{k\,(m+1)}{n+p}\ C_{n+m}^{m+1}\ C_m^p.$$

Luăm apoi sistemul în care numai $k_1 \neq 0$ ș. a. m. d. sistemul unde numai $k_m \neq 0$. Adunând soluțiile acestor sisteme, vom obține soluția sistemului în care avem constantele $k_0, k_1, \ldots, k_m$.

---

1) Loc. cit. 2) TH. ANGHELUȚĂ, Curs de Alg. Sup. pag. 47 (lit. 1940).

PROBLEMA 3945. *Să se construiască un triunghiu* ABC, *care să fie înscris într'un cerc dat* (O), *să aibă unghiul* BAC *egal cu un unghiu dat* α *şi astfel ca laturile* BA *şi* BC *să treacă respectiv prin două puncte date* A_1 *şi* C_1.

Să se discute problema în legătură cu poziţiile A_1 *şi* C_1 *deducându-se :*

a) *Cazurile în care problema are o singură soluţie;*

b) *Cazurile în care problema este imposibilă.*

O. N. ŢINO.

Să presupunem triunghiul ABC construit în condiţiile cerute de problemă. Unghiul BAC fiind egal cu unghiul dat α, arcul BC întins de coarda BC şi cuprins între laturile unghiului BAC are ca măsură 2α, deci coarda BC este tangentă unui cerc (Γ), concentric cu cercul (O) şi cu raza $\overline{OT} = R\cos\alpha$, R fiind raza cercului (O), şi trece prin C_1. Vârful A este intersecţia dreptei A_1B cu cercul (O) şi este situat de aceeaşi parte cu centrul O faţă de coarda BC dacă $\alpha < \frac{\pi}{2}$; dacă $\alpha > \frac{\pi}{2}$, vârful A şi centrul O sunt de-o parte şi de alta a coardei BC. Rezultă din aceste simple observări următoarea construcţie a triunghiului cerut:

In cercul (O) construim un unghiu la centru EOF având măsura cât 2α; apoi un cerc (Γ) concentric cu cercul (O) şi având raza cât distanţa $\overline{OI}$ dela centrul O la coarda EF. Din punctul C_1 ducem o tangentă C_1T la cercul (Γ) determinând în cercul (O) coarda MN. Luând vârful B în una din extremităţile coardei MN, astfel ca dreapta A_1B să taie a doua oară cercul (O) într'un punct A de aceeaşi parte cu centrul O faţă de MN $\left(\text{dacă } \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, am obţinut al treilea vârf al triunghiului ABC cerut.

Bineînţeles realizarea construcţiei de mai sus depinde cum am văzut în primul rând de unghiul dat α; apoi de poziţiile punctelor date A_1 şi C_1; deci vom avea una sau mai multe soluţii şi în unele cazuri nici una (când vom zice că problema este imposibilă).

1. Să considerăm întâi cazul $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

a) Dacă punctul C_1 este chiar în O, orice diametru al cercului (O) este o coardă MN. Dacă A_1 este oriunde în plan, exceptând centrul O, problema are două soluţii după cum luăm punctul B în M sau în N. Problema are în acest caz o infinitate de perechi de soluţii. Evident pentru diametrul trecând prin A_1 problema n'are soluţie propriu zisă; asemenea pentru cazul când A_1 este pe cercul (O), vârful A fiind în A_1, cele două triunghiuri sunt suprapuse la fiecare diametru care nu trece prin A_1, şi problema are o infinitate simplă de soluţii.

b) Să presupunem acum că punctul dat C_1 nu este în centrul O. Diametrul cercului (O) trecând prin C_1 determină în cercul (O) coarda MN. Dacă punctul dat A_1 se găseşte pe OC_1, *problema este imposibilă* (n'are soluţie propriu zisă).

Dacă A_1 este în regiunea cuprinsă între tangentele MΔ şi NΔ' la cercul (O), luând pe B în M sau în N problema are două soluţii distincte, dacă A_1 nu este pe cercul (O). Dacă dreapta A_1O este perpendiculară pe dreapta C_1O, cele două soluţii sunt triunghiuri simetrice. Când A_1 este pe cercul (O), problema are **o singură soluţie.**

Dacă punctul A_1 este dat pe una din tangentele MΔ sau NΔ', problema are **o singură soluţie.**

Dacă punctul A_1 este dat în una din cele două regiuni ale planului (în afara perechii de tangente paralele MΔ şi NΔ') problema are totdeauna *două soluţii*, aşezate deoparte şi dealta a diametrului MN.

2. Să considerăm acum cazul $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

Pentru ca să avem o soluţie a problemii, vârful A construit trebue să se găsească cu centrul O de aceeaşi parte a coardei MN.

a) *Punctul* C_1 *este interior cercului* (Γ). In acest caz nu sunt coarde, care să treacă prin punctul C_1 şi să fie văzute din vre un punct al cercului sub unghiul dat α; deci **problema este imposibilă.**

b) *Punctul* C_1 *aşezat pe cercul* (Γ). Construim tangenta în C_1 la cercul (Γ), ea determină în cercul (O) coarda MN. Ducem tangentele MP, NP la cercul (O). Pentru desemnarea precisă a

regiunilor planului, notăm coarda MN şi tangentele MP, NP respectiv: M_1MNN_1, N_2NPP_2, M_3MPP_3. Avem astfel delimitate cele şapte regiuni ale planului şi anume: *Reg. 1* interioară triunghiului MNP; *Reg. 2* interioară unghiului M_1MM_3; *Reg. 3* interioară unghiului N_1NN_2; *Reg. 4* interioară unghiului P_2PP_3; *Reg. 5* sau M_3MNN_2 între regiunile *2, 1, 3*; *Reg. 6* sau N_1NPP_3 între regiunile *3, 1, 4*; *Reg. 7* sau P_2PMM_1 între regiunile *4, 1, 2.*

Fie Q şi R punctele unde semidreapta PO taie cercul (O); arcul MQN are măsura 2α. Vârful A, urmând să fie cu centrul O de aceeaşi parte a coardei MN, trebue să se găsească pe arcul MRN.

Când punctul A_1 se găseşte în regiunile *7, 1, 3,* dreapta A_1N taie cercul (O) pe arcul MQN, iar dacă A_1 se găseşte în regiunile *2,* **5,** *6,* **4** dreapta A_1N taie cercul (O) pe arcul MRN.

Tot astfel, când punctul A_1 se găseşte în regiunile *2, 1, 6,* dreapta A_1M taie a doua oară cercul (O) pe arcul MQN; iar dacă A_1 se găseşte în regiunile **4,** *7,* **5,** *3,* dreapta A_1M taie cercul (O) pe arcul MRN. Evident acum că dacă A_1 se găseşte pe dreapta MN, problema n'are soluţie propriu zisă, adică **este imposibilă.**

Dacă punctul A_1 este dat pe arcul MRN, el este vârful A căutat, deci problema are **o singură soluţie.**

Dacă A_1 se găseşte în una din regiunile *4* sau *5,* şi evident nu pe arcul MRN, problema are *două soluţii* distincte. Când A_1 se găseşte şi pe dreapta OC_1, este două soluţii sunt simetrice în raport cu dreapta OC_1.

Dacă A_1 este dat în una din regiunile *2, 6*; *3, 7,* problema are **o singură soluţie.**

Dacă A_1 aparţine uneia din semidreptele MM_3, NN_2, PP_2, PP_3, problema are **o singură soluţie.**

Dacă A_1 este interior triunghiului MNP (Reg. 1) sau pe conturul lui **problema este imposibilă.**

c) *Punctul* C_1 *exterior cercului* (O).

In acest caz avem două tangente C_1T_1 şi C_1T_2 la cercul (Γ) (T_1 şi T_2 fiind punctele de contact). Aceste două tangente determină în cercul (O) respectiv coardele M_1N_1 şi M_2N_2.

Ducem tangentele la cercul (O) în M_1, M_2 şi N_1, N_2.

Tangentele RN_1 şi RN_2 taie respectiv tangentele SM_1, SM_2 în punctele P_1', P_2' şi P_1'', P_2''; fie asemenea R_1, R_2, S_1, S_2 respectiv intersecţiile perechilor de drepte (M_1N_1, N_2R); (M_2N_2, N_1R); (N_1M_1, M_2S); (N_2M_2), (M_1S).

Pentru precizarea regiunilor planului vom nota dreptele planului trase în figura noastră după cum urmează:

$$M_1'P_1''P_1'M_1SS_2M_1'' \; ; \; R'P_1''R_1RN_2P_2''R'' \; ; \; P'P_1'N_1RR_2P_2'P'';$$

$$M_2'S_1SM_2P_2''P_2'M_2'' \; ; \; N_1'C_1R_1N_1T_1M_1S_1N_1'' \; ; \; N_2'C_1R_2N_2T_2M_2S_2N_2''.$$

Vom avea de considerat următoarele regiuni determinate în plan de aceste drepte: *Reg. 1* interioară poligonului $SM_1N_1RN_2M_2S$; *Reg. 2* şi *Reg. 3* respectiv interioare triunghiurilor $M_2N_2P_2'$ şi $M_1N_1P_1'$; *Reg. 4* şi *Reg. 5* respectiv interioare triunghiurilor RR_2N_2 şi RR_1N_1; *Reg. 6* interioară conturului $RR_1C_1R_2R$; *Reg. 7* şi *Reg. 8* respectiv interioare patrulaterelor $R_1N_1P_1'P_1''$ şi $R_2N_2P_2''P_2'$; *Reg. 9* şi *Reg. 10* respectiv interioare triunghiurilor SM_1S_1 şi SM_2S_2; *Reg. 11* şi *Reg. 12* respectiv interioare unghiurilor $M_1'P_1''R'$ şi $M_2'P_2'P''$; *Reg. 11* interioară unghiului $N_1'C_1N_2'$; *Reg. 16* sau $N_1''S_1SS_2N_2'$ mărginită de regiunile *11, 9, 10, 12*; *Reg. 17* şi *Reg. 18* sau $M_1P_1''R_1C_1N_2$ şi $M_2'P_2'R_2C_1N_1'$ mărginite respectiv de regiunile *13, 7, 6, 15* şi *14, 8, 6, 15*; *Reg. 19* şi *Reg. 20* sau $R'P_1''P_1'P'$ şi $R''P_2''P_2'P''$ mărginite respectiv de regiunile *13, 7, 21*, şi *14, 8, 22*; *Reg. 21* şi *Reg. 22* sau $P'P_1'M_1S_1M_2'$ şi $R''P_2''M_2S_2M_1''$ mărginite respectiv de regiunile *19, 3, 9, 11* şi *20, 2, 10, 12.*

Notăm acum cu $M_2T_2'N_2$ arcul cercului (O) cuprins în regiunea *2*; cu $M_1T_1'N_1$ arcul cercului (O) cuprins în regiunea *3* şi observăm:

Când punctul A_1 se găseşte în una din regiunile *9, 16, 12*; *3, 7, 17, 15* dreapta A_1M_1 taie cercul (O) pe arcul $M_1T_1'N_1$; când punctul A_1 se găseşte în una din regiunile *21, 3, 11*; *5, 6, 18, 14* dreapta A_1N_1 taie cercul (O) pe arcul $M_1T_1'N_1$; când punctul A_1 se găseşte în una din regiunile *11, 16, 10*; *2, 8, 18, 15* dreapta A_1M_2 taie cercul (O) pe arcul $M_2T_2'N_2$; când punctul A_1 se găseşte în una din regiunile *13, 17, 6*; *4, 2, 22, 12* dreapta A_1N_2 taie cercul (O) pe arcul $M_2T_2'N_2$.

Formând deci tabloul cazurilor imposibile pentru extremităţile celor două coarde, deducem următoarele rezultate:

Când A_1 *este interior* **Reg. 1,** problema are *patru soluții* distincte luând pe rând vârful B în extremitățile M_1, N_1, M_2, N_2; dacă punctul A_1 este pe dreapta OC_1 soluțiile sunt simetrice două câte două în raport cu dreapta OC_1; dacă dreapta aparține dreptei T_1O, două soluții sunt simetrice în raport cu OT_1; asemenea dacă A_1 aparține dreptei OT_2 două soluții sunt simetrice în raport cu dreapta OT_2; dacă A_1 este chiar în O cele patru soluții sunt simetrice două câte două în raport cu dreptele OC_1, OT_1 și OT_2.

Când A_1 *este interior* **Reg. 2,** problema admite *două* soluții distincte luând vârful B în M_1 și în N_1; ele sunt simetrice, dacă A_1 aparține și dreptei OT_1, în raport cu OT_1.

Când A_1 *este interior* **Reg. 3,** problema are asemenea *două soluții,* luând vârful B în M_2 și în N_2; ele sunt simetrice în raport cu OT_2, dacă A_1 aparține și dreptei OT_2.

Când A_1 *este interior* **Reg. 6,** problema are *două soluții* distincte, luând vârful B în M_1 și în M_2; ele sunt simetrice, dacă A_1 aparține și dreptei OC_1, în raport cu această dreaptă.

Când A_1 *este interior* **Reg. 11,** problema admite *două soluții,* luând vârful B în M_1 și în N_2.

Când A_1 *este interior* **Reg. 12,** problema are asemenea *două soluții,* luând vârful B respectiv în M_2 și în N_1.

Când A_1 *este interior* **Reg. 15** *sau* **Reg. 16,** problema are *două soluții* luând vârful B în N_1 și N_2. Dacă A_1 aparține dreptei OC_1 cele două soluții sunt simetrice.

Când A_1 *este interior* **Reg. 17,** problema admite *două soluții* distincte, luând vârful B respectiv în M_2 și N_1; asemenea când A_1 *este interior* **Reg. 18,** problema are *două soluții,* luând vârful B respectiv în M_1 și în N_2.

Când A_1 *este interior* **Reg. 19** *sau* **Reg. 20,** problema are *patru soluții* distincte, două fiind simetrice dacă A_1 aparține uneia din dreptele OT_1 sau OT_2.

Când A_1 *este interior uneia din regiunile: 4, 5, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 21, 22,* problema are *trei soluții* distincte, exceptând *pentru fiecare* una din extremitățile celor două coarde M_1N_1, M_2N_2 respectiv: N_2, N_1, M_1, M_2, M_1, M_2, N_2, N_1, N_1, N_2.

Rămâne să examinăm acum numărul soluțiilor, când punctul A_1 este dat pe una din dreptele care separă planul în regiunile de mai sus, sau pe arcele cercului (O).

Dacă A_1 se găsește pe unul din arcele M_1M_2 și N_1N_2 cuprinse în *Reg. 1,* problema are numai *două soluții;* dacă punctul A_1 se găsește pe unul din arcele $M_1T_1N_1$ și $M_2T_2N_2$ problema are **o singură soluție.** Dacă punctul A_1 se găsește pe semidreapta S_1N_1' problema are **o singură soluție;** dacă A_1 aparține segmentului M_1S_1 problema are *două soluții;* dacă A_1 aparține interior segmentului M_1N_1 problema are *două soluții;* dacă A_1 se găsește chiar în M_1 sau N_1 problema are **o singură soluție;** dacă A_1 este interior segmentului N_1R_1 problema are *două soluții;* dacă A_1 se găsește chiar în R_1 problema are **o singură soluție;** dacă A_1 este interior segmentului R_1C_1 problema are **o singură soluție;** dacă A_1 este chiar în C_1 **problema este imposibilă;** dacă A_1 se găsește pe semidreapta C_1N_1' (origina C_1 exceptată) problema **are o singură soluție.**

Asemenea, dacă A_1 se găsește pe semidreapta S_2N_2'' problema are **o singură soluție;** dacă A_1 este interior segmentului S_2M_2 problema are *două soluții,* dacă este chiar în M_2 problema are **o singură soluție;** dacă A_1 este interior segmentului M_2N_2 problema are *două soluții;* când este chiar în N_2 problema are **o singură soluție;** dacă A_1 este interior segmentului N_2R_2 problema are *două soluții;* când este chiar în R_2 problema are **o singură soluție;** dacă A_1 este interior segmentului R_2C_1 problema are **o singură soluție;** dacă A_1 este pe semidreapta C_1N_2' (origina C_1 exceptată) problema are **o singură soluție.**

Dacă A_1 aparține semidreptei S_1M_2' sau este interior segmentelor SS_1, M_2S, $P_2'M_2$, $P_2'P_2''$, sau aparține semidreptei $P_2'M_2''$ problema are respectiv: *două soluții, două soluții, trei soluții, două soluții, trei soluții, două soluții.*

Asemenea dacă A_1 aparține interior semidreptei S_2M_1'', segmentelor S_2S, SM_1, M_1P_1, $P_1'P_1''$, sau semidreptei $P_1''M_1'$, problema are respectiv: *două soluții, două soluții, trei soluții, două soluții, trei soluții, două soluții.*

Dacă A_1 aparține semidreptei $P_1'P'$, interior segmentelor $P_1'N_1$, N_1R, RR_2, R_2P_2' sau semidreptei $P_2'P''$, problema admite respectiv: *trei soluții, două soluții, trei soluții, două soluții, două soluții, trei soluții.*

Asemenea, dacă A_1 aparține semidreptei $P_2'R''$, interior segmentelor $P_2''N_2$, N_2R, RR_1, R_1P_1'', sau semidreptei $P_1''R'$, problema

are respectiv: *trei soluții, două soluții, trei soluții, două soluții, două soluții, trei soluții.*

d) Dacă punctul C_1 este în regiunea cuprinsă între cercurile (O) și (Γ) avem deasemenea două coarde M_1N_1 și M_2N_2, care pot fi baze ale triunghiurilor soluții. Impărțind planul în regiuni ca în cazul ce precede și formând tabloul extremităților M_1, N_1, M_2, N_2, care pe regiuni nu dau soluții, vom găsi ușor numărul soluțiilor problemei pentru fiecare poziție a punctului A_1, față cu acele regiuni.

e) Tablourile constituite de nesoluții pentru unghiul $\alpha < \frac{\pi}{2}$ din cazurile (*c*) și (*d*), devin tablouri de soluții pe regiuni pentru unghiul $\pi - \alpha > \frac{\pi}{2}$, deci rezolvând și discutând problema în cazurile (*c*) și (*d*) $\left(\text{pentru } \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ obținem rezultatele discuției și pentru $\alpha > \frac{\pi}{2}$.

Am primit o singură soluție a problemii cu discuția sistematizată și aproape complectă dela D-l HARALAMBIE P. IONESCU-BISS (Student Matematici, București).

Celelalte soluții primite sunt cu totul incomplecte și nesistematizate în ce privește discuția problemii; dar tocmai această discuție interesa în problema propusă, rezolvarea ei fiind imediată.

O. N. Ț.

PROBLEMA 4470. *Fie* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ *două triunghiuri înscrise în același cerc* O, M *un punct al cercului, iar* D_1 *și* D_2 *două drepte ce conțin simetricele punctului* M *în raport cu laturile triunghiurilor* $A_1B_1C_1$, *și* $A_2B_2C_2$. *Se cere, când* M *descrie cercul* O, *locul punctului de intersecție al dreptelor* D_1 *și* D_2.

CEZAR IVĂNESCU.

Soluție dată de D-nii: D. LEBĂDĂ, NIȚESCU GH., POSTELNICESCU M. C., STOICA D. AL. și THEODORESCU DORIN. Fie H_1 și H_2 ortocentrele celor două triunghiuri date. Deoarece dreptele lui SIMSON ale punctului M în raport cu $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ trec prin mijloacele segmentelor MH_1, MH_2, rezultă că dreptele D_1, D_2 vor trece respectiv prin H_1, H_2.

Se ştie apoi că dreptele lui SIMSON de mai sus fac între ele un unghiu constant când M descrie cercul O (Culegere Probleme de Geometrie de G. ŢIŢEICA).

Rezultă că şi D_1, D_2 paralele cu cele de mai sus, vor face acelaşi unghiu constant, deci intersecţia lor va descrie cercul ce trece prin H_1, H_2, din punctele căruia H_1H_2 se vede sub unghiul constant de mai sus.

Notă. 1°. D-l M. C. POSTELNICESCU observă că dacă $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ sunt triunghiuri S (arcA_1A_2 + arcB_1B_2 + arcC_1C_2 = 0, T. LALESCU, G. M., Vol. XX, p. 253) atunci dreptele D_1 şi D_2 sunt paralele.

2°. D-l THEODORESCU DORIN afirmă că problema de faţă este rezolvată complect în articolul D-lui AD. MINEUR din Mathésis, 1929, p. 330—331. D-sa mai afirmă că problema de faţă este aproape identică cu una propusă de † N. BOTEA în „Revista Universitară Matematică", I, 1929, pag. 77. sub Nr. 7. Nu am putut controla aceste afirmaţiuni.

M. G.

PROBLEMA 4934. *Să se rezolve sistemul:*

$$a(x+y) = b(y+z) = c(z+x) = xyz.$$

DUMITRU MATEI.

Generalizare: Considerăm de rezolvat sistemul mai general:

$$(1)\quad a_1(x_2+x_3+\ldots+x_n)+a_2(x_3+x_4+\ldots+x_n+x_1)+\ldots+a_n(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}) = x_1x_2\ldots x_n.$$

Pentru rezolvarea acestui sistem vom distinge două cazuri:

a) Când o parte din coeficienţii a_j sunt nuli.

b) Când toţi coeficienţii a_i sunt diferiţi de zero.

a) Să presupunem că avem:

$$a_{k_1} = a_{k_2} = \ldots = a_{k_i} = 0$$

adică i oricare dintre coeficienţii a_j sunt nuli.

In acest caz sistemul (1) se reduce la un sistem de $(n-i)$ ecuaţii de forma:

$$(2)\quad x_1+x_2+\ldots+x_{k_i-1}+x_{k_i+1}+\ldots+x_n = 0$$

care se obţine făcând succesiv: $i = 1, 2, \ldots, i$ şi la care sistem se adaogă ecuaţia:

$$(2')\qquad x_1x_2\ldots x_n = 0.$$

Presupunând acum că dintre coeficienţii a_j diferiţi de zero avem $a_p \neq 0$ şi deci:

$$(2'') \quad x_{p+1} + x_{p+2} + \ldots + x_n + x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} = 0$$

ecuaţie care se află printre ecuaţiile sistemului (2).

Scăzând succesiv pe toate celelalte ecuaţii ale sistemului (2) din (2") obţinem sistemul echivalent:

$$(3) \qquad x_j = x_p$$

unde j poate lua toate valorile dela 1 până la n în afară de valorile

$$k_1, k_2, k_3, \ldots, k_i .$$

Ataşând sistemului (3) pe (2") formăm un nou sistem echivalent cu sistemul (2). Dacă notăm acum cu t valoarea comună acelor $(n - i)$ rădăcini egale din (3) sistemul format de (2') şi (2") devine:

$$(4) \qquad x_{k_1} + x_{k_2} + \ldots + x_{k_i} = (i + 1 - n)\, t$$

$$(4') \qquad x_{k_1} . x_{k_2} \ldots x_{k_i} t^{n-i} = 0.$$

Pentru rezolvarea sistemului format de ecuaţiile (4) şi (4') vom distinge două cazuri:

1°. Când $t = 0$.

2°. Când una dintre rădăcinile x_{k_i} este egală cu zero.

1°. Dacă $t = 0$ atunci celelalte i rădăcini ale sistemului sunt legate prin relaţia:

$$(4'') \qquad x_{k_1} + x_{k_2} + \ldots + x_{k_i} = 0.$$

Prin urmare sistemul (4), (4') are $(n - i)$ rădăcini egale cu zero şi încă:

$$x_{k_1} = \lambda_1, \quad x_{k_2} = \lambda_2, \ldots, \quad x_{k_{r-1}} = \lambda_{r-1}, \quad x_{k_{r+1}} = \lambda_{r+1}, \ldots, \quad x_{k_i} = \lambda_i,$$

$$x_{k_r} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{r-1} + \lambda_{r+1} + \ldots + \lambda_i)$$

adică $(i - 2)$ rădăcini nedeterminate — complet libere — şi una dată de (4").

2°. Dacă una dintre rădăcinile x_{k_i} este egală cu zero, fie x_k aceea, adică $x_{k_l} = 0$, atunci avem $(n - i)$ rădăcini egale, $x_j = t$ şi încă $(i - 2)$ rădăcini nedeterminate legate prin relaţia:

$$x_{k_1} + x_k + \ldots + x_{k_{l-1}} + x_{k_{l+1}} + \ldots + x_{k_i} = (i + 1 - n)\, t$$

sau

$$x_{k_1} = \lambda_1,\ x_{k_2} = \lambda_2, \ldots\ x_{k_{r-1}} = \lambda_{r-1},\ x_{k_{r+1}} = \lambda_{r+1}, \ldots$$

$$\ldots,\ x_{k_{l-1}} = \lambda_{l-1},\ x_{k_{l+1}} = \lambda_{l+1}, \ldots,\ x_{k_i} = \lambda_i,$$

$$x_{k_r} = (i + 1 - n)\,t - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{r-1} + \lambda_{r+1} + \ldots$$

$$\ldots + \lambda_{l-1} + \lambda_{l+1} + \ldots + \lambda_i).$$

b) Fie cazul

$$a_i \neq 0\ ,\quad i = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n.$$

In acest caz putem împărți fiecare ecuație a sistemului (1) cu produsul

$$a_1 \,.\, a_2 \ldots a_{n-1} \,.\, a_n$$

și obținem sistemul echivalent:

$$(5)\qquad \frac{x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{A_i} = \frac{x_3 + x_4 + \ldots + x_n + x_1}{A_2} =$$

$$\ldots = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{A_n} = \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{a_1 a_2 \ldots a_n} = \lambda$$

unde am notat:

$$A_i = a_1 a_2 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_n$$

și cu λ valoarea comună a tuturor rapoartelor obținute, valoare pe care o vom determina mai târziu.

Dacă în (5) facem suma numărătorilor pe suma numitorilor numai pentru primele n rapoarte și dacă mai introducem notația:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = (n - 1)\,u$$

obținem sistemul:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{u} = \frac{x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{A_1} = \ldots = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{A_n} = \lambda$$

în care făcând diferența numărătorilor pe diferența numitorilor între primul raport și celelalte n care îi urmează, succesiv, avem:

$$\frac{x_j}{u - A_j} = \lambda\ ,\quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

sau

$$(6)\qquad x_j = \lambda\,(u - A_j).$$

Pentru determinarea lui λ, ținând de ultimul raport din (5) și de soluțiile din (6) avem:

$$(6') \qquad a_1 a_2 \ldots a_n \lambda = \lambda^n \prod_{j=1}^{j=n} (u - A_j)$$

ecuație ce se descompune în:

$$\lambda = 0$$

$$(7) \qquad \lambda^{n-1} = \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{\prod_{j=1}^{j=n} (u - A_j)} .$$

Pentru studiul complet al sistemului (5), vom distinge trei cazuri pentru determinarea lui λ.

1°. Când $\lambda = 0$. In acest caz (6) ne conduce la:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

2°. Când valoarea lui λ^{n-1}, dată de (7), este pozitivă atunci avem:

$$(7') \qquad \lambda = e^{\frac{2k}{n-1}\pi i} \cdot \prod_{j=1}^{n} \sqrt[n-1]{\frac{a_j}{u - A_j}}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-2),$$

iar soluțiile sistemului (1) în acest caz sunt:

$$(8) \qquad x_l = (u - A_l) \cdot e^{\frac{2k}{n-1}\pi i} \cdot \prod_{j=1}^{n} \sqrt[n-1]{\frac{a_j}{u - A_j}}, \quad (l = 1, 2, \ldots, n).$$

Relația (8) spune că în ipoteza de mai sus avem pentru fiecare rădăcină a sistemului câte $(n-1)$ valori distincte, deci pentru sistemul (1) sunt $(n-1)$ grupe decâte n rădăcini distincte.

3°. Dacă valoarea lui λ^{n-1}, dată de (7), este negativă avem:

$$\lambda = e^{\frac{2k+1}{n-1}\pi i} \cdot \sqrt[n-1]{-\prod_{j=1}^{n} \frac{a_j}{u - A_j}}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-2),$$

iar soluțiunile (1) sunt:

$$(8') \qquad x_l = (u - A_l) \cdot e^{\frac{2k+1}{n-1}\pi i} \cdot \sqrt[n-1]{-\prod_{j=1}^{n} \frac{a_j}{u - A_j}}, \quad (l = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

relație care spune că avem $(n-1)$ grupe de câte n rădăcini distincte.

c) Pentru a obține soluțiile problemei așa cum a fost propusă, facem în soluțiile obținute la punctele (*a*) și (*b*) pe $n = 3$ și vom găsi două grupe de câte trei soluții în cazul (*b*) egale și de semne contrare.

Observații. 1°. Evident că s'ar fi putut considera și altă extindere a sistemului propus, dar am găsit-o pe cea de mai sus mai potrivită.

2°. Dintre toți rezolvitorii D-l MIRCEA D. POPA (lic. milit. Iași) a considerat sistemul mai general (1), tratând problema pe o cale mult mai greoaie numai pentru cazul (*b*) și neglijând observațiile necesare pentru cazul (6'), iar lui λ dându-i o singură valoare.

3°. Domnul N. D. ȘTEFĂNESCU (lic. milit. Târgoviște) este singurul rezolvitor care a tratat problema din cazul enunțului 4934 făcând toate discuțiile și observațiile necesare. Dealtfel făcând $n = 3$ în soluția generală de mai sus găsim o soluție foarte puțin diferită ca formă de aceea dată de dânsul.

4°. Au mai rezolvat problema în ipoteza că *a*, *b*, *c* sunt diferiți de zero și observând că λ poate avea două valori D-rele: MIOARA I. CRĂCIUNESCU, ANA GEREANU (studente mat. București) și D-nii: BOIAN EMIL (lic. milit. Cernăuți), CORNĂȚEANU AUREL, KERCIU GH. (lic. milit. Iași), PASCARU C. (lic. milit. Iași), ROHR I. ALEX. (lic. milit. Iași), STREDER I. (lic. milit. Iași), TURTOIU F. (lic. Unirea. Focșani), VASILESCU-STABU AL. M. (lic. M. Viteazu, Alba-Iulia), E. MODÂLCĂ (lic. milit. Iași).

5°. Au mai rezolvat problema în ipoteza că *a*, *b*, *c* sunt diferiți de zero, fără însă a observa că sunt două valori pentru λ D-nii: BODNĂRESCU M, HORIA (lic. Titu Maiorescu, București), CONSTANTIN PANTELIMON (lic. milit. Iași), S-LT GRUMĂZESCU M., IONESCU B. N. GH. (lic. Sf. Petru și Pavel, Ploești), JIPA C. AL. (lic. milit. Iași), MĂRCULESCU O., NEDELCU V. NIC. (lic. milit. Cernăuți), LT. NEGOIȚĂ PANAIT, PETRESCU ACHILLE (lic. milit. Iași), TĂTARU N. (lic. milit. Tg.-Mureș), ȘTEFAN C. TILICĂ (lic. Traian, T.-Severin).

H. P. I.

PROBLEMA 5050. *Fie* A, B, C *trei puncte pe o dreaptă și* O *arbitrar în plan; se consideră două cercuri trecând prin* O *și* A *și care taie sub unghiuri egale cercurile* AOB, AOC. *Dreapta* ABC *taie cercurile în* M, N *și cercul* OBC *le taie în* M', N' (M, M' *și* N, N' *pe respectiv același cerc*).

1. *Cercurile* OMN, OBC *sunt tangente.*
2. *Cercul* AM'N' *este tangent dreptei* ABC.

PROBLEMA 5080. *Fie* O *un punct arbitrar în planul triunghiului* ABC; *se consideră două cercuri trecând prin* O *şi* A *şi care taie sub unghiuri egale cercul* OAB, *respectiv* OAC. *Cercul* ABC *taie cercurile în* M, N *şi cercul* OBC *le taie în* M', N'.

1. *Cercurile* OMN, OBC *sunt tangente.*
2. *Cercurile* ABC, AM'N' *sunt tangente.*

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie dată de D-nii: IULIAN PETRESCU (liceul Gh. Lazăr, Bucureşti); MIRCEA D. POPA (liceul militar Iaşi) şi NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU (Ş. O. G. Bucureşti).

In triunghiul oarecare ABC ducem două drepte isogonale prin A care taie cercul ABC în M, N şi dreapta BC în M', N'. Se ştie şi de altfel e uşor de arătat că:

1. Cercurile ABC, AM'N' sunt tangente.
2. Dreptele MN şi BC sunt paralele.

Făcând *o transformare prin inversiune* cu polul într'un punct O pe cercul circumscris obţinem problema 5050. Luând polul O de inversiune, arbitrar obţinem problema 5080. Pentru aceasta ţinem seama că inversul unui cerc este o dreaptă dacă cercul trece prin pol şi este un cerc în cazul general şi unghiul liniilor transformate se păstrează prin inversiune.

Observaţii. 1. D-l MIRCEA D. POPA a dat şi o soluţie geometrică *directă*, foarte bună.

2. D-nii IULIAN PETRESCU şi MIRCEA D. POPA au făcut numeroase observaţii asupra figurii studiate.

PROBLEMA 5195. *O carte de „Recreaţiuni matematice", apărută de curând:* **„Curiosités & Récréations"** *de* G. BOUCHERY, *are pusă la pag. 43 următoarea problemă:*

„On a un nombre de 6 chiffres. Le chiffre de gauche est 2; si l'on le transporte à la droite du nombre, surpasse le premier de 333 308. Quel est le nombre primitif".

Se dă ca rezultat 237 034 şi se face o verificare adunând acestui număr pe 333 308 găsindu-se astfel că rezultatul este exact! Cum se explică reuşita verificării?

I. IONESCU.

Fie $2ab\ cde$ numărul căutat. Adunându-i pe 333 308 trebuie să ne dea suma $abc\ de2$. Operaţia se prezintă astfel:

$$\begin{array}{r} 2ab\ cde \\ 333\ 308 \\ \hline abc\ de2. \end{array}$$

Să aplicăm metoda imitării calculelor numerice. (Vezi *Culegere de Probleme de Aritmetică*, partea I. *Aritmetica raţionată*, pag. 57). Coloana unităţilor cere să luăm $e = 4$, pe care îl înlocuim în adunarea de mai sus şi găsim:

$$\begin{array}{r} 2ab\ cd4 \\ 333\ 308 \\ \hline abc\ d42. \end{array}$$

De aici se vede că la coloana zecilor trebuie să luăm $d = 3$. Făcând înlocuirea găsim:

$$\begin{array}{r} 2ab\ c34 \\ 333\ 308 \\ \hline abc\ 342. \end{array}$$

Coloana sutelor ne arată că nu putem lua decât $c = 0$. Adunarea devine:

$$\begin{array}{r} 2ab\ 034 \\ 333\ 308 \\ \hline ab0\ 342. \end{array}$$

Coloana miilor ne arată că trebuie să luăm $b = 7$. Inlocuind găsim operaţia:

$$\begin{array}{r} 2a7\ 034 \\ 333\ 308 \\ \hline a70\ 342. \end{array}$$

Coloana a doua dela stânga cere $a = 3$ şi înlocuind în primul număr găsim:

$$\begin{array}{r} 237\ 034 \\ 333\ 308 \\ \hline 570\ 342. \end{array}$$

Aici obținem la sumă $a = 5$ în loc de $a = 3$. Problema este dar imposibilă cu datele din enunț. Eroarea provine de acolo că s'a scris 8 la finele numărului 333 308 în loc de 6. Pornind cu numărul 333 306 se găsește, pe aceeași cale ca mai sus, 592 562 și avem în adevăr:

$$592\ 562 - 259\ 256 = 333\ 306.$$

Cum se face că a reușit verificarea pe care a făcut-o autorul? Este cert că autorul știind că prima cifră la numărul dat este 2, a luat acest număr ca bun la sumă, fără a observa că el nu ese din adunare.

Au rezolvat bine problema D-l ST. CETĂȚEANU (Elev, Politecnica din București), C. C. MIHĂILESCU (Bacalaureat, Câmpina), DIACONESCU V. CONSTANTIN (Liceul Militar, Ștefan cel Mare, Cernăuți).

PROBLEMA 5323. *Câte Vineri din cursul anului 1940 cad în ziua de 13 ale lunei?*

V. THÉBAULT.

Soluție dată de D-l C. D. EFTIMIE (Elev-inginer, București).

Anul 1940 fiind un an bisect, numărul zilelor lunilor este respectiv:

31, 29, 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30 și 31.

Numărul de ordine al primei zile a fie-căreia din luni este deci

1, 32, 61, 92, 122, 153, 183, 214, 245, 275, 305, 336

iar numărul de ordine al zilei cu data de 13 este respectiv

13, 44, 73, 104, 134, 165, 195, 226, 257, 287, 318, 348.

Cum anul 1940 a început într'o Luni, prima zi de Vineri a fost la 5 Ianuarie. Deci numărul de ordine al zilelor de Vineri este de forma $7m + 5$. Singurile numere de această formă în ultimul șir sunt 257 și 348 care corespund lunilor Septembrie și Decemvrie. Deci în anul 1940 ziua de Vineri a căzut de două ori la 13 ale lunei, odată la 13 Septemvrie și odată la 13 Decemvrie.

Au rezolvat bine problema D-șoara LYDIA M. TUDORAN (Școala Centrală de fete București) și D-nii: GH. GR. BOGDAN, P. P. DRĂGHICESCU, ELIADE VICTOR, M. D. IACOMI, C. ROMANESCU (Liceul militar, Iași) și AL. I. ROHR (Școala de geniu, București).

PROBLEMA 5338. *Fie* M *un punct în planul unei conice circumscrise unui triunghiu oarecare, iar* A', B', C' *intersecţiile unei drepte* Δ, *ce trece prin* M, *cu laturile* BC, CA, AB. A", B", C" *fiind intersecţia conicei cu* AM, BM, CM *să se arate că dreptele* A'A", B'B", C'C" *se întâlnesc în acelaşi punct pe conica considerată.*

VICTOR L. FLORESCU.

Soluţie dată de D-nii: MIRCEA D. POPA (bacalaureat Iaşi), ALEXANDRU I. ROHR (Şc. Of. Geniu) şi PAUL P. DRĂGHICESCU.

Fie N intersecţia conicei cu B'B". Considerând exagonul înscris BCAA"NB", după teorema PASCAL, laturile opuse se taie în punctele colineare: M (BB", AA"), B' (AC, NB"), (BC, NA"); dar MB' taie pe BC în A'; rezultă că şi NA" trece prin A', etc.

Observare. 1. D-l MIREL D. STOENESCU (Şc. Of. Aviaţie) dă o soluţie bună prin proiecţie conică.

2. D-l PAUL P. DRĂGHICESCU face numeroase observaţii asupra chestiunii, care nu e de altfel decât o variantă a enunţării teoremei AUBERT.

PROBLEMA 5436. *Se cunoaşte modul de a calcula adâncimea unui puţ, în cazul când ţinem seama de iuţeala sunetului, dar neglijăm rezistenţa aerului, prin măsurarea timpului de când lăsăm să cadă un obiect şi până când auzim sgomotul lovirii obiectului de fundul puţului.*

Să se deducă din studiul acestei probleme valoarea limitei:

$$y = \lim_{x=\infty} \left[x(a + bx) - \sqrt{x^2(a + bx)^2 - a^2 x^2}\right].$$

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluţie dată de D-nii: NICOLAE P. BĂDULESCU, EMIL S. MODÂLCĂ şi TEODOR ŞERBAN (elevi ai Şcoalei Politechnice din Bucureşti).

Fie *h adâncimea puţului, v iuţeala sunetutui,* t_0 *timpul de cădere,* t_1 *timpul necesar sunetului să ajungă la urechea observatorului, t timpul total măsurat de observator.*

Avem :

$$t = t_0 + t_1$$

$$h = \frac{1}{2} g t_0^2 \quad \text{de unde} \quad t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$h = v t_1 \quad \text{de unde} \quad t_1 = \frac{h}{v} \cdot$$

Rezultă :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v} \quad ; \quad \left(t - \frac{h}{v}\right)^2 = \frac{2h}{g} \cdot$$

Sau :

$$h^2 - 2v\left(t + \frac{v}{g}\right) h + v^2 t^2 = 0.$$

De unde :

$$h = v\left(t + \frac{v}{g}\right) - \sqrt{v^2\left(t + \frac{v}{g}\right)^2 - v^2 t^2}.$$

Am luat *semnul minus* înaintea radicalului deoarece :

$$t \geqslant t_1 = \frac{h}{v}. \quad \text{Deci} \quad h \leqslant vt.$$

Pentru v, iuţeala sunetului, considerată foarte mare :

$$t_1 = \frac{h}{v} = 0$$

iar :

$$t = t_0 \quad ; \quad h = \frac{1}{2} g t^2.$$

Deci :

$$h = \lim_{v = \infty} \left[v\left(t + \frac{v}{g}\right) - \sqrt{v^2\left(t + \frac{v}{g}\right)^2 - v^2 t^2} \right] = \frac{1}{2} g t^2.$$

Notând :

$$h = y \quad ; \quad v = x \quad ; \quad t = a \quad , \quad \frac{1}{g} = b$$

avem :

$$y = \lim_{x = \infty} \left[x(a + bx) - \sqrt{x^2 (a + bx)^2 - a^2 x^2} \right] = \frac{a^2}{2b}$$

ceea ce se poate foarte uşor verifica direct punând expresiunea dată sub forma :

$$= \frac{x(a+bx) - \sqrt{x^2(a+bx)^2 - a^2x^2}}{a^2x^2}$$
$$x(a+bx) + \sqrt{x^2(a+bx)^2 - a^2x^2}$$

şi trecând la limită.

S'a primit deasemenea o soluţie foarte bună dela D-l PAUL P. DRĂGHICESCU (elev al liceului Militar, Iaşi).

AL. ST.

EXERCIŢII

14. Fie A', B', C', H mijlocul laturilor şi ortocentrul unui triunghiu oarecare ABC; Ha, Hb, Hc mijloacele segmentelor $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, iar O centrul cercului circumscris aceluiaşi triunghiu.

Avem relaţiunile:

$$2\sum \text{aria } A'OC'Hb = \sum \text{aria } A'B'Ha\,Hb = S.$$

FLORESCU L. VICTOR.

R. Avem

$$2\sum \text{aria } A'OC'Hb = 2\sum \overline{A'Hb} \cdot \overline{A'O} \sin B =$$

$$2\sum R^2 \cos A \sin B \cos C = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = S$$

$$\sum \text{aria } A'B'Ha\,Hb = \frac{1}{2} R \sum C \cos C = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = S.$$

PROBLEME PROPUSE

5260[1]). Se dă un patrat ABCD. Fie A_1, B_1, C_1, D_1 mijloacele laturilor lui. Se unesc vârfurile patratului cu mijloacele laturilor neadiacente obţinându-se astfel în interiorul patratului un octogon *abcdefgh*.

Să se găsească aria octogonului în funcţie de latura a a patratului.

* * *

1) Problema publicată sub acest număr în Vol. XLV pag. 334 şi soluţia ei publicată în Vol. XLVI, pag. 271—273 se anulează.

5437 [1]). Dacă p şi q sunt două numere prime absolute consecutive (cu $p < q$) în şirul natural al numerelor prime, să se arate că în, afară de câteva excepţiuni, avem $p^3 > q^2$.

I. IONESCU.

5467. Să se găsească lungimea cercului mic al cărui plan este perpendicular pe jumătatea razei pământului, cu aproximaţie de 1 km.

Să se găsească aria acelui cerc cu primele trei cifre semnificative şi restul nule, exprimată în miriametri patraţi.

I. IONESCU.

5468. Intrebuinţând câte o singură dată pe fiecare din cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 să se formeze o progresie aritmetică de patru termeni de câte două cifre şi raţia de o cifră a acelei progresii.

G-L GH. BUICLIU.

5469. Se zice că, în actualul războiu, *Germania* a trimes la un moment dat aproape 2500 avioane contra *Angliei.*

Admiţând că avioanele au sburat într'o formaţie care, în proiecţie pe un plan orizontal, era constituită astfel:

— trei avioane în vârfurile unui triunghiu echilateral cu latura de 60 m, formând triunghiul T_1;

— trei triunghiuri T_1 în vârfurile unui triunghiu echilateral cu latura de 120 m, formând triunghiul T_2;

— trei triunghiuri T_2 în vârfurile unui triunghiu echilateral cu latura de 240 m, formând triunghiul T_3;... şi tot aşa mai departe.

Se întreabă, ce *suprafaţă* au acoperit astfel avioanele?

COMANDOR I. LINTEŞ.

---

1) Problema cu acest număr din Volumul XLV pag. 669 a fost propusă mai înainte de D-l B. BAIDAFF în *Revista de matematicas y fisicas elementales.* A se vedea *Cererea* 82, Anul XXVII, pag. 27.

Problema 5347 se înlocueşte cu cea de mai sus.

I. I.

5470. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$kx + yz = a$$
$$ky + zx = b$$
$$kz + xy = c$$

a, b, c, k fiind numere date.

M. GHERMĂNESCU.

5471. Insemnând prin C_n^i şi P_i simboalele cunoscute pentru combinări şi permutări, să se arate că ecuaţiile:

$$x^n + (C_n^1)^p x^{n-1} + (C_n^2)^p x^{n-2} + \ldots + (C_n^n)^p = 0$$

şi

$$x^n + \frac{(C_n^1)^p}{(P_1)^q} x^{n-1} + \frac{(C_n^2)^p}{(P_2)^q} x^{n-2} + \ldots + \frac{(C_n^n)^p}{(P_n)^q} = 0$$

au toate rădăcinile reale dacă p şi q sunt întregi astfel ca $p \geqq 1$ şi $p + q \geqq 1$.

P. SERGESCU.

5472. Să se arate că condiţia necesară şi suficientă, pentru ca polinomul

$$a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

să fie de forma

$$(\alpha_1 x + \beta_1)^n + (\alpha_2 x + \beta_2)^n + \ldots + (\alpha_p + \beta_p)^n, \quad n \geqq 2p,$$

este ca matricea

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots a_{n-2p} \\ a_1 & a_2 & \ldots a_{n-2p+1} \\ \vdots & \vdots & \\ a_p & a_{p+1} & \ldots a_n \end{pmatrix}$$

să fie de rang $\leqq p$.

TIBERIU POPOVICIU.

5473. Să se stabilească identitatea

$$2 \times 5^n \sin(x + 2n\varphi) = A \sin x - B \cos x,$$

unde

$$\varphi = \operatorname{arc\,cotg} 2 ; \quad A = (2+i)^{2n} + (2-i)^{2n} ; \quad B = (2+i)^{2n} - (2-i)^{2n},$$
$$(i = \sqrt{-1}).$$

Să se verifice pentru cazul $n = 1$ şi $n = 2$.

V. ALACI.

5474. Dacă l_a, l_b, l_c și α, β, γ sunt bisectoarele interioare și laturile triunghiului antiortic $I_a I_b I_c$ față de triunghiul de referință ABC de laturi a, b, c, avem:

$$\begin{vmatrix} 1 & a\,l_a & \dfrac{\alpha}{b+c} \\ 1 & b\,l_b & \dfrac{\beta}{c+a} \\ 1 & c\,l_c & \dfrac{\gamma}{a+b} \end{vmatrix} = 0.$$

EUGEN C. VIJELIE.

5475. Exagonul *articulat* ABCDEF are două grupe de câte trei laturi paralele AB ∥ CD ∥ EF, AF ∥ BC ∥ DE și se deformează în jurul vârfurilor A și F, care rămân fixe.

Se cere locului punctului de întâlnire al diagonalelor AD, BE, CF.

V. THÉBAULT.

5476. Știind că a, b, c, S sunt laturile și suprafața unui triunghiu, să se demonstreze inegalitatea

$$S \leqq \frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2).$$

D. V. IONESCU.

5477. O dreaptă D variabilă dusă prin punctul fix $P(p, q)$ taie axa OX în M; locul geometric al centrului cercului trecând prin origine și tangent în M la D este o parabolă ce trece prin origine, cu axa paralelă cu OX, cu parametrul $-\frac{q}{4}$.

Când P variază paralel cu OX, vârfurile parabolelor precedente descriu o altă parabolă cu vârful în origine, cu axa OY și parametrul $\frac{q}{4}$.

N. N. MIHĂILEANU.

5478. Se dă un unghiu XOY și punctele A și B așezate respectiv pe OX și OY. Se construiesc apoi (exterior sau interior) unghiurile $XOM = YON = \theta$.

1°. Să se arate că locul geometric al intersecției perpendicularelor coborîte din A și B respectiv pe ON și OM, când θ variază, este o iperbolă (Γ).

2°. Să se găsească locul geometric al centrului acestei iperbole, când $\sphericalangle XOY$ variază, în următoarele ipoteze:

a) bisectoarea unghiului XOY este fixă;

b) latura OX este fixă;

3°. Să se găsească înfășurătoarea iperbolei (Γ) în ipoteza (*a*) dela punctul 2°. GH. D. SIMIONESCU.

5479. Să se determine cele mai simple curbe din planul complex (z), care trec prin punctul de afix z_0 și care rămân invariante față de transformarea $Z = az$, unde $|a| < 1$.

Ce se întâmplă în cazurile $|a| \geqq 1$?

RADU BĂDESCU.

5480. Un rezervor cilindric descoperit, de rază r, umplut cu apă până la un nivel a deasupra fundului, este transportat cu un autocamion.

La un moment dat, când autocamionul se află în mișcare rectilinie orizontală cu iuțeala v_0, șofeurul *debreiază* motorul și blochează roțile.

In urma acestei manevre apa din rezervor se ridică în partea dinainte a vasului la o înălțime $h (h > a)$.

Să se determine lungimea pe care va *derapa* autocamionul și timpul în care are loc deraparea.

Să se calculeze coeficientul de frecare dintre cauciucuri și șosea, coeficient presupus constant în tot timpul mișcării.

Aplicație pentru $\gamma = 0{,}60$ m; $a = 0{,}70$ m; $h = 0{,}90$ m; $v = 30$ km/oră. ALEXANDRU STOENESCU.

5481. 1°. Să se determine semnul expresiei:

$$6\omega - 6 \sin\omega - \sin^3\omega$$

pentru valorile lui ω din intervalul $(0, \pi)$.

2°. Se consideră o sferă cu centrul în punctul O și cu raza a și fie ω unghiul sub care se vede această sferă dintr'un punct exterior M.

Să se calculeze integrala

$$I = \iiint [6\omega - 6 \sin\omega - \sin^3\omega]\, dv$$

relativă la spațiul exterior sferei considerate; dv înseamnă elementul de volum. TH. ANGHELUȚĂ.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea V. V. (4667, 5372); *Andonie St. I.* (5390, 437); *Andreescu N.* (5438, 47); *Anonim* (5313); *Balan V. Iulian* (5390); *Bakony C. C.* (5390); *Bârlea-Suhăţeanu G. V.* (5423); *Bodnărescu M. H.* (5390); *Bogdan Gh.* (5143); *Broşteanu G. G.* (5356, 419, 42); *Căruntu D. F.* (5174, 424); *Cetăţeanu St.* (5390); *Chintescu M. Matei* (4386, 90, 452, 5328, 72, 98); *Costescu Gh. I.* (5327); *Cruceru C.* (5390); *Drăghicescu P. P.* (3513, 5162, 217, 352, 90, 438, 40, 43, 47, 56); *Dragomir Er. Ad.* (4368, 415, 40, 52, 917, 5420, 34, 37, 42); *Dumitrescu Cezar* (5390); *Eftimie D. C.* (5390); *Florescu L. V.* (5366, 72, 86, 87); *Ganea D. N.* (5143); *Gheorghiu E. Oct.* (4667, 5390, 419, 42, 47); *Iacomi D. M.* (5378); *Iorgulescu N. Fl.* (4368, 452, 5369, 90, 435, 38, 47); *Ivan C. Z.* (5378, 90, 438); *Mănescu G. Ion* (4368); *Mang Ileana* (5420); *Marcus Beno* (5416, 20); *Moscovici E. N.* (5390); *Musceleanu D.* (4368, 5378, 424, 38, R); *Negrea A. Mircea* (4452, 5328, 69, 72, 73, 90, 420, 34, 64); *Negrescu C. Ion* (5378, 423, 38, 39, 47); *Nicolau Gr. Const.* (4368, 5438, 47); *Niculescu C. Mircea* (5390); *Pantelimon V. Const.* (5361, 90, 418, 20, 42, R); *Păşoi N. D.* (5439, 47); *Petrescu A. Al.* (5134); *Petrescu Iulian* (5016, 199, 325, 39, 69, 87, 418, 39, 56); *Pintilie I. Ioan* (5424, 34); *Popa N. A.* (5060, 64, 424, 38); *Popa N. N.* (5258, 393); *Puchiu T. Gh.* (5424); *Raicu S. Virgil* (5390); *Romanescu Cic.* (5143); *Săbăreanu Gh.* (5369); *Sbârnea Gh.* (5390); *Şerban A. T.* (3920, 5138, 219, 68, 324, 43, 56, 59, 96, 404, 37, 38, 46, 96); *Staicu Const.* (5369); *Stoenescu D. Mirel* (5390); *Tilică St.* (5390); *Trefilov I. M.* (5390); *Tudoran M. Lidia* (5390); *Turculeţ T.* (5258, 424); *Vasiliu G. D-tru* (4368, 5390); *Vijelie Gh. E.* (5390); *Vlădoianu T. R.* (4368); *Voicu D. Gh.* (5390); *Voinea P. Radu* (5390).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică**, ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, III, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*

Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa :

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon : 3-9803).

C. 70.077.

1926=N 1. 1940, 1941

C III R 28

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVI

NUMĂRUL 9. — MAI 1941

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNEA" SIBIIU

SUMARUL

1. Rezultatul Concursului „Gazetei Matematice" din anul 1941 . . . . . *O. N. Țino.*
2. Asupra problemei 3209 . . . . . *M. Ghermănescu.*
3. Philipp Melanchton şi matematicile (urmare şi sfârşit) . . . . . *Victor Marian.*
4. Raport asupra premiului de algebră. *Comisiunea pentru premii.*
5. Note Matematice: 41 — 43.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 301.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 2112, 4062, 4247, 4929, 5277, 5353.
11. Exerciţii: 15.
12. Probleme propuse: 4396, 5475, 5482 — 5496.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1941

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer, şi D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1940 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: **53**64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **4**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICĂ

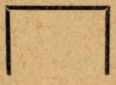
ANUL XLVI. Nr. 9 *SUPLIMENT* MAI 1941

DAREA DE SEAMĂ

asupra mesei comune care a încheiat Concursul Societăţii „Gazeta Matematică“ în seara zilei de 26 Aprilie 1941

Au trecut aproape doi ani dela Concursul precedent al *Gazetei Matematice*. Ne găsim în seara zilei de 26 Aprilie 1941, în aceeaşi sală a *Restaurantului „Luzana“*, unde acelaş ceas priveşte neturburat, cu acele nemişcate, fuga neîncetată a timpului.

In jurul mesei în formă de



iau loc:

D-nii: COLONEL JUGĂNARU, inspector TRAIAN POPP, V. GRIGORCEA şi LOCOT. CONST. DRĂGHICI, invitaţi ai Societăţii *Gazeta Matematică*.

D-l Prof. ION IONESCU, stâlp al *Gazetei Matematice*, D-ra GABRIELA ŢIŢEICA şi D-nii: IULIAN ALEXIU, LUCA BĂDESCU, PAUL BENEŞ, AL. BUNESCU, ION BUŞILĂ, D. CAMBUREANU, V. CAMBUREANU, GH. GH. CONSTANTINESCU, GH. I. DUMITRESCU, N. N. GEORGESCU, AD. GHEORGHIU, GH. TH. GHEORGHIU, V. GORCIU, GH. A. IOACHIMESCU, GH. ILIESCU, LOCOT. IONESCU-ŢIU, C-DOR I. LINTEŞ, C. MALCOCI, N. N. MIHĂILEANU, EM. MEREUŢĂ, CR. NICULESCU, ALEX. PANTAZI, FL. PĂSĂRICĂ, TIB. POPOVICIU, AL. AL. ROŞU, D. STAN, BARBU SERGESCU, CĂP. A. STAN, AL. STOENESCU, D. STOICA, C. C. TEODORESCU, HENRI TEODORU, O. N. ŢINO, R. ŢIŢEICA, M. VASILIU, FL. ZAHARIA, C-DOR ZAPAN, membrii ai *Gazetei Matematice*.

D-nii: D. BOIANGIU, I. G. COSTESCU, MIRCEA RUSU, MARIN VĂDUVA, GH. BROŞTEANU, I. GLIGOR, N. MĂRGĂRIT, M. NICULESCU, G. SBÂRNEA, C. ŞERBAN, C. CRISTEA, P. DRĂGHICESCU, G. ARON, E. CONSTANTINESCU, M. GHEORGHIU, S. PETRESCU, T. POPA, M. POPESCU, S. STOIANOVICI, D. DUMITRESCU, C. STAICU, I. UDREA, D. VASILIU, AL. IEŞAN şi S. MIHĂILESCU, candidaţii la Concursul *Gazetei Matematice* admişi la oral.

D-l D. STAN cu adâncă emoţie pronunţă următoarele cuvinte:

In locul rugăciunii dela începutul mesei, am propus acum doi ani, cu acelaşi prilej, să adoptăm tradiţia ca la începutul meselor comune ale Gazetei să se păstreze o clipă de reculegere ca să ne putem îndrepta gândurile către acei ce au fost „stâlpi“ ai „Gazetei Matematice“ şi către ceilalţi animatori şi sprijinitori ai ei dispăruţi. Să ne gândim deci o clipă în linişte şi cu toată pietatea, la VASILE CRISTESCU, *primul dintre stâlpii «Gazetei» care s'a risipit în negurile nefiinţei, la marele savant şi neîntrecutul român* GHEORGHE ŢIŢEICA *şi la toţi ceilalţi a căror listă este din nefericire destul de lungă.*

In picioare, nemişcaţi, în tăcere adâncă, simţim în preajma noastră prezenţa spirituală a celor dispăruţi.

In suflete pâlpâe flacăra amintirii şi a recunoştiinţei. Icoane sfinte trec uşor în ceaţa ochilor înpăienjeniţi.

* * *

Dar D-l D. STAN continuă :

Domnilor n'am terminat.

In cursul lunilor de iarnă Ţara noastră, din lăcomia vecinilor, a fost înstrăinată de teritorii scumpe inimilor noastre, şi la răsărit, şi la miazănoapte, şi la apus şi la miazăzi. Durerea acestor pierderi vremelnice nu ne poate părăsi nici-o clipă şi trebue să planeze deasupra oricărei întruniri a unui grup de români. Propun să mai păstrăm o minută de tăcere îndurerată, pentru a ne ţinti ochii înlăcrămaţi ai minţilor noastre asupra hărţii României Mari, cu graniţele pe care le-a avut şi pe care va trebui să le aibă din nou.

Revedem în aceste clipe pământul iubit smuls din trupul ţării de un destin orb, revedem căsuţele albe din vârfuri de dealuri sau din văile cu ape limpezi, şerpuitoare, revedem mormintele presărate pretutindeni a celor ce au murit pentru apărarea lui. In inimi sălăslueşte tristeţea dar pe chipuri se citeşte sau o hotărîre neînfrântă sau o speranţă izbăvitoare : hotărîrea neclintită şi vijelioasă de luptă şi sacrificiu pentru întregirea celor tineri, speranţa alinătoare a celor în vârsta de a putea muri liniştiţi şi senini între hotarele fireşti ale patriei.

* * *

Masa începe cu sărbătoreasca ciocnire a ouălor roşii, în mărturisirea creştină.

— *Christos a înviat !*

— *Adevărat a înviat !*

Se încearcă cu această ocazie rezolvarea pe cale experimentală a unei probleme propuse de Domnul GH. ZAPAN :

„Este posibil ca ciocnind două ouă să se spargă amândouă deodată" ?

Rezultatul practic este negativ. Ne propunem să reluăm experinţele în anul viitor.

Masa se continuă apoi în svon de glasuri, în clinchet de furculiţe. E timpul când se deapănă amintirile : întâmplări din liceu, chipuri de profesori şi camarazi, mesele comune de altădată ale *Gazetei Matematice*, cu muzică, producţii artistice, dansuri naţionale şi horă.

La ora 23 totul amuţeşte. Domnul Profesor ION IONESCU îşi rosteşte cuvântarea :

Tradiţia cere ca cel mai în vârstă stâlp al „Gazetei Matematice" să ţină primul discurs ; această sarcină ar reveni de drept colegului A. GH. IOACHIMESCU.

Dânsul fiind suferind şi neputând deci participa la masa noastră, datoria rostirii primei cuvântări trece astfel asupra mea. Incep prin a exprima colegului A. GH. IOACHIMESCU *urările noastre de însănătoşire grabnică şi dorinţa de a-l revedea cât mai repede în mijlocul nostru. Rog cu această ocazie pe fiul D-sale, Domnul* GH. A. IOACHIMESCU *să transmită părintelui său urările noastre.*

Christos a înviat!

Aceste cuvinte au astăzi o semnificare deosebită, o semnificare generală de reînviere naţională, o semnificare specială, aceia a reînvierii Concursului „Gazetei Matematice".

Am constatat cu satisfacţie rezultatul mulţumitor al Concursului din acest an, rezultat ce întrece pe cel precedent din 1939. Am credinţa că se va relua astfel firul vechi şi se vor forma matematicieni mari.

Închei cuvântarea mea, închinând pentru Suveranul Ţării, REGELE MIHAI I, *pentru* REGINA-MAMĂ ELENA, *pentru reîntregirea şi întărirea Ţării.*

Asistenţa în picioare ovaţionează îndelung pe SUVERAN.

Se citeşte apoi scrisoarea trimisă de Domnul General IOAN DEMETRESCU, Directorul Învăţământului Militar.

Onorate şi scumpe Domnule Profesor,

Vă este îndeajuns de cunoscută legătura mea sufletească cu „Gazeta Matematică". Deasemenea cred că vă sunt încă proaspete în minte simţirile curate şi calde, de care am vibrat ori de câte ori m'am găsit în mijlocul Dvs, a celor dela Gazetă.

Imi pare nesfârşit de rău, că tocmai astăzi, adică după un an de întrerupere al concursului, mă găsesc în greaua situaţiune în aceste clipe atât de frumoase pentru tineretul nostru. Cauze independente de voinţa mea îmi răpesc această bucurie. Vă prezint rugămintea călduroasă de a fi scuzat. Sufleteşte sunt cu Dvs. şi vă urmăresc cu mintea şi inima mea şi totdeodată vă asigur în mod solemn că Direcţiunea Învăţământului Militar nu va uita niciodată . . .

Dorind acum ca şi altă dată ca să contribui, alături de Dvs. şi la întărirea Gazetei Matematice, din punct de vedere material, vă rugăm să binevoiţi a primi şi pentru acest an modesta noastră donaţie de :

10.000 lei din partea Domnului Ministru Subsecretar de Stat al Armatei de Uscat,

20.000 lei din partea Direcţiunii Liceelor Militare.

Astăzi mai mult ca în trecut, în zilele grele prin care trecem şi care vor mai veni, termin scrisoarea mea cu sincera urare de :

Trăiască, crească şi înflorească «Gazeta Matematică» şi devotaţii ei slujitori.

Trăiască întru mulţi şi fericiţi ani, stâlpii «Gazetei Matematice».

In strigăte de *Trăiască Armata* se închină câte un pahar în sănătatea D-lui GENERAL IOAN DEMETRESCU şi a reprezentantului D-sale D-l COLONEL JUGĂNARU.

Urmează cuvântarea D-lui D. STAN.

Domnilor,

Constituția nescrisă a „Gazetei" cere să se intercaleze, la mesele comune, printre toasturi și închinări o cuvântare morală. Tradiția aceasta a creat-o neuitatul nostru Profesor GHEORGHE ȚIȚEICA *cu mulți ani în urmă. Pe nesimțite cuvântările lui atât de frumoase ca formă și atât de pline de miez, au fost etichetate de obișnuiții „Gazetei" drept cuvântări morale și ele constituiau punctul culminant al meselor comune. An de an, după aceia, cuvântarea morală n'a mai lipsit, era așteptată și se aducea de fiecare dată ceva nou și ca formă și ca înălțime de gândire, și ca adâncime de simțire.*

Cu dispariția lui ȚIȚEICA *însă, facerea cuvântării morale tradiționale a devenit o sarcină deosebit de grea, datorită tocmai comparației inevitabile cu regretatul maestru.*

S'a înțeles totuși, de întotdeauna, ca în cursa fără sfârșit și fără oprire a generațiilor, făclia din mâna celui care cade, trebue dusă mai departe de altul, care o va ceda la rândul lui altuia când îi va veni vremea.

Domnilor, după vorba Scripturii „Netrebnic sunt . . .".

In continuare D-l D. STAN *arată învățămintele ce trebuesc trase din evenimentele actuale.*

O pregătire cât mai îndelungă și complectă și o disciplină totală, disciplina inexorabilă a cifrelor care nu permite a se așeza sutele decât în coloana sutelor, a zecilor în coloana zecilor, etc., disciplina inevitabilă a figurilor geometrice care pentru anumită construcție duc la anumite rezultate, disciplina elasticității materialelor care la calcule de rezistență judicioase duce la construcții rezistente, în stare să înfrunte anii.

La vremurile aspre ce ne așteaptă, nimic nu ne va putea fi mai de folos la toți și în special tineretului ce se ridică, decât să învățăm să ne disciplinăm, iar pentru redobândirea demnității noastre naționale, pentru reîntregirea hotarelor ciuntite și pentru refacerea vieții noastre naționale, libere și respectate, să ne pregătim îndelung și minuțios.

Domnilor, era fatal ca vremurile dureroase ce parcurgem să ne scoată din cadrul preocupărilor noastre din direcția pregătirii matematice și de aceia, adresându-mă către voi tinerii „muguri matematici" — cum v'a numit altădată ȚIȚEICA *— vă urez nu numai să realizați așteptările îndrumătorilor voștri dela Gazetă, dar să și contribuiți cu toată inima și cu toată făptura voastră la ridicarea neamului nostru nedreptățit și îndurerat.*

Aplauzele ce nu mai contenesc, aduc D-lui D. STAN mulțumirile tuturor participanților pentru frumoasa cuvântare precum și promisiunea tinerilor concurenți de a urma viața de muncă și disciplină ce li s'a recomandat.

Domnul COMANDOR I. LINTEȘ citește apoi scrisoarea Domnului GENERAL GH. BUICLIU :

Domnilor Delegați,

O împrejurare neprevăzută și mai puternică decât vrerile omului mă împiedică de a lua parte astă seară la serbarea de încheere a concursului „Gazetei Matematice", serbare care pentru cei legați de „Gazeta Matematică" are un tâlc și o mistică de mare importanță și care pentru mine este o

adevărată înălțare sufletească. In adevăr, nu găsesc plăcere mai mare de cât acum de a mă găsi pe de o parte în atmosfera colegilor care cu atâta desinteresare fac sacrificii morale și materiale pentru stimularea învățământului matematic, pe de altă parte de a mă găsi în mijlocul concurenților care înfruntă rigorile unui concurs neoficial numai din imboldul dragostei pentru severa disciplină a matematicilor.

Urez și colegilor din Societate și concurenților de azi și de mâine multă sănătate și mereu continuitate, cu rezultate pozitive în activitatea dragostei lor pentru matematici.

Să trăiască Gazeta Matematică!

Asistența închină un pahar în sănătatea D-lui General GH. BUICLIU stâlpul cooptat al *Gazetei Matematice.*

Cu frumoase cuvinte, în aplauzele generale ale adunării, D-l Profesor O. N. ȚINO mulțumește D-lui D. STOICA precum și tuturor membrilor pentru munca lor spornică și dezinteresată precum și autorităților care înțelegând strădania noastră ne-au ajutat.

D-sa ne aduce vestea îmbucurătoare că nivelul matematic din acest an s'a dovedit cu ocazia Concursului mult mai ridicat celui de acum doi ani. In încheere D-l Profesor O. N. ȚINO urează tineretului să meargă mai departe cu stăruință pe calea de muncă și pregătire pe care a apucat-o și dorește tuturor sănătate și viață îndelungată.

Cu această ocaziune D-l Prof. I. IONESCU amintește că D-l Prof. O. N. ȚINO a fost primul premiant al primului concurs al *Gazetei Matematice.*

Intrebat când a avut loc acel concurs, D-l Prof. O. N. ȚINO păstrează o discreție desăvârșită.

Înțelegând această situațiune se transmite din persoană în persoană șoapta circulară că nimeni nu trebue să știe că sus numitul concurs s'a ținut în 1902.

D-l AL. BUNESCU, în calitate de membru delegat aduce în numele Societății mulțumiri generale tuturor persoanelor și autorităților cari au contribuit la ținerea *Concursului «Gazetei Matematice»*; aceste mulțumiri sunt îndreptate în special D-lui Rector C. C. TEODORESCU pentru punerea la dispoziție a localului *Școalei Politechnice*, D-lui C. THIERRIN pentru găzduirea oferită concurenților, D-rei GABRIELA ȚIȚEICA și D-lui GH. ILIESCU pentru reușita organizare a concursului și a mesei comune.

Adunarea ratifică cu lungi și puternice aplauze cuvântarea oratorului.

Din partea concurenților vorbește D-l NICULAE I. MĂRGĂRIT, elev în clasa VIII-a a liceului SCHEWITZ-THIERRIN. In glasul său puternic și clar străbate întreg entuziasmul, energia și avântul tineresc:

Domnilor Profesori,

Este pentru noi acei tineri elevi și studenți care ne-am legat trainic de edificiul spiritual pe care-l constitue „Gazeta Matematică", o aleasă bucurie să ne găsim în astă seară la tradiționala masă comună lângă acei care au pus temelia acestei clădiri de cultură românească și lângă acei

care se străduesc să o ridice; este pentru mine o cinste deosebită să vă aduc în numele candidaților prinosul nostru de recunoștință și mulțumirile noastre vii pentru străduințele ce le depuneți pentru a ridica „Gazeta Matematică" prin toate manifestările sale la adevăratele sale rosturi în mișcarea culturală română.

Ingăduiți-mi să ridic, în speranța că aceste străduințe nu vor fi înșelate un pahar pentru propășirea *Gazetei Matematice.*

Trăiască *Gazeta Matematică.*

Aplauze vii acoperă ultimele fraze ale cuvântătorului.

Un curent de bună dispoziție și veselie aduce D-l FLORIAN ZAHARIA care sub inspirația momentului comite următoarele epigrame:

D-lui Prof. ION IONESCU.

Dece nu-i vesel Prezidentul
Pentru noi e o dilemă
Nu la mulțumit menu-ul
Sau meditează vre-o problemă?

Patronului Restaurantului Luzana.

Cu preț modest patronu-acesta
A reușit să ne-ospăteze
Explicația e simplă
Nu știe să calculeze.

Nici-o faptă însă fără răsplată. Iată catrenele primite de D-l FL. ZAHARIA drept răspuns dela D-ra GABRIELA ȚIȚEICA:

Cum să n'apară Prezidentul
Ingândurat și indispus
Când astăzi ne vede talentul
La poezii și la discurs.

Colegul meu are dreptate
Dar, deși calculează rău,
Patronul nostru din păcate
N'o face în detrimentul său.

Redăm deasemenea versurile ocazionale compuse de D-ra GABRIELA ȚIȚEICA sub influența momentului:

2 - 3 elevi, toți dintr'o clasă
Veniseră și ei la masă
Și așteptând felul ce vine
Bând țuică și mâncând măsline
Ciocnind la ouă, creștinește,
Stăteau de vorbă prietenește,
Unul zicea: „Nu este rău,
Să nu-și aibă binele său;
Cum după iarnă, vară vine,
După orice rău urmează bine".
Altul răspunse: „Dragă frate,
Mi se pare că ai dreptate:
Banchete sunt după concursuri,
Pahar cu vin după discursuri!"

D-l Prof. O. N. ȚINO citește scrisoarea D-lui Prof. ANGHELUȚĂ, prin care se aduc urări de viață lungă *stâlpilor „Gazetei Matematice".* Asistența ovaționează pe D-l Prof. ION IONESCU, singurul stâlp prezent, și închină câte un pahar în sănătatea tuturor stâlpilor.

Ultimul discurs este pronunțat de D-l COLONEL JUGĂNARU:

In clipele grele de astăzi, pentru alinarea suferințelor noastre și pentru realizarea întregirei Patriei noastre, trebuește să reunim toate forțele sufletești, să stabilim o legătură sufletească între generații, o unitate de gândire și sentimente.

In această direcție, Societatea „Gazeta Matematică" a obținut mari realizări de care armata este mândră.

Tinerimea noastră trebuie să se pună pe muncă pentru a putea trece peste evenimentele grele ce trăim.

D-l COLONEL JUGĂNARU ne citează apoi frumoase exemple de eroism și sacrificiu ale tineretului școlar din Ardealul ocupat.

In încheere, D-sa rostește lapidarele cuvinte: „Forța noastră viitoare este unirea dintre toți". Trăiască *Gazeta Matematică*, „pildă de solidaritate și unire!"

Cuprinsă de entuziasm, asistența aplaudă cu toată energia.

La orele 24, D-l COMANDOR LINTEȘ, conform tradiției *Gazetei Matematice* și în concordanță cu ordinul Prefecturei, încheie masa comună cu urarea ca în anul viitor să ne reîntâlnim iarăși, dar într'o *Românie Mare.*

Astfel se sfârși al 31-lea Concurs al *Gazetei Matematice.*

* * *

Noapte de primăvară.

Indiferent, timpul își deapănă firul. Câte un trecător singuratec trece cu pași grăbiți pe străzile pustii. In contrastul dintre efemer și etern, nori albi subțiri de voal se fugăresc pe bolta înstelată.

Și în suflet, peste efemerul vieții noastre, se resfrânge viziunea unui popor etern dintr'o țară întregită și mândră.

ALEXANDRU STOENESCU.

REZULTATUL
CONCURSULUI „GAZETEI MATEMATICE“ DIN ANUL 1941

In şedinţa sa dela 28 Noemvrie 1940, Societatea *Gazeta Matematică* a hotărît ţinerea concursului tradiţional între elevii liceelor civile şi militare din întreaga Ţară, precum şi publicarea la timp a programei analitice a matematicilor cerute pentru fiecare clasă (IV—VIII), la acest concurs. Cum regulile de perfectă imparţialitate tradiţională ale Societăţii noastre, n'au fost supuse nici unei restricţiuni din partea actualei Conduceri a Ministerului Şcoalelor, concursul a avut loc la datele şi locul anunţate prin publicaţia făcută în *Gazeta Matematică* Nr. 6 (Februarie 1941).

Trebue să observăm totuşi, că evenimentele dureroase care au lovit ţara noastră şi care au adus pribegia a trei licee militare, a adus o modificare în pregătirea concursului.

Semnalându-se aceste evenimente, termenul anunţat pentru înscriere a fost, ca niciodată, prelungit şi anume până la 5 Martie a. c., dar, cum s'a putut vedea din rezultatele obţinute la acest concurs, matura examinare şi hotărîre a Societăţii n'a fost fără folos.

Deşi trei din liceele militare, cum am arătat mai sus, au pribegit, nu toţi corespondenţii noştri, pe care îi aşteptam dela aceste licee, au lipsit dela acest concurs, aşa că putem repeta *sublinierea* făcută, în raportul său asupra concursului din anul 1935, de *regretatul nostru profesor* GHEORGHE ŢIŢEICA: „*Merită „să fie menţionat faptul că Matematica este cu deosebire cultivată „în liceele Militare, unde se mai păstrează spiritul de altădată „al secţiilor din organizarea lui* HARET“.

Inscrierea la concursul din acest an a împlinit şi dorinţa sa exprimată în acelaşi loc: „*Nu pierdem speranţa ca şi în liceele „civile, acum cu bifurcarea ultimelor două clase, să reînceapă o „activitate matematică temeinică*“.

Au fost admişi să se prezinte la concursul din acest an *61* de candidaţi, dintre cari *30* elevi dela liceele militare şi restul *31* elevi dela liceele civile de stat şi particulare. Au absentat motivând *şapte* din candidaţii înscrişi, iar *patru* fără a înştiinţa şi motiva; s'au retras dela lucrările scrise *trei* candidaţi. Dintre candidaţii care s'au prezentat la *ambele* lucrări scrise, au fost admişi să treacă examenul oral *21* de candidaţi. Este iarăşi locul să amintim cuvintele regretatului nostru profesor GH. ŢIŢEICA scrise în raportul

său din anul 1936: *„Se poate vedea de aci cernerea serioasă „pe care a făcut-o* Comisiunea *chiar dela lucrarea scrisă. „Putem spune că sita a fost cam deasă"...*

Ca totdeauna probele concursului au fost urmărite în afară de membrii Comisiunii de mai mulţi membri ai Societăţii *Gazeta Matematică*. In primul rând neobositul îndrumător şi stâlp al *Gazetei Matematice*, D-l Prof. Ing. ION IONESCU, care prin întrebările puse aminteau unora dintre examinatori sau asistenţi (foşti candidaţi la concursuri altădată) mici încurcături neprevăzute pe care le-au avut ei sau unii dintre colegii lor. Apoi următorii membri ai Societăţii foşti premiaţi ai concursurilor de altădată: AL. D. BUNESCU, G-L GH. BUICLIU, I. CHIŢULESCU (examinator); GH. TH. GHEORGHIU (examinator), C. IONESCU-BUJOR (examinator), I. LINTEŞ (Delegatul Societăţii *Gazeta Matematică*), CR. MATEESCU, AL. PANTAZI, TIBERIU POPOVICIU (examinator), G. STAMATESCU, D. STOICA, C. TEODORESCU. Asemenea membrii: D-ra GABRIELA ŢIŢEICA (Delegata Societăţii *Gazeta Matematică*), GH. ILIESCU, G. A. IOACHIMESCU, TR. POPP, AL. AL. ROŞU, GH. THIERRIN, M. VASILIU, CĂP. COM. GRIGORE ZAPAN, RADU ŢIŢEICA, ŞERBAN ŢIŢEICA, C. D. ORĂŞANU, P. MIRESCU, C. MIHU.

Comisiunea examinatoare a fost compusă din D-nii: EM. MEREUŢĂ, AD. GHEORGHIU, PAUL BENEŞ, N. N. MIHĂILEANU, C. IONESCU-ŢIU, C. IONESCU-BUJOR, I. CHIŢULESCU, G. G. CONSTANTINESCU, GH. TH. GHEORGHIU, AL. STOENESCU.

Ca rezultat general concursul din acest an a fost bun, mai cu seamă prin oralul dela clasele IV, V, VI, VII şi cel de Algebră dela clasa VIII-a. Aşteptăm ca anii viitori să aducă în rândurile celor premiaţi pe mulţi din cei care n'au isbutit de astă dată.

Iată acum rezultatul clasificării candidaţilor reuşiţi la ambele probe şi premiile acordate de Societatea *Gazeta Matematică*:

1. In fruntea listei a fost clasificat D-l DUMITRESCU F. DAN, elev „Colegiul Sf. Sava" Bucureşti, în clasa V-a, obţinând la toate probele de *Algebră* şi *Geometrie* note foarte bune. Răspunsuri sigure şi precis exprimate. I se acordă ca premiu volumele următoare: A. ANGELESCU, *Calcul diferenţial;* HÜTTE, *Manuel de l'ingénieur,* 3 vol.; G. LAZĂR, *Trigonometrie;* G. PAPELIER, *Précis de Mécanique;* GABRIELA ŢIŢEICA şi AL. STOENESCU, *Probleme de calcul vectorial.*

2. In locul al doilea a reuşit D-l STOIANOVICI ŞERBAN, elev în clasa VII-a a liceului militar „N. Filipescu“ Predeal, care, numai datorită lucrării sale scrise dela *Geometrie*, n'a putut fi pus în locul întâiu. Totuşi la oralul de *Geometrie* a obţinut nota maximă. I se dau ca premiu volumele următoare: ED. BRAHY, *Exercices méthodiques de calcul différentiel;* ED. BRAHY, *Exercices méthodiques de calcul intégral;* A. BOUTARIC, *Précis de Physique;* I. IONESCU, *Beton armat;* E. LAINÉ, *Précis d'Analyse mathématique;* AL. STOENESCU, *Probleme de Dinamică.*

3. In rândul al treilea a ieşit D-l POPESCU GH. MARIN, elev în clasa VI-a a liceului „I. C. Brătianu“ Piteşti, care pe lângă o lucrare scrisă bună la *Geometrie* a dat răspunsuri orale foarte bune atât la *Geometrie* cât şi la *Trigonometrie.* I se dau ca premiu volumele: E. COLERUS, *Vom Punkt zur Vierten Dimension;* W. GRANVILLE, *Eléments de calcul différentiel et intégral;* I. IONESCU, *Beton Armat;* B. NIEWENGLOWSKI, *Cours de Géomètrie analytique,* Vol. IV; AL. STOENESCU, *Probleme de Dinamică;* AL. STOENESCU, *Teoria relativităţii.*

4. In rândul al patrulea vine D-l IEŞAN ST. ALEXANDRU, elev în clasa IV-a a liceului „Matei Basarab“ Bucureşti, pus în evidenţă prin lucrarea scrisă foarte bună dela *Geometrie* şi răspunsuri orale foarte bune la *Geometrie* şi *Algebră.* I se acordă ca premiu volumele: A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial;* P. AUBERT et G. PAPELIER, *Exercices d'Algébre, d'Analyse et de Trigonomètrie,* J. HADAMARD, *Leçons de géomètrie élementaire;* I. IONESCU, *Beton Armat;* J. POIRÉE, *La géomètrie à la portée de tous.*

5. In al cincilea rând a ieşit D-l DRĂGHICESCU I. PAUL, asiduul corespondent al *Gazetei Matematice,* elev în clasa VII-a a liceului militar „G-l Macarovici“ Iaşi, care pe lângă proba scrisă destul de bună la *Geometria Descriptivă,* a dat răspunsuri foarte bune atât la *Algebră* cât şi la proba orală de *Geometrie.* I se dau ca premiu volumele: P. AUBERT et G. PAPELIER, *Exercices de géomètrie analytique;* DUFRENOIS, RISSER, ROUSIER, *Les Méthodes actuelles de la balistique extérieure;* GABRIELA ŢIŢEICA şi A. STOENESCU, *Probleme de calcul vectorial;* I. IONESCU, *Beton Armat.*

6. In al şaselea rând vine D-l CONSTANTINESCU I. EMIL, elev în clasa VI-a liceului „Gh. Şincai" Bucureşti, care a dat atât la probele scrise, cât şi la cele orale răspunsuri bune. I se dau premiu volumele: E. DEGRANGES, *Arithmétique commercial et pratique; Gazeta Matematică*, Volum Jubilar; G. HABERLAND, *Mechanik;* GABRIELA ŢIŢEICA şi A. STOENESCU, *Probleme de calcul vectorial.*

7. In al şaptelea rând a reuşit D-l MĂRGĂRIT I. NICOLAE, elev în clasa VIII-a a liceului particular „Schewitz-Thierrin" din Bucureşti, care a dat răspunsuri foarte bune la probele orale dela *Algebră* şi *Geometrie analitică.* I se acordă ca premiu volumele: *Gazeta Matematică*, Volum Jubilar; G. LAZĂR, *Trigonometria;* G. PAPELIER, *Exercices de géomètrie moderne;* GABRIELA ŢIŢEICA şi AL. STOENESCU, *Probleme de calcul vectorial;* V. VOLTERRA, *Léçons sur les fonctions de lignes.*

8. In al optulea rând a ieşit D-l VASILIU GH. DUMITRU, elev în clasa V-a a liceului militar „Mihai Viteazul" Timişoara, care a dat o probă scrisă bună la *Geometrie,* un oral bun la *Algebră* şi unul foarte bun la *Geometrie.* I se acordă ca premiu volumele: T. CHOLLET et P. MINEUR, *Traité de géomètrie descriptive; Gazeta Matematică;* Volum Jubilar; G. LAZĂR, *Trigonometrie;* AL. STOENESCU, *Probleme de oscilaţie;* GABRIELA ŢIŢEICA şi AL. STOENESCU, *Probleme de calcul vectorial.*

9. In al noulea rând vine D-l SBÂRNEA D. GHEORGHE, elev clasa VIII-a a liceului „D. A. Sturza" Tecuci, care, pe lângă răspunsul oral bun dela *Geometria analitică*, a avut proba scrisă, cât şi cea orală dela *Algebră* foarte bune. I se acordă ca premiu volumele: *Gazeta Matematică*, Volum Jubilar; L. GODEAUX, *Les géomètries;* MENGE & SCHRIEDER, *Mechanik-Aufgaben;* AL. STOENESCU, *Teoria relativităţii.*

In afară de aceşti concurenţi, merită a fi menţionaţi următorii:

D-l POPA TEODOR, elev în clasa VI-a a liceului „Moise Nicoară" Arad, pentru oralul de *Geometrie* foarte bun. I s'a acordat volumele: I. IONESCU, *Beton armat;* AL. STOENESCU, *Unităţi de măsură în mecanică.*

D-l ŞERBAN C. CONSTANTIN, elev clasa VIII-a a liceului militar „N. Filipescu" Predeal, pentru ambele probe la *Algebră* foarte bune. I s'a acordat volumele: A. ANGHELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial; Gazeta Matematică*, Volum Jubilar.

Pentru premiul „Anghel Saligny“ de 1000 lei oferit de un membru al Societăţii, Comisiunea a fost alcătuită din D-nii: TIBERIU POPOVICIU, GH. TH. GHEORGHIU, AL. STOENESCU, GH. GH. CONSTANTINESCU. Niciunul din elevii Anului I ai Şcoalei Politecnice din Bucureşti, înscrişi pentru acest premiu, nu l-a obţinut.

Inchidem acest raport exprimându-ne speranţa că în viitor într'o aşezare mai bună pentru Ţara noastră, rezultatele concursului *Gazetei Matematice* vor fi şi mai bune.

DELEGAT PENTRU RAPOARTE
O. N. ŢINO.

ASUPRA PROBLEMEI 3209

Sub acest număr, am propus în *Gazeta Matematică* o problemă, aplicaţie a unui articol anterior[1]), în care ceream să se determine polinoamele $P_n(x)$ cari satisfac relaţia

$$(1) \qquad P_{n+k}P_{n-k} - P_n^2 = (-1)^{n-k}x^{n-k+1}P_{k-1}^2,$$
$$(n = k,\ k+1, \ldots).$$

In soluţia ce i-am dat, în Vol. 40, pag. 500—504, m'am ocupat de cazul $k = 1$, adică de relaţia

$$(2) \qquad P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^{n-1}x^n P_0^2 \quad , \quad (n = 1,\ 2, \ldots),$$

încercând apoi cazul general al relaţiei (1).

D-l T. POPOVICIU, reluând chestiunea, în articolul publicat sub titlul de mai sus, în Vol. 46, pag. 122—130 şi 179—185, tratează cazul relaţiei (2) mai generale

$$(3) \qquad P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = AB^{n-1},$$

unde A şi B sunt polinoame date, la care reduce apoi cazul relaţiei (1).

Cu această ocazie, D-sa semnalează unele scăpări în soluţia ce am dat la locul citat.

1) M. GHERMĂNESCU: „Proprietăţi ale seriilor recurente“, *Revista Matematică din Timişoara*, Vol. III, pag. 115—119.

Am regretat că acest articol nu mi-a fost adus la cunoştinţă, înainte de publicare, conform unui vechiu şi sănătos obiceiu al *Gazetei Matematice*, prin aceasta s'ar fi evitat publicarea unor afirmaţiuni nu tocmai riguroase şi, în plus, producerea unor noui „scăpări", destul de serioase.

a) Este adevărat că m'am ocupat numai de cazul $P_n \neq 0$, deşi cazul $P_0 = 0$ se impunea chiar din modul meu de rezolvare: de altfel cazul $P_m = 0$ se reduce la precedentul, după cum voiu arăta mai departe.

b) Nu am demonstrat că în relaţia $P_1 = RP_0$, R este un polinom: pentru mine, proprietatea aceasta era aproape intuitivă; în orice caz, se poate demonstra mult mai simplu decât s'a făcut la pag. 129—130 din articolul citat.

In adevăr, fie $R = \frac{u}{v}$, u, v fiind polinoame prime între ele; rezultă $P_0 = vv_1$, v_1 fiind un polinom. Relaţia $P_2 = RP_1 + P_0$ arată că $v_1 = vv_2$, adică $P = v^2 v_2$. Din aproape în aproape, ajungem la $P_0 = v^n v_n$, oricare ar fi n, ceea ce atrage $v = 1$.

c) Este *inexactă* contestaţia, scrisă cu litere deosebite, relativă la afirmaţia mea că polinoamele $P_n \not\equiv 0$, care verifică (2) verifică şi (1). In adevăr, se găseşte uşor că pentru $P_n \not\equiv 0$, *caz de care m'am ocupat în soluţia dată*, avem, pentru relaţia (2),

$$(4) \quad P_n = \frac{P_0}{\sqrt{R^2 + 4x}} \left[\left(\frac{R + \sqrt{R^2+4x}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{R - \sqrt{R^2+4x}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

şi se verifică uşor că aceste polinoame *satisfac şi relaţia* (1).

Reciproca nu este complet adevărată, este drept, adică toate polinoamele ce satisfac (1) satisfac şi (2), dar aceasta este altă chestiune.

d) Afirmaţia că soluţia dată cazului $k > 1$ este complet greşită, iarăşi nu corespunde în întregime realităţii. In adevăr, la locul citat, arăt că polinoamele care satisfac unei relaţii lineare de forma

$$(5) \quad P_{n+k} + AP_n + (-1)^k x^k P_{n-k} = 0$$

cu

$$AP_k = -P_{2k} - (-1)^k x^k P_0 \quad , \quad P_{2k} P_0 - P_k^2 = xP_{k-1}^2 ,$$

satisfac şi relaţiei (1). Trebuia arătată şi reciproca pentru ca afirmaţia să fie complet justificată.

Singura eroare, regretabilă, constă în faptul că, la finele soluției, considerând pe nedrept (5) ca o relație de ordinul $2k$ în loc de 2, am scris în mod eronat formula soluției generale a relației (5), ceea ce m'a condus la o concluzie neadevărată asupra legăturii între soluțiile relațiilor (1) și (2).

In articolul citat mai sus s'au produs însă deasemenea unele scăpări cari trebuesc semnalate aci.

a) Se afirmă că dacă există un $P_m = 0$, polinoamele P_n nu mai verifică o relație de recurență lineară, analoagă cu (4) pentru $k = 1$. Aceasta este *inexact:* sunt *două* relațiuni, una pentru $n < m$, și alta pentru $n > m$. In adevăr, din (3) și din relația obținută înlocuind n prin prin $(n+1)$ se deduce

$$\frac{P_{n+2} + BP_n}{P_{n+1}} = \frac{P_{n+1} + BP_{n-1}}{P_n}.$$

Dacă $P_n \neq 0$, egalând aceste rapoarte cu R, rezultă că polinoamele P_n satisfac unei relații unice

(6) $$P_n = RP_{n-1} - BP_{n-2}.$$

Dacă există $P_m = 0$, dând lui n valorile 0, 1... m, $m+1$... se obține șirul de rapoarte

$$\frac{P_2 + BP_0}{P_1} = \frac{P_3 + BP_1}{P_2} = \ldots = \frac{P_{m+1} + BP_{m-1}}{P_m} = \ldots =$$

$$= \frac{P_{m+2} + BP_m}{P_{m+1}} = \ldots = \frac{P_n + BP_{n-2}}{P_{n-1}} = \ldots$$

Raportul cu numitorul $P_m = 0$ fiind nedeterminat, rapoartele dela stânga vor fi egale cu un polinom R_1, iar cele din dreapta cu un polinom R_2, așa că avem *două* relații (5), una pentru $n < m$, alta pentru $n > m$.

b) Se afirmă că dacă $P_m = 0$, *se vede că șirul* P_{m+1}, P_{m+2},... *este regulat,* adică satisface relației (3), în care $A = -BP_0^2$. Aceasta *nu se vede, nu este demonstrat* și nici *nu este exact.* In adevăr, fie Q_n un șir de polinoame care satisfac relației (6), însă în care $Q_0 = 1$, $Q_1 = R$; ele vor satisface și relației

$$Q_{n+1} Q_{n-1} - Q_n^2 = -B^n$$

având expresiunea (4), în care luăm $P_0 = 1$.

Se găsește ușor, relația generală

(7) $$P_n = P_m Q_{n-m} - BP_{m-1} Q_{n-m-1}.$$

Dacă $P_m = 0$, această relaţie devine pentru

$$n > m \quad \text{şi} \quad P_k \neq 0 \quad . \quad k < m,$$

$$P_n = -BP_{m-1}Q_{n-m-1}. \tag{8}$$

Pentru $n < m$, polinoamele P_n vor satisface unei relaţii (6) cu alt polinom R',

$$P_n = R'P_{n-1} - BP_{n-2}; \tag{6'}$$

relaţia (7) pentru $m = 1$ devine

$$P_n = P_1 Q'_{n-1} - B_0 P_0 Q'_{n-2}, \tag{7'}$$

Q'_n fiind analoagele lui Q'_n, adică satisfăcând la (6') cu $Q'_0 = 1$ $Q'_1 = R'$. Pentru $n = m$, (7') devine

$$P_1 Q'_{m-1} - BP_0 Q'_{m-2} = 0$$

şi se deduce din (7')

$$P_n = \frac{P_{m-1} Q'_{m-n-1}}{B^{m-n-1}} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots m. \tag{8}$$

Se deduce că R' trebue să se dividă cu B^α, α fiind întreg $\geqslant 1$. Rezultă că Q'_{2j-1}, se divide cu $B^{\alpha+j}$, Q'_{2j} se divide cu B^{2j} şi că dacă B nu este patrat, avem

$$P_{2n} = \sqrt{-AB}\, B^{2n-p-1} Q'_{2(p-n)}, \tag{9}$$

$$P_{2n+1} = \sqrt{-AB}\, B^{2n-p} Q'_{2(p-n-1)+1} \quad , \quad n = 0, 1 \ldots p, \quad m = 2p+1.$$

Soluţia de mai sus presupune în mod *necesar* $A \neq -BP_0^2$, contrar ipotezei D-lui T. POPOVICIU.

Dacă, pe lângă $P_m = 0$, mai vrem să avem şi $P_k = 0$, $k < m$, rezultă $P_1 = P_3 = \ldots P_m = 0$ şi suntem de abia acum în cazul de care s'a ocupat D-l T. POPOVICIU ca de un caz general. Numai acum $A = -BP_0^2$ apare ca o condiţie necesară.

Dacă B este patrat, R' trebue să se dividă cu $\sqrt{B}$, deci $R' = (\sqrt{B})^\alpha C$ şi se arată uşor că Q'_n se divide cu $(\sqrt{B})^{n\alpha}$. Punând $Q'_n = (\sqrt{B})^n Q''_n$, vom găsi

$$P_n = \sqrt{-A}\,(\sqrt{B})^{n-1} Q''_{m-n-1} \quad , \quad (n = 0, 1, \ldots m), \tag{10}$$

care dau $P_m = 0$ şi satisfac la (3) *fără ca* $A = -BP_0^2$.

c) Din relaţiile (3) şi (6), se deduce relaţia de condiţie

$$P_n^2 - RP_n P_{n-1} + BP_{n-1}^2 + AB^{n-1} = 0. \tag{11}$$

D-l T. POPOVICIU a dat-o numai pentru $n=1$, fără ca măcar aşa să-i examineze posibilităţile de existenţă, ceea ce era absolut necesar în general şi în particular pentru D-sa, care se ocupă în realitate numai de cazul când P_0 şi P_1 sunt daţi, în care caz nu există totdeauna polinomul R care să satisfacă (11), începând cu cazul $n=1$. Aceasta l-a făcut să dea un exemplu greşit în primele rânduri dela pag. 181, căci cu $P_0=1$ şi $P_1=\frac{x+2}{2}$ nu există nici un polinom R, care să satisfacă (1) pentru $n=1$. Dacă se ia $R=2x$, aşa cum face D-sa, trebue atunci $P_1=x\pm 1$.

d) Nu s'a observat că problema determinării şirurilor P_n în care $P_m=0$ este un caz particular al problemei *prelungirii* unui şir, *la stânga*, cu m polinoame.

e) In cazul general, s'a arătat că studiul ecuaţiei (1) duce la desfacerea şirului P_n în k şiruri, după cum $n=k_0+i$. Aceasta era evident şi rezultă din însăşi relaţiile (C') şi (C") date de mine în soluţia contestată a problemei 3209. Dar reducerea studiului relaţiei (1) la acela al relaţiei (3) sau al uneia mai particulare nu rezolvă complet problema. Proba este că nu s'a pus în evidenţă soluţia comună a relaţiilor (1) şi (2), exprimată prin (4), ceva mai mult, s'a contestat existenţa acestei soluţii comune.

f) La data apariţiei articolului D-lui T. POPOVICIU, am trimis un articol desvoltat la *Gazetă*, în care erau demonstrate în detaliu afirmaţiunile de mai sus. Din diferite motive, acest articol nu s'a publicat imediat şi nici nu s'a putut prevedea când se va publica, fapt care m'a determinat să-l dau, acum, sub această formă rezumativă, rezervându-mi dreptul de a-l publica, în extensiunea iniţială, în altă parte.

M. GHERMĂNESCU.

D-l M. GHERMĂNESCU ridică oarecare obiecţiuni asupra câtorva pasaje din articolul meu sub acelaşi titlu. Fără a comenta stilul întrebuinţat de D-l M. GHERMĂNESCU pentru a încheia discuţia asupra problemei 3209, voiu răspunde punct cu punct obiecţiunilor precedente.

a) D-l M. GHERMĂNESCU recunoaşte că s'a ocupat, în rezolvarea problemei 3209, numai de cazul $P_n\neq 0$ (pentru orice n). Această restricţie nu era însă impusă de enunţul problemei.

b) Cei cari au cetit articolul meu sunt desigur convinşi că aici orice comentariu este inutil.

c) In contestaţia mea, despre care vorbeşte D-l M. GHERMĂNESCU, m'am exprimat prea concis. Fraza subliniată: *relaţiile* (31) *pentru* $k > 1$ *nu sunt o consecinţă a relaţiilor* (32) nu este suficient de clară. Textul care urmează la pag. 183, 184 (v. 46) arată clar ce am vroit să înţeleg prin aceasta. Anume că, contrar rezultatelor D-lui M. GHERMĂNESCU, polinoamele cari verifică relaţia (1) nu verifică, în general, relaţiile (2). Cred că e interesant să mai adaog, şi D-l M. GHERMĂNESCU îmi va scuza desigur această observaţie, că acest pasaj se adresează în special D-sale, în exprimarea mea neclară fiind influenţat, recunosc poate chiar intenţionat, de ultimile trei rânduri scrise de D-sa la soluţia problemei 3209 (*Gazeta Matematică* Vol. 40, pag. 504), care rânduri prezintă aceleaşi impreciziuni.

d) Cred că e inutil orice comentariu având în vedere chiar textul de mai sus al D-lui M. GHERMĂNESCU. Pentru cei cari ar dori să vadă de ce am întrebuinţat expresia, — din păcate prea aspră, — de *complet greşită*, recomand să citească paginile 503, 504 din *Gazeta Matematică*, Vol. 40.

Să mi se permită acum să examinez, împreună cu D-l M. GHERMĂNESCU scăpările semnalate în articolul meu.

a) Cetitorul poate vedea uşor că D-l M. GHERMĂNESCU demonstrează tocmai că eu am dreptate. Un şir de polinoame care până la m verifică o relaţie de recurenţă iar dela m încolo verifică *o altă* relaţie de recurenţă, *nu verifică o* (aceeaşi) *relaţie de recurenţă* (e vorba peste tot de relaţii de recurenţe de ordinul 2).

b) Aici las pe seama cetitorului să comenteze textul D-lui M. GHERMĂNESCU. Ceea ce vreau să spun este că D-l M. GHERMĂNESCU se înşeală dacă crede că afirmaţiile mele sunt inexacte. Fie un şir de polinoame în x

$$(I) \qquad P_0, P_1, \ldots, P_r, \ldots$$

care verifică o relaţie de recurenţă de forma

$$(II) \qquad P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2 = AB^{n-1} \quad , \quad (n = 1, 2, \ldots,),$$

A, B fiind două polinoame diferite de zero. Dacă $A = -B \cdot P_0^2$ zicem că şirul este regulat. D-l M. GHERMĂNESCU contestă afirmaţia mea că:

Dacă $P_m = 0$, *şirul*

$$P_{m+1}, P_{m+2}, \ldots$$

este regulat. Iată cum *se vede* acest lucru contestat. Dacă $P_m = 0$, făcând $n = m + 1$ în (I), avem

$$P_{m+1}^2 = -A \cdot B^m,$$

deci

$$P_{m+i+2} P_{m+i} - P_{m+i+1}^2 = A \cdot B^{m+i} = -B^i \cdot P_{m+1}^2, \; i = 1, 2, \ldots$$

c. c. t. d.

c) D-l M. GHERMĂNESCU are dreptate că exemplul (pag. 181, V. 46)

$$A = x^2 - x - 1 \quad , \quad B = x \quad , \quad P_0 = 1 \quad , \quad P_1 = \frac{x+2}{2} \quad , \quad U = 2x$$

nu este bine ales. Greşeala provine din faptul că am rezolvat rău o ecuaţie de gradul al doilea. Trebuia scris $P_1 = (x + 1)$ sau, bineînţeles, $P_1 = (x - 1)$.

Cei cari au cetit primele rânduri ale paginei 180 (Vol. 46) își dau perfect seama că e vorba aici de e greșeală de transcriere. Restul îl las pe seama cetitorului să-l comenteze.

d) Această observație se datorește D-lui M. GHERMĂNESCU.

e) Nu am putut găsi unde am contestat existența soluțiilor comune ecuațiilor (1) și (2).

f) Chestiunea privește redacția Gazetei.

T. POPOVICIU.

Nota redacției. — După publicarea soluției problemei 3209 în Volumul XL, pag. 500, D-l TIBERIU POPOVICIU a trimis observațiile sale asupra acelei soluții care nu s'a putut publica decât în anul acesta XLVI, pag. 122 și 179, din cauza aglomerării de materie și a lungimii articolului. Ivindu-se protestări energice în contra întârzierilor de publicare a materialului trimis *Gazetei Matematice*, am fost însărcinat eu ca împreună cu D-l GH. ILIESCU, care primește manuscrisele, să facem un triaj înainte de publicarea fiecărui număr.

Este bine înțeles că în privința alegerii de preferință a publicării articolelor și a problemelor, notelor, etc., nu putem fixa norme precise, matematice. Totuși, ca să nu se creadă că facem alegerea după sprânceană, ne-am fixat câteva norme. Iată câteva din ele:

a) Se preferă articolele, notele și problemele de matematici elementare celor de matematici superioare, care își au azi la noi reviste speciale, destul de bune și de numeroase. *Gazeta Matematică* a fost creată pentru desvoltarea gustului pentru matematică la elevii școalelor secundare, speciale și superioare iar nu pentru publicarea lucrărilor matematicianilor.

b) Se preferă articolele, notele, probleme scurte celor lungi, pentru a avea o varietate mai mare de materie în fiecare număr.

c) Nu se mai publică articole care nu se trimit terminate.

d) Se preferă articolele și notele rectificative pentru ca erorile strecurate să nu dăinuiască mult în revistă. Aceste rectificări dau loc la articole cam aprinse uneori între critici și autori, ceeace m'a determinat să scriu articolul *Errare humanum est* dela pag. 393 din acest an.

e) Rectificările, se vor publica fără a se cere aprobarea autorului, afară dacă criticul se adresează direct autorului. Redacția *Gazetei Matematice* nu se amestecă în asemenea discuțiuni. D-l M. GHERMĂNESCU greșește când afirmă că înainte se proceda aducându-se critica la cunoștința autorului. Il rog să-și revadă corespondența și să vadă cui a cerut D-sa aprobarea numeroaselor rectificări, completări pe care le-a făcut și care i s'au publicat direct. Până la anul 1935 eu eram și delegat *„pentru reclamațiuni privitoare la tipărire"* încât cunosc bine procedarea urmată care era și va fi pe viitor următoarea:

Critica se publică întocmai cum se primește pe răspunderea autorului ei. Autorul poate apoi trimite observațiunile sale, care se comunică criticului, și răspunsul acestuia se tipărește odată cu observațiile autorului criticei, după care incidentul se închide. Aceasta este procedarea care se urmează în revistele tecnice serioase unde discuțiunile asupra soluțiunilor date și părerilor emise sunt uneori lungi și interesante.

D-l M. GHERMĂNESCU a fost rugat să urmeze această cale, însă D-sa a cerut să i se publice imediat un articol lung, neterminat, ceea ce redacţia nu a admis. După primirea răspunsului D-sale de mai sus, el a fost pus în vedere D-lui T. POPOVICIU, care şi-a trimis observaţiunile de mai sus.

In unul din punctele tratate de D-nii M. GHERMĂNESCU şi T. POPOVICIU s'a vorbit de *Redacţia Gazetei Matematice* şi de aceea m'am crezut obligat să public această notă.

Cu aceasta, chestiunea problemei 3209 este închisă.

I. IONESCU.

PHILIPP MELANCHTON ŞI MATEMATICILE

(Urmare dela pag. 400)

O altă prefaţă a fost scrisă la tratatul lui SACROBOSCO întitulat *„De anni ratione“* sau *„Computus Ecclesiasticus“*. Ea este dedicată doctorului în medicină ACHILLE GASSARUS din Lindos (Rhodos) şi datează din luna August 1538.

După ce insistă asupra utilităţii *Computului* pentru viaţa practică, istorie, religie, etc. MELANCHTON face un scurt istoric al calendarului, arătând importanţa reformei lui IULIU CAESAR, care *„a instituit acea formă a anului, de care ne folosim şi azi, deşi după un interval atât de lung acum are nevoie de o reformă“*. E interesant să constatăm că reforma calendarului era considerată necesară, încă dela începutul reformaţiunii, de către reprezentanţii ei.

Această prefaţă e destul de scurtă şi se termină astfel:

„Sunt de acord cu propunerea lui GEORGE IOACHIM RHETICUS, *de a alătura la cartea despre sfera* **Computul** *scris de acelaşi autor* JOANNES DE SACRO BUSTO. *Căci după cum am spus mai sus, a ţine un comput precis al anului e folositor din mai multe motive. In adevăr odinioară acestui fapt i se dădea o importanţă atât de mare chiar de către biserică, încât* CIRILL *afirmă că s'a hotărît în Sinod ca în fiecare an episcopul din Alexandria să notifice celui din Roma ziua precisă a echinocţiului, deoarece în Şcoala din Alexandria pe aceea vreme înflorea studiul acestei filozofii, pe când la Roma nu era atât de cunoscut...*

Iar Ţie, îndeosebi, GEORGE *a voit să-ţi dedice această carte, spre a arăta că-şi aduce aminte de vechea Ta prietenie şi ca în acest loc să-ţi mulţumească prin mine pentru îndemnul ce i l-ai*

dat către aceste studii ale semnificațiilor mișcărilor cerești, când el de mult păşea pe alte cărări ale vieții fugind de această filozofie. Deaceea crede că Ție-ți datorește mai mult că a revenit la aceste științe. Primește deci acest dar dela un prieten și coleg de studii atât de oneste, fiindcă el cuprinde ceva din acele arte, care-ți aduc atâta cinste în fața savanților. Vei mai ști că această carte a fost revăzută de savantul și vrednicul bărbat CASPAR BORNERUS, *care posedă o râvnă deosebită nu numai în toate ocupațiile vieții, ci și în studiile artelor bune*".

Cu mult mai importantă decât cele de mai sus este prefața la „*Elementa Geometriae ex* EUCLIDE" întocmite de IOANNES VOGELIN [1]) și reeditate în 1536 de MELANCHTON. Ea e dedicată lui IOANNES REIFENSTEIN, despre care însă nu am putut găsi date.

„*Nimic nu mi se pare mai potrivit să pun la începutul acestei cărți, care e o întroducere la geometrie, decât simbolul pe care se spune că l'a scris* PLATON *pe poarta Școlii sale: Nimeni să nu între dacă nu cunoaște geometria!*

Cauzele acestei sentințe sunt multe și foarte importante. In adevăr această știință nu trebue lăsată numai pe seama mecanicilor care măsoară edificii, vase, sau alte corpuri mărunte, cu toate că și această ocupație cuprinde o doctrină liberală și aduce multe foloase vieții. Un filozof însă are nevoie de geometrie din alte motive. In adevăr de aici provin începuturile fizicei. Și pretutindeni în toate părțile fizicei cele mai multe demonstrații fizice se iau din această știință, cum sunt în primul rând acelea care arată că lumea e finită, că nu sunt mai multe lumi, că nu există corp infinit, fiindcă acestea sunt adevăratele începuturi ale fizicei. Apoi, demonstrațiile geometrice fiind cele mai elegante, fără a cunoaște întru câtva această artă nimenea nu-și poate da îndeajuns seama de valoarea demonstrațiilor și nu va deveni artist al metodei. Deaceea a spus și PLATON *că geometria trebue învățată deoarece cunoașterea ei ne conduce la cunoașterea mai ușoară și mai precisă a altor arte. Dar folosul ei cel mai mare constă în măsurarea mărimii pământului și a corpurilor și spațiilor cerești.*

---

1) IOANNES VOGELIN, dela 1528 profesor de matematici la Universitatea din Viena. Manualul său a apărut mai întâi la 1528 sub titlul „*Elementale geometricum ex* EUCLIDIS *geometria*".

Şi acesta este cel mai mare merit al geometriei că nu s'a mărginit la aceste maşini mici şi neînsemnate ci s'a ridicat la cer, şi minţile omeneşti abătute la pământ le-a ridicat din nou în regiunile cereşti şi ne-a arătat minunata arhitectură a lumii şi guvernarea ei. Apoi inimile exilate le-a adus în patria cerească şi deci la cunoaşterea lui Dumnezeu. Căci această doctrină prin care se poate vedea arhitectura şi guvernarea lumii întăreşte în mintea omenească părerile cinstite despre Dumnezeu. Cum însă izvoarele acestei părţi atât de importante a filozofiei despre mişcările cereşti aparţin în mare parte geometriei, de aceea a îndemnat PLATON *pe cei care doreau să înveţe filozofia, să înceapă prin a studia geometria".*

In ce priveşte învăţarea geometriei MELANCHTON împarte oamenii în trei categorii. In primul loc sunt *„minţile generoase şi alese"* pe care *„raportul măsurilor le încântă prin el însuşi"*; deci trebuesc îndemnate şi atrase spre acest studiu. Despre categoria a doua spune: *„Ştim că aceste îndemnuri nu produc niciun efect asupra celor ce posedă minţi perverse, care nu-şi dau seama de valoarea ştiinţelor nobile, sau urmăresc arte venale, pentru câştig"*. In sfârşit sunt inteligenţele mediocre, cu care se pot obţinea rezultate frumoase. Deaceea *„Te îndemn mai întâi pe Tine* IOANE *împreună cu cei deopotrivă Ţie să tindeţi a obţinea adevărata laudă năzuindu-vă toţi oamenii inteligenţi şi de inimă a ne da o doctrină solidă şi perfectă, care să fie spre binele republicei. In acest scop trebuesc cultivate toate artele care sunt atât de ataşate şi legate între ele, încât în fiecare trebuesc luate multe arte înrudite. Iar aceste două arte ale numerelor şi măsurilor, având multă întrebuinţare în ştiinţele fizice; în adevăr au dat întreaga doctrină despre fenomenele cereşti"*.

Deplânge apoi neglijarea ştiinţelor în următorul pasaj de o crudă actualitate: *„Căci de mai multe veacuri aceste arte zac părăsite şi neglijate. In adevăr, ultimele secole au îndepărtat tinerimea dela această filozofie adevărată spre cele mai absurde sofisme. Acum după ce acestea au fost alungate din şcoli trebuesc depuse toate eforturile spre a se cultiva filozofia pură şi naturală care să conducă la urmarea unei doctrine solide. Căci epoca noastră ne avertizează îndeajuns cât e de necesară pentru republică o filozofie perfectă, fiindcă mulţi, atât din cauza lipsei de*

judecată cât și din motivul că nu sunt în stare să explice nimic în mod clar, răspândesc pretutindenea sau susțin păreri absurde și confuse, din care cauză se iviră în biserică mari certuri și disensiuni. Nici nu se va pune capăt acestor nenorociri, până ce tinerimea nu se va întoarce la doctrina adevărată și erudită a studiilor. Grija acestora este fără îndoială datoria acelora care stau în fruntea Bisericei și a republicei. Dar aceeași grijă ne aparține și nouă, adică acelora care predau sau învață în școli. Căci și ocupația noastră aparține republicei. Fiindcă suntem puși de Dumnezeu în aceste funcții ca să păstrăm și să propagăm o doctrină folositoare omenirii. Și Dumnezeu pretinde această râvnă la fel dela doctori ca și dela discipoli... Cine vine la școală numai pentru a-și însuși o părticică a științei, care să-i aducă vreun câștig sau faimă, acela să știe că pângărește templul sfânt al științei. Prin urmare dacă tinerii își înțeleg misiunea, dacă știu cu ce suflet trebue să se apropie de studii, vom ajunge ușor ca mințile nepervertite să învețe corect și ordonat toate artele, nu umbra fără de viață a erudiției, ci știința adevărată." Așa înțelegea rostul științelor un umanist din veacul al XVI-lea!

Studiul geometriei e necesar nu numai acelora care i se dedică în mod special, ci oricui, fiindcă „*pentru formarea judecății și înțelegerea multor pasaje din* ARISTOTEL *și alți autori vestiți, e necesară înțelegerea elementelor de geometrie.* ARISTOTEL *descrie foarte frumos justiția în Cartea V a* „Eticei" *cu ajutorul figurilor geometrice și deosebește în mod erudit speciile ei comparându-le cu proporția aritmetică și geometrică. Și se expun în acel loc normele necesare acelora care doresc să judece în mod erudit despre cauzele legilor. Acestora le aduce foarte multă lumină comparația luată din aritmetică și geometrie... Căci* ARISTOTEL *a stabilit în mod foarte prudent două feluri de justiții, dintre care una orândue gradele persoanelor în ocuparea funcțiilor în imperii, în oraș și în familii. Cealaltă guvernează nu numai contractele, ci toate compensațiile lucrurilor, ca mărfuri, daune, insulte, pedepse. Și fiindcă se explică pentru ce în compensații se cere proporția aritmetică, iar în cealaltă justiție, în alegerea magistraților se aplică cea geometrică, cauzele justiției sunt evidente. Iar* ARISTOTEL *a împrumutat această comparație dela* PLATON, *care discută cu multă eleganță și demnitate, că în orașe*

trebuește efectuată egalitatea, deoarece produce dragostea reciprocă. Dar spune că egalitatea aritmetică în imperii cauzează disordini în alegerea funcționarilor, pe când cea geometrică e binefăcătoare pentru orașe. Căci avem egalitate geometrică atunci când se formează grade și se aplică alegerea astfel ca funcțiunile importante să fie atribuite în mod proporțional cetățenilor celor mai buni și înțelepți, iar dacă aceștia înțeleg ce parte a serviciului public să ocupe, și rămân în rânduiala lui, nu conturbă proporția. Acest stat îl laudă PLATON *spunând că această geometrie e divină, și orașele abia atunci vor fi fericite, când Dumnezeu le face cunoscută partea acestei geometrii. Apoi, adaugă, dela această geometrie pornește tot ce este bun în lucrurile omenești. Astfel dacă în Biserică autoritatea supremă ar aparține celor mai buni și învățați, și prin grad fiecare ar înțelege serviciul său și și-ar face datoria, și după cum se spune, fiecare ar împodobi Sparta sa, cei neștiutori s'ar supune hotărârilor savanților. Cu cât ar fi mai fericită Biserica dacă ar fi constituită după această proporție geometrică ce împiedică atât tirănia, cât și depravarea populară. In adevăr în tirănie nu există grade, ci toți cei buni sunt oprimați la fel. In democrație domină egalitatea aritmetică, după care toți cei de jos dețin puterile supreme fără nici o selecție, și este statul pe care mai mult îl disprețuește.* ACHILLE, *la* HOMER, *când spune că nu vrea să trăiască în republica în care nu există nicio deosebire între cetățenii buni și cei răi".*

La editarea *Elementelor* lui VOGELIN, precum și a *Aritmeticei* lui PEURBACH, MELANCHTON a fost ajutat de IACOB MILICHIUS, pe care-l amintește în această prefață împreună cu cei doi autori în următoarele: „IACOB MILICHIUS *a unit în mod util cărțile cele mai potrivite pentru învățământ, de aritmetică și geometrie, scrise de cei mai de frunte savanți ai acelei Academii, care de câteva secole este lăcașul de seamă al acestor științe. Fiindcă în Viena sub influența lui* PEURBACH *aproape s'a renăscut această filozofie a lucrurilor cerești, și acum în mod distins păstrează și înfrumusețează posesiunea aceasta așa zicând ereditară alți savanți, cum e* IOANNES VOGELIN, *autorul acestei cărți de* Elementele *geometriei, pe care a alcătuit-o atât de scurtă și în mod atât de serios, pe care-l credea cel mai potrivit pentru studenți".*

Prefaţa la „*Elementa Arithmetices*“ a lui PEURBACH e scrisă tot la 1536. Ea e dedicată tânărului IUSTUS IONAS [1]). Asupra utilităţii aritmeticei, MELANCHTON are aici următoarea apreciere: „*Despre valoarea şi folosul aritmeticei fac dovadă nu numai mărturiile savanţilor, ci ne-o arată şi viaţa de toate zilele, care ne spune că oamenii nu se pot lipsi de ştiinţa de a număra. Dar studenţii trebue să ia în considerare nu numai folosul ce-l aduc ştiinţele celor ignoranţi, ci şi rolul şi folosul lor pentru aceia care aspiră la ştiinţa perfectă. Meritul cel mai mare al aritmeticei este însă că ea deschide drumul la partea cea mai importantă a filozofiei, adică la cunoaşterea corpurilor şi mişcărilor cereşti. Şi e un îndreptar atât de comod, că după ce am asimilat-o, celelalte ştiinţe sunt foarte uşoare şi accesibile. Dimpotrivă, dacă ne lipsim de ea, suntem ţinuţi la distanţă şi excluşi dela celelalte ştiinţe ca profani. Deaceea, când învăţaţi aritmetică, cugetaţi-vă că cu ajutorul ei, vom înţelege partea cea mai mare a celorlalte ştiinţe. Căci trebue că cineva să fie foarte redus pentru ca acest folos imens să nu-l îndemne să înveţe această ştiinţă, care fiind atât de strâns legată de natura omenească se însuşeşte foarte uşor, dacă e întovărăşită de puţin exerciţiu. Mâna, se zice, este cauza înţelepciunii, înţelegând că ştiinţele nu pot fi complet cunoscute, dacă mâna nu însoţeşte instrucţia şi nu face exerciţii. Aceasta fiind adevărat despre celelalte ştiinţe, aritmetica cere şi mai mult exerciţiu. Deaceea nu uitaţi tinerilor că teoria trebueşte însoţită de exerciţiu*“ ! Mai clar nici nu se putea exprima rolul exerciţiilor în matematici.

* * *

Pentru noi Românii, personalitatea lui MELANCHTON e interesantă şi din alte motive. Se cunosc anume relaţiile de prietenie ce au existat între el şi DESPOT-VODĂ, care în timpul peregrinărilor sale din tinereţe, a găsit în 1533 la Wittenberg, adăpost în casa lui MELANCHTON. Se cunoaşte deasemenea că, DESPOT la 1561, ajungând pe tronul Moldovei, a înfiinţat la Cotnari o şcoală superioară — Academie — la care, printre alţii, a invitat ca profesori

1) IUSTUS IONAS a fost profesor la Wittenberg. Era prieten cu DESPOT-VODĂ.

pe RHETICUS şi pe CASPAR PEUCER[1]), ginerele lui MELANCHTON. Această invitaţie arată nu numai că DESPOT a menţinut relaţiile de prietenie cu cei din Wittenberg, dar pare a fi un indiciu că prin înfiinţarea acestei şcoli voia să joace acelaşi rol de promovator al ştiinţelor, pe care l'a avut MELANCHTON în Germania. Împrejurările l'au împiedecat însă de a-şi împlini visul.

VICTOR MARIAN.

RAPORT ASUPRA PREMIULUI DE ALGEBRĂ

Subsemnaţii, membri ai comisiunii pentru decernarea premiului de Algebră pe anul 1940, aleşi în şedinţa din 28 August 1940 am cercetat lucrările de Algebră ale corespondenţilor noştri, elevi de liceu, români, publicate în *Gazeta Matematică*, anul XLV. Sarcina noastră nu a fost uşoară, căci corespondenţii noştri sunt foarte harnici şi observăm cu adâncă mulţumire între ei o întrecere în a da soluţii cât mai multe şi cât mai bune. Sămânţa aruncată de fondatorii *Gazetei Matematice* dă roade multe şi bune.

Pentru documentarea raportului dăm câteva din constatările făcute.

D-l MIRCEA POPA (Liceul Militar, Iaşi) a dat soluţii la următoarele probleme de Algebră, rezolvate în Volumul XLV: 5115/pag. 271; 5132/pag. 273; 5159/pag. 494; 4910/pag. 594; 5213/pag. 547; 6256/pag. 500. Soluţiile problemelor 5132 şi 5159 sunt menţionate ca foarte bune. Pe copertă este trecut cu 111 probleme rezolvate. A trimis o problemă de propus, o notă şi un articol, care n'au fost încă publicate.

D-l ALEXANDRU I. ROHR (Liceul Militar, Iaşi), a dat soluţii următoarelor probleme: 4887/pag. 378; 5159/pag. 494; 5256/pag. 500; 5213/pag. 547; 5273/pag. 553. La problema 4887 a greşit un calcul, la problema 5256 n'a discutat posibilitatea problemei, soluţiile problemelor 5213 şi 5273 sunt menţionate ca foarte bune. D-sa este trecut pe copertă cu 42 probleme rezolvate.

1) CASPAR PEUCER (1526—1602) a fost între 1554 şi 1559 profesor de matematici la Wittenberg.

D-l MIRCEA G. NICULESCU (Liceul T. Maiorescu, Bucureşti), a dat soluţii următoarelor probleme: 5273/pag. 552; 5159/pag. 494; 5115/pag. 271; 5038/pag. 49. Soluţiile problemelor 5273 şi 5115 sunt menţionate ca foarte bune. A dat singur soluţie problemei 5038. D-sa figurează pe copertă cu 20 probleme rezolvate.

Ne oprim aici cu constatările făcute deşi am putea cita încă corespondenţi foarte sârguitori. Mai menţionăm că D-l MIRCEA POPA a obţinut premiul de Algebră al anului 1939.

Art. 2 din regulamentul premiului glăsuieşte: „Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unor lucrări referitoare la Algebră". Rezultă că premiul s'a instituit mai ales pentru a îndemna elevii de liceu către meditaţii şi cercetări proprii din domeniul Algebrii. Fiindcă avem corespondenţi eminenţi, cu pregătire temeinică şi cunoştinţe întinse, dela care putem cere asemenea lucrări, suntem de părere ca anul acesta să nu se acorde premiul de Algebră.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI DE ALGEBRĂ

TH. ANGHELUŢĂ, M. GHERMĂNESCU, AL. BUNESCU.

Acest raport a fost citit în Adunarea Generală din 20 Februarie 1941. Adunarea nu aprobă concluziunile şi hotărăşte conform raportului ca să se acorde premiul D-lui MIRCEA D. POPA, fiind în acord cu clasificarea din raport.

NOTE MATEMATICE

41. *O rectificare.* D-l Ing. S. KAUFMANN ne face cunoscut că soluţia pe care a dat-o D-sa problemei 2529, rezolvată la pag. 309, Vol. XLV G. M., era schiţată în felul următor:

Fie $a > b > c$ trei termeni oarecari din şirul lui FIBONACCI. Dacă aceşti termeni ar fi consecutivi am avea

$$a = b + c.$$

Cum ei sunt oarecari, avem

$$a > b + c$$

$$\therefore \quad a^n > b^n + c^n + f(bc)$$

şi deci cu atât mai mult

$$a^n > b^n + c^n$$

ceea ce arată că nu putem avea

$$a^n = b^n + c^n.$$

Cu această rectificare, neprecizarea din enunţul problemei dispare.

G-L GH. B.

42. *Asupra ecuaţiei funcţionale*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\varphi(y).$$

D-l VAN DER LYN rezolvă această ecuaţie în *Mathematica*, XVI, pag. 91—96 (Cluj, 1940), presupunând *numai* că f şi φ sunt funcţiuni de variabile complexe. D-sa demonstrează că $f(x)$ e *continuă* (în paragraful 5) şi *olomorfă* (în paragraful 6). De aci se deduce soluţia. Intr'o notă din G. M. XLV N-rul 12 (August 1940), consacrată articolului D-lui VAN DER LYN se propune o soluţie „mai simplă" *derivând* funcţiunea f. Or, în problema tratată, noi nu ştiam nici că f e continuă, necum derivabilă. Deci, nota din G. M. nu corespunde problemei tratate în revista *Mathematica*.

P. SERGESCU.

43. *Notă asupra problemei 5314.* (Vezi soluţia G. M., XLVI, pag. 387).

1°. In soluţia dată acestei probleme, s'a notat cu v_1 viteza lui P după ce s'a ridicat cu înălţimea h. Dacă V este viteza lui P, atunci componentele lui V în coordonate polare sunt:

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} \quad \text{pe raza vectoare}$$

şi

$$r\frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta} \quad \text{pe o direcţie perpendiculară pe raza vectoare.}$$

Dacă problema cere ca înălţimea h să fie un punct maximum la care se ridică P, va trebui să avem:

$$\dot{r} = 0$$

căci în acel punct viteza $\dot{r}$ se anulează, pentru a-şi schimba semnul. Deducem că:

$$V_1 = r\dot{\theta}$$

şi deci v_1 e perpendicular pe fir, ceea ce s'a omis să se spună în soluţie.

2°. Putem determina viteza v în fiecare punct al traiectoriei lui P. Energia cinetică este:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{P+Q}{9} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{P}{g} \cdot (r\dot{\theta})^2 - \frac{P}{2g} v_0^2$$

şi cum trebue să avem:

$$E = -Q(r - r_0)$$

(r_0 fiind distanţa la pol în momentul iniţial, polul fiind gaura mesei). In problemă $r_0 = l$. Obţinem:

$$(1) \quad (P+Q)\dot{r}^2 + P(r\dot{\theta})^2 - Pv_0^2 = -2Qg(r - r_0).$$

Pe de altă parte legea ariilor dă:

$$(2) \quad r^2\dot{\theta} = r_0 v_0.$$

Inlocuind valoarea lui $\dot{\theta}$ din (2) în (1) şi rezolvând în raport cu $\dot{r}$ avem:

$$(3) \quad \dot{r}^2 = \frac{2Qg}{P+Q}(r_0 - r) - \frac{P}{P+Q} \frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} + \frac{P}{P+Q} v_0^2.$$

Mai avem:

$$(4) \quad (r\dot{\theta})^2 = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^2}.$$

Adunând (3) cu (4) obţinem:

$$V^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 = \frac{2Qg}{P+Q}(r_0 - r) + \frac{Q}{P+Q} \frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} + \frac{P}{P+Q} v_0^2.$$

3°. Din (3) şi (4) se deduce că ecuaţia diferenţială a traiectoriei lui P este:

$$(a) \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{r\sqrt{-\frac{2Qg}{P+Q}r^3 + \frac{Pv_0^2 + 2Qgr_0}{P+Q}r^2 - \frac{Pv_0^2}{P+Q}}}{r_0 v_0}.$$

Această integrală este în domeniul funcţiunilor eliptice.

4°. Din studiul lui $\dot{r}$ (3) se poate deduce soluția problemei. Să căutăm valoarea lui v_0 pentru care $\dot{r}=0$; obținem:

$$v_0^2 = \frac{2Qg}{P} \cdot \frac{r^2}{r+r_0}$$

$$\therefore \quad v_0 = \sqrt{\frac{2Qg}{P}} \cdot \frac{r}{\sqrt{r+r_0}} .$$

Făcând aci:

$$r = l+h \quad ; \quad r_0 = l$$

obținem:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2Qg}{P}} \cdot \frac{l+h}{\sqrt{h+2l}} .$$

5°. In soluția dată problemei 5314, expresiile lui v_1 și v_0 sunt greșite; sub radical trebue să se afle factorul $2Qg$, nu Qg.

EMIL S. MODÂLCĂ
Student Politechnica București.

Mișcarea după ce Q *s'a ridicat cu înălțimea* h. Mobilul Q va începe să coboare. Totuși Q nu va coborî atât încât și greutatea P să cadă prin gaura mesei. Se poate constata din ecuația (*a*) că variația lui *r* va fi periodică, lungimea firului depe masă variind între

$$r_0 \leqslant r \leqslant r_0 + h$$

această variație făcându-se într'un timp finit.

In adevăr, în ecuația (*a*) scrisă sub forma:

$$\dot{r}^2 = \frac{r - r_0}{(P+Q)\,r^2} \left[P v_0^2 (r + r_0) - 2g\,Q r^2\right]$$

se vede că paranteza e un polinom de gr. II în *r*, cu 2 rădăcini reale și de semn opus. Rădăcina pozitivă este r_0+h și scriind aceasta obținem valoarea lui v_0. Dacă $-\rho$ este rădăcina negativă (ușor de calculat efectiv), avem

$$\dot{r}^2 = \frac{2g\,Q}{(P+Q)\,r^2} (r_0 + h - r)(r - r_0)(r + \rho).$$

Cum $\dot{r}^2$ trebue să fie pozitiv sau nul, rezultă că avem totdeauna

$$r_0 \leqslant r \leqslant r_0 + h.$$

Timpul pus pentru variaţia lui r între limitele acestea e finit, căci integrala:

$$\int dt = \int \frac{dt}{dr}\, dr = K \int_{r_0}^{r_0+h} \frac{r\,dr}{\sqrt{(r_0+h-r)(r-r_0)(r+\rho)}}$$

e convergentă, deşi funcţia e infinită la extremităţile intervalului de integrare.

Variaţia lui r e deci periodică.

G. Ţ.

CHESTIUNI DE EXAMEN

CONCURSUL «GAZETEI MATEMATICE» DIN ANUL 1941

24 — 25 Aprilie 1941

CLASA IV-a

Geometria. I. Să se arate că printr'un punct în spaţiu se poate duce un singur plan paralel la două drepte oarecare.

II. Se dă o piramidă triunghiulară SABC. Printr'un punct A' al muchiei SA se duce un plan paralel la muchiile opuse SC, AB. Fie B', A_1, B_1 intersecţiile acestui plan cu celelalte muchii: SB, BC, CA. Se cere:

1°. Să se arate că figura $A'B'A_1B_1$ este un paralelogram.

2°. Notând muchiile BC, CA, AB cu a, b, c şi muchiile SA, SB, SC cu a', b', c', iar $\overline{SA'}$ cu m, să se calculeze laturile paralelogramului.

3°. Să se determine punctul A' aşa fel ca perimetrul paralelogramului $A'B'A_1B_1$ să fie o cantitate dată $2p$.

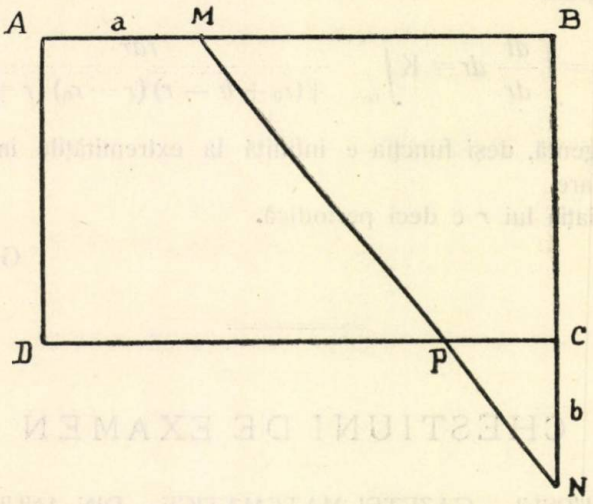
4°. Să se arate că dacă SC = AB, paralelogramul are un perimetru constant, oricare ar fi punctul A' pe SA.

5°. Să se determine punctul A' aşa fel ca paralelogramul să devină un romb, căruia să i se calculeze latura.

6°. Cum trebue să fie piramida SABC pentruca paralelogramul $A'B'A_1B_1$ să devină un dreptunghiu?

NOTĂ. Se va da deosebită atenţie desenului şi se va ţine seama că dreptele paralele din spaţiu se desenează tot ca drepte paralele.

Algebra. I. In dreptunghiul ABCD, fie pe latura AB punctul M astfel că $AM = a$ şi pe prelungirea laturei BC punctul N astfel că $CN = b$, $a > b$.



Dreapta MN taie pe CD în P. Dacă aria triunghiului MBN este jumătate din aria dreptunghiului, iar

$$PD - PC = MB,$$

să se afle laturile dreptunghiului şi perpendiculara coborîtă din M pe BD.

II. Să se găsească relaţia dintre a şi b ştiind că între rădăcinile sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{x}{bx+a} - \dfrac{y}{ay-b} = \dfrac{a+b}{ab} \\ \dfrac{(a-b)\,x}{a+b} + \dfrac{(a+b)\,y}{a-b} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \end{cases}$$

există relaţia:

$$\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = \frac{ab}{xy}.$$

(Ambele chestiuni obligatorii).

CLASA V-a

Geometria. Fie U un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC. Perpendiculara din B pe simetrica dreptei AU faţă de AB taie paralela din C la AB în X. Perpendiculara din C pe simetrica dreptei AU faţă de AC taie paralela din B la AC în Y.

Dacă B, C, U sunt fixe iar A descrie cercul $(a) \equiv BCU$ să se arate că X şi Y descriu două cercuri (x) şi (y) care trec prin B, C.

1°. Condiţiunea ca $(x) \equiv (y)$. In acest caz centrul comun este aşezat pe cercul (a).

2°. Condiţiunea ca $(x) \equiv (a)$. Ce devine (y)?

Algebra. I. Să se rezolve şi să se discute sistemul următor

$$(x^6 - y^6) - (1 + 2\lambda^2)(x^2 - y^2) = 0$$

$$xy - \lambda^2 = 0$$

în care λ este un parametru real.

II. Se dă fracţia

$$F = \frac{\sqrt{a - \frac{b}{2}} + 3\sqrt{\frac{b}{2}}}{\sqrt{a + 6bm + 3\sqrt{3abm - b^2}}}$$

şi se cere:

1°. Să se determine m aşa fel încât numitorul să poată fi făcut raţional printr'o amplificare a fracţiei cu o expresie de forma numărătorului.

2°. Să se arate că pentru valoarea pozitivă a lui m astfel găsită, valoarea fracţiei devine egală cu 1.

CLASA VI-a

Trigonometria. 1°. Fie

$$2A = \sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x}$$

$$2B = \sqrt{1 - \sin 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x}.$$

Să se arate că putem avea relaţiile

$$A = \pm \sin x \quad , \quad A = \pm \cos x \quad , \quad B = \pm \sin x \quad , \quad B = \pm \cos x,$$

şi să se arate că relaţiile

$$A = -\sin x \quad , \quad A = -\cos x \quad \text{şi} \quad B = \sin x$$

nu pot fi valabile pentru

$$0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Discuţie.

2°. Să se demonstreze că într'un triunghiu oarecare ABC, avem relaţia

$$a \cos(B + \alpha) + b \cos(A - \alpha) = c \cos\alpha,$$

unde α este un unghiu oarecare; apoi să se deducă relaţia

$$\cos 2A_1 \sin(2B_1 - \alpha) + \cos 2B_1 \sin(2A_1 + \alpha) = \cos 2C_1 \cos\alpha$$

unde

$$A_1 + B_1 + C_1 = \frac{\pi}{4}.$$

3°. Să se rezolve un triunghiu oarecare ABC, căruia i se cunoaşte latura a, unghiul A şi raza cercului înscris r.

Geometria. Se dau în spaţiu două drepte (A), (B) şi fie $\alpha\beta$ perpendiculara lor comună. Prin mijlocul O al lui $\alpha\beta$ se duce un plan H paralel la cele două drepte (A), (B).

Să se arate că:

1°. In planul H există două drepte Oi, Oj ale căror puncte sunt egal depărtate de dreptele (A), (B).

2°. A şi B fiind proiecţiile unui punct oarecare I de pe Oi (de exemplu), mijlocul m al segmentului AB se găseşte pe Oi.

3°. Pe orice dreaptă v perpendiculară pe planul H există un punct egal depărtat de dreptele (A), (B).

4°. In orice plan V, perpendicular pe Oi, într'un punct oarecare m, există o dreaptă mn loc geometric de puncte egal depărtate de dreptele (A), (B) şi care face cu planul H un unghiu p, astfel că, dacă q este unghiul ce-l face dreapta AB — din planul V sprijinindu-se pe (A), (B) — cu planul H, iar 2θ este unghiul dreptelor (A), (B); există relaţia:

$$\operatorname{tg} p \cdot \operatorname{tg} q = -\cos^2\theta.$$

5°. Dacă o dreaptă A'B' se sprijină pe dreptele (A), (B) fiind paralelă cu mn — să se dea construcţia şi să se arate că e una singură — locul geometric al punctelor egal depărtate de dreptele (A), (B) în planul V' dus perpendicular prin A'B' la Oi, este o dreaptă $m'n'$, paralelă la AB (m' fiind mijlocul lui A'B' pe Oi).

6°. Dreptele m'A, m'B sunt proiecţiile sub un unghiu $p + q$, al dreptelor (A), (B) pe planul S definit pe Oi şi AB.

7°. Dreapta $m'n'$ este bisectoarea exterioară a unghiului Am'B.

8°. Intre m şi m' există relaţia:

$$\overline{Om} \cdot \overline{Om'} = -\frac{h^2}{\sin^2\theta},$$

unde $2h$ este mărimea perpendicularei comune.

9°. Rezultă: In orice plan S trecând prin Oi şi făcând un unghiu q cu planul H există o dreaptă $m'n'$ loc geometric de puncte egal depărtate de dreptele (A), (B) şi astfel că:

$$\overline{Om'} = -\frac{h}{\sin\theta\cos\theta} \cdot \operatorname{tg} q.$$

Notă. Se va da deosebită atenţie desenului care trebue să facă imagine în spaţiu. Se va păstra principiul că dreptele paralele din spaţiu sunt paralele şi în desen (perspectiva cavalieră). Perpendiculara comună $\alpha\beta$ se va lua verticală. Planul V se va putea lua trecând prin dreapta v. Punctele m, A, B dela 2° se pot păstra aceleaşi la 4°, 5°, etc. pentru a nu îngreuia figura.

CLASA VII-a

Algebra. I. Să se discute sistemul:

$$x\cos^2\frac{\beta}{2}+y\cos^2\frac{\alpha}{2}=x\cos^2\frac{\gamma}{2}+z\cos^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=y\cos^2\frac{\gamma}{2}+z\cos^2\frac{\beta}{2}=\frac{x+y+z}{2},$$

unde

$$\alpha+\beta+\gamma=k\pi \qquad (k \text{ intreg}).$$

Să se rezolve acest sistem.

II. Se dau funcţiunile:

$$f(x)=\frac{1}{a^3}\left(\frac{5x^4}{4}-\frac{2ax^3}{3}+2a^2x^2-6a^3x\right)+b$$

$$F(x)=\frac{\sqrt{3}}{b^4}\left(\frac{9x^5}{5}+\frac{b^2x^3}{3}-2b^3x^2-6b^4x\right)+a.$$

Să se studieze variaţia ariei triunghiului format de axa $x'x$ cu tangentele la curbele reprezentative ale funcţiunilor $y=f(x)$, $y=F(x)$ respectiv în punctele A, B de abscise a, b când a şi b sunt variabili însă într'un raport constant.

Geometria descriptivă. Pe a doua pagină a coalei de hârtie se va trasa linia pământului la 10 cm de sus în jos paralelă cu marginea cea mare a foii.

La 10 milimetri dela marginea din stânga a foii, pe linia pământului se fixează punctul O.

Se dau punctele:

A (74, 40, 60) *) ; B (91, 90, 20) ; C (115, 50, 50) şi D (156, 25, 80).

Se cere:

1) Adevărata mărime a distanţei dela punctul D la planul determinat de punctele A, B şi C.

2) Adevărata mărime a distanţei dela punctul D la punctul de întâlnire al medianelor triunghiului ABC.

3) Unghiurile pe care le face cu planele de proiecţiune perpendiculara coborâtă din D pe planul ABC.

---

*) Cele trei numere din parenteză, reprezintă:
Primul depărtarea liniei de ordine a punctului de punctul O;
al doilea depărtarea punctului de planul vertical de proiecţiune;
al treilea cota punctului deasupra planului orizontal de proiecţiune.
Numerele reprezintă milimetri.

CLASA VIII-a

Algebra. Studiind natura rădăcinilor unei ecuaţii algebrice

$$(1) \qquad f(z) = 0$$

cu ajutorul teoremei lui ROLLE, după aşezarea în plan a punctului $P(x\ y)$, se obţin curbele separatoare

$$(C) \qquad x^2 + y^2 - \lambda^2 = 0$$

$$(E) \qquad x^2 + \lambda y^2 - 1 = 0$$

$$(H) \qquad x^2 - \lambda y^2 - 1 = 0$$

în care λ este un parametru real.

Se cere:

1°. Să se determine ecuaţia (1) ştiind că prima sa derivată admite o rădăcină identic nulă.

2°. Să se arate că există totdeauna trei ecuaţii care răspund problemii.

3°. Să se studieze natura rădăcinilor acestor ecuaţii pentru o valoare dată a parametrului λ.

4°. Parametrul λ variind să se studieze variaţia naturii rădăcinilor ecuaţiilor (1). Cazuri particulare importante.

5°. Să se compare rezultatele determinându-se regiunile din plan pentru care cele trei ecuaţii (1) sau numai două, au rădăcinile de aceeaşi natură. Cazuri particulare importante.

Geometria analitică. Se consideră două drepte OD, OD', şi un punct A pe bisectoarea lor. Prin A se duce o dreaptă Δ care taie dreptele date după două segmente egale OB şi OC. Polara unui punct oarecare M de pe Δ, în raport cu cercul circumscris triunghiului OBC, taie dreptele OD şi OD' în P şi Q. Se cere:

1°. Să se arate că atunci când M descrie dreapta Δ, dreapta PQ trece printr'un punct fix A'.

2°. Dacă R şi S sunt proiecţiile lui P şi Q respectiv pe OD' şi OD, să se arate că dreapta RS trece prin A.

3°. Dacă A_1 şi A_2 sunt proiecţiile lui A' pe aceleaşi drepte, să se arate că PQ, RS, A_1A_2 sunt concurente.

4°. Dacă E este mijlocul segmentului PQ, să se găsească locul geometric al punctului F, simetricul lui A' faţă de E, când M se mişcă pe Δ.

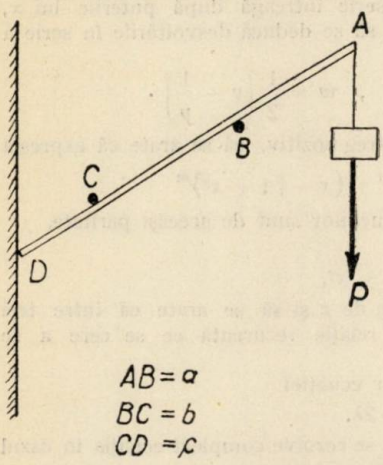
5°. In aceleaşi condiţiuni să se găsească locul centrului de greutate al triunghiului OPQ. Să se reprezinte acest loc, precum şi cel dela No. precedent.

6°. Dacă G este centrul cercului circumscris triunghiului OBC, să se demonstreze relaţia

$$4EG^2 - PQ^2 = \frac{OB^2}{\cos^2\theta},$$

2θ fiind unghiul dreptelor OD, OD'.

Mecanica. *Problema 1.* O bară ABCD, de greutate neglijabilă, înclinată cu unghiul α pe orizontală, este simplu rezemată pe două cuie B şi C şi se sprijină în D pe un zid vertical. In A se atârnă o greutate P.



I. Elementele geometrice fiind date în figură, să se determine, neglijând frecările :

a) Reacţiunile în B, C şi D.

b) Condiţia ca, *scoţând cuiul* C, bara să continue a rămâne în echilibru.

II. Presupunând că, *bara nu se mai sprijină în* D *pe zid* şi ţinând seama de frecările pe cuie, să se determine coeficientul de frecare minim (acelaşi pentru ambele cuie) astfel încât bara să rămână în echilibru în poziţia din figură.

Toate elementele geometrice şi mecanice date se găsesc într'un acelaşi plan vertical perpendicular pe zid.

Problema 2. Un avion, sburând cu iuţeala $v = 300$ km/oră, într'un plan orizontal, la înălţimea $h = 4000$ m, surprinde o coloană motorizată, de lungime $l = 800$ m aflată în mers cu iuţeala $v_1 = 30$ km/oră pe o şosea rectilinie orizontală.

Să se determine direcţia avionului cea mai favorabilă pentru atacul convoiului. Presupunând că pentru lansarea unei bombe sunt necesare $t = 2$ secunde, să se găsească numărul maxim de bombe ce pot fi aruncate din avion astfel încât să cadă în cadenţă una după alta direct asupra coloanei.

Să se determine timpul dela lansarea bombei până la atingerea ţintei, precum şi distanţa măsurată pe orizontală dintre verticala locului de lansare şi ţinta atinsă.

Rezistenţa aerului se va neglija.

ANUL I AL ŞCOALEI POLITECHNICE

Algebra. Fiind dată funcţiunea

$$(1) \qquad y = (x + \sqrt{1 + x^2})^m$$

în care m este un parametru real, se cere :

1°. Să se calculeze limitele

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x^m} \quad \text{şi} \quad \lim_{x \to -\infty} (-x)^m y.$$

2°. Să se studieze variaţia funcţiei (1) pentru toate valorile reale ale parametrului m, figurându-se curba reprezentativă.

3°. Să se găsească locul punctelor de inflexiune ale curbei (1) atunci când ele există şi să se construiască curba-loc.

4°. Să se desvolte funcţia (1) în serie întreagă după puterile lui x, determinându-se intervalul de existenţă şi să se deducă desvoltările în serie a funcţiunilor

$$u = \frac{1}{y} \quad , \quad v = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right) \quad , \quad w = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right).$$

5°. Parametrul m fiind un număr întreg pozitiv, să se arate că expresia

$$P_m(x) = (x + \sqrt{1 + x^2})^m + (x - \sqrt{1 + x^2})^m$$

este un polinom în x în care gradele termenilor sunt de aceeaşi paritate.

6°. Punând

$$z = x + \sqrt{1 + x^2},$$

să se exprime polinomul $P_m(x)$ în funcţie de z şi să se arate că între trei polinoame consecutive $P_m(z)$ există o relaţie recurentă ce se cere a se preciza.

7°. Să se studieze natura rădăcinilor ecuaţiei

$$P_m(z) = 2\lambda,$$

pentru toate valorile parametrului λ şi să se rezolve complect ecuaţia în cazul

$$m = 2n \quad \text{şi} \quad \lambda = \cos\alpha.$$

Rădăcinile sunt totdeauna distincte?

Geometria analitică. I. Se consideră, în raport cu două axe perpendiculare, triunghiul ale cărui vârfuri au coordonatele:

$$A(0,\ a + \alpha) \quad , \quad B(b + \alpha,\ 0) \quad , \quad C(c + \alpha,\ 0),$$

a, b, c fiind trei numere fixe, iar α un parametru variabil. Pe dreapta HG, ce uneşte ortocentrul cu centrul de greutate al triunghiului, se consideră un punct M definit prin relaţia

$$\frac{\overline{MH}}{\overline{MG}} = -k.$$

Se cere:

1°. Locul punctului M şi natura lui după diferitele valori ale lui k. Ce se întâmplă când $a = c$ (sau $a = b$)?

2°. Înfăşurătoarea dreptei AB. Curba găsită este o parabolă. Să i se găsească vârful, axa, directoarea şi parametrul.

II. Se consideră dreptele

$$(\Delta) \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

$$(D) \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0; \end{cases} \qquad (D') \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

şi se cere:

1°. Să se găsească condiţia ca dreapta (Δ) să fie paralelă cu planul determinat de dreptele (D) şi (D'). Discuţie.

2°. Să se găsească condiţiile ca dreapta (Δ) să fie perpendiculară în acelaşi timp pe ambele drepte (D) şi (D'). Discuţie.

Aplicaţie. Să se găsească perpendiculara comună dintre dreapta (D) ce trece prin punctele A(0, 0, a), B(0, b, 0) şi bisectoarea unghiului xOz.

Mecanica. *Problema 1.* Peste un râu se construeşte din 4 grinzi AB, CB, DE şi FH, de greutate neglijabilă, puntea din figură. Grinzile AB şi CB se sprijină în A şi C pe un mal al râului iar în B pe grinda DE ($BE = \frac{1}{4} DE$). Grinda DE este simplu rezemată în D pe celălalt mal, iar în E în mijlocul grinzii HF. Grinda FH se sprijină la rândul său în H şi F mijlocul grinzilor AB şi CB. In I mijlocul lui DE se aplică o greutate P. Se cer reacţiunile în A, C, D, H, E, F şi B.

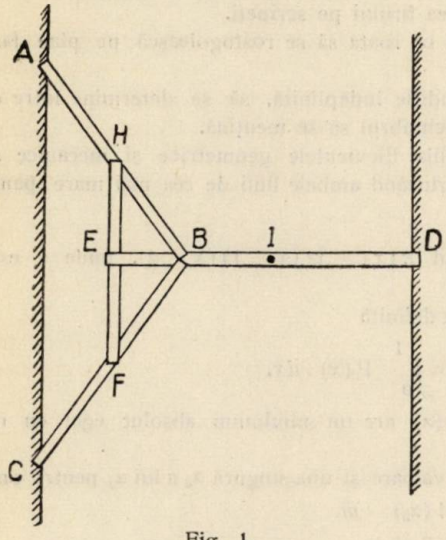


Fig. 1.

Problema 2. Pe două plane înclinate respectiv cu unghiurile α şi β pe orizontală sunt aşezate un corp A de greutate P şi o roată de greutate Q şi rază r; ele sunt prinse printr'un fir ce trece peste scripeţii fixi S_1 şi S_2 (porţiunile

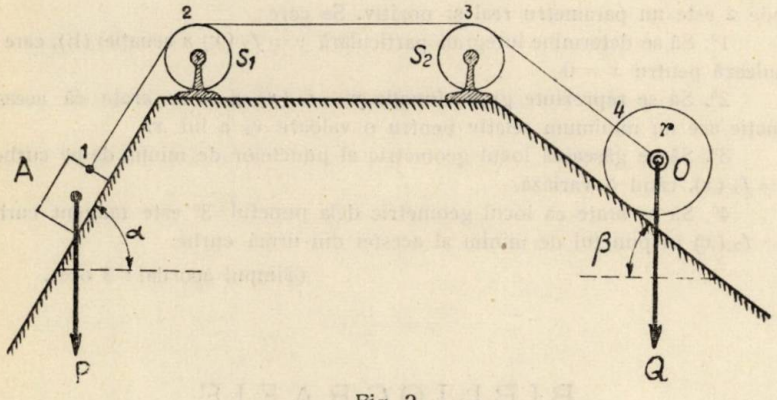


Fig. 2.

1—2 şi 3—4 ale firului sunt paralele cu liniile de cea mai mare pantă ale planelor înclinate, iar porţiunea 2—3 este orizontală; în O firul prinde osia roţii).

Se dau:

— Coeficientul μ de frecare de lunecare al celor două corpuri pe planurile înclinate.

— Coeficientul s de frecare de rostogolire al roții.

— Coeficientul μ_1 de frecarea firului pe scripeți.

a) Să se determine condiția ca roata să se rostogolească pe plan fără să alunece.

b) Presupunând această condiție îndeplinită, să se determine între ce valori poate varia P astfel încât echilibrul să se mențină.

Greutatea firului se va neglija. Elementele geometrice și mecanice se găsesc în același plan vertical cuprinzând ambele linii de cea mai mare pantă ale planelor înclinate.

Analiza. I. Se dă polinomul $P(x) = x^2(x-1)(x-\alpha)$, unde α este un număr real. Se cere:

1°. Să se calculeze integrala definită

$$I(\alpha) = \int_0^1 |P(x)|\, dx.$$

2°. Să se arate că funcția $I(\alpha)$ are un minimum absolut egal cu un număr pozitiv m.

3°. Să se arate că există o valoare și una singură α_0 a lui α, pentru care

$$I(\alpha_0) = m.$$

Acest număr α_0 este cuprins între 0 și 1.

4°. Să se calculeze α_0 cu două zecimale exacte.

II. Se dă ecuația diferențială

$$(E) \qquad y' - y = e^{\alpha x},$$

unde α este un parametru real și pozitiv. Se cere:

1°. Să se determine integrala particulară $y = f_\alpha(x)$ a ecuației (E), care se anulează pentru $x = 0$.

2°. Să se reprezinte grafic funcția $y = f_\alpha(x)$ și să se arate că această funcție are un minimum relativ pentru o valoare x_α a lui x.

3°. Să se găsească locul geometric al punctelor de minim de pe curbele $y = f_\alpha(x)$, când α variază.

4°. Să se arate că locul geometric dela punctul 3° este tangent curbei $y = f_\alpha(x)$ în punctul de minim al acestei din urmă curbe.

(Timpul acordat: 3 ore).

BIBLIOGRAFIE

Bulletin Mathématique de la Société roumaine des sciences. Tome 42 (1), 1940. București 1941.

Sur un problème de statique par DAN. I. HULUBEI. Sur l'annulation de la réaction dans le cas du pendule sphérique par DAN I. HULUBEI. Sur quelques propriétés de la correspondance de M. TCHAPLIGUINE en dynamique des fluides

compressibles, par CAIUS JACOB. Sur les géodésiques des espaces de RIEMANN singuliers, par GR. C. MOISIL. Sur les suites doubles, par MIRON NICOLESCO. Correspondance entre deux surfaces à axes confondus, par AL. PANTAZI. Introduction à la théorie des différences divisées, par T. POPOVICIU. La géométrie de l'équation des ondes, par N. THÉODORESCO. Sur les invariants des équations aux dérivées partielles du second ordre, par G. VRANCEANU.

Bulletin de Mathématique et de Physiques pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique de Bucarest. XI Année (1939—1940), Nr. 1, 2, 3. Bucureşti 1940.

Sur l'équation fonctionnelle de POINSOT généralisée, par RADU BĂDESCU. La géométrie et les imaginaires: démonstration de quelques théorèmes élémentaires, par D. POMPEIU. Sur les polygones réguliers de quinze et de trente côtés, par V. THÉBAULT. Les réseaux conjugués à transformés de LAPLACE en correspondance asymptotique, par TIBERIU MIHAÏLESCO. Sur une classe d'équation intégrales et leurs applications à la statistique, par N. PRAPORGESCO. Le calcul des corrections balistiques et atmosphériques dans le tir antiaérien, par le C-dor I. LINTEŞ. Sur la détermination des caractéristiques aérodynamiques des profils déformés, par E. CARAFOLI. Une nouvelle méthode pour le calcul des performances d'un avion, par N. TIPEI.

Disquisitiones mathematicae et physicae. Tomul I. Fasc. 2. (Publicaţiunile Institutului Regal de cercetări ştiinţifice al României). Bucureşti 1940.

Notes sur le fonctions convexes d'ordre supérieur (IV), par TIBERIU POPOVICIU. Nouvelles recherches sur les fonctions polyharmoniques, par MIRON NICOLESCO. Remarques sur mon mémoire: recherches sur les fonctions polyharmoniques, par MIRON NICOLESCO. Sur les espaces métriques non-holonomes complémentaires, par K. YANO et ST. PETRESCU. Sur le mouvement tautochrone plan, par MICHEL GHERMANESCU. Reflexions sur des ondes electromagnétiques par des milieux aux constantes optiques variable d'une façon continue, par CONSTANTIN MIHUL.

Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine. Tome XXII. Supliment. *Bibliographie des travaux scientifiques*, parus en 1939.

Idem. Tome XXI. Nr. 7—8. N. VASILESCU-KARPEN. Les équations d'Efect et la thermodynamique. T. ANGHELUTZA. Sur une limite des modules des zéros des polynomes. D. V. IONESCO. Sur l'application d'une formule de T. J. STIELTJES. à un problème de D. POMPEIU.

Buletinul Cadastral „Sintec". Vol. III. Nr. 1—6. Bucureşti 1941. Retrointersecţia. Un nou procedeu de calcul de V. A. MARTINIAN. Calculul topometric cu maşini duble de calcul, de A. COSTĂCHEL.

Bulletin de la Section Scientifique de l'Academie Roumaine. Tome XXIII-ème. Nr. 6. CAÏUS JACOB, Sur un problème de M. SLIOSKINE.

Idem. Nr. 9. GABRIEL BADARAU, Sur l'expression du coefficient de transmission d'une barrière de potentiel columbien en termes de fonctions développables en série.

Buletinul Societăţii Politechnice. Anul LV. Nr. 1. Ianuarie 1941. Bucureşti.

Pozitiva. Anul I. Nr. 8. 10 Aprilie 1941. Bucureşti. Asupra unor teoreme de geometrie de G. G. CONSTANTINESCU. Despre rădăcini comune a două ecuaţii binoame de M. MĂNESCU.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXI. Nr. 2. Aprilie 1941. Combinări generalizate de D-ra F. BRATILA şi P. SERGESCU.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXVII. Nr. 1. Ianuarie-Martie 1941. Bucureşti.

România Aeriană Anul XV. Nr. 3. Martie 1941. Bucureşti.

Universidad Nacional de La Plata. Publicaciones de la Facultad de Ciencias Fisicomatematicas. No. 137, 138. La Plata (Argentina). Octomvrie 1940.

CPT. ED. DRAGOMIRESCU-BUZNE. *Sintetizarea progreselor in domeniul explosivelor.* (Extras din Revista Artileriei 1939).

CPT. ED. DRAGOMIRESCU-BUZNE. *Proiectilele ghintuite.* (Extras din Revista Artileriei 1939)

CPT. ED. DRAGOMIRESCU-BUZNE şi LT. A. I. STAN. *Avionul armă anticar?* (Extras din Reviste Artileriei 1939).

MAIOR M. BĂNULESCU şi CPT. ED. DRAGOMIRESCU-BUZNE. *Studiul reculului în construcţia unei guri de foc.* (Extras din Revista Artileriei 1940).

COMANDOR I. LINTEŞ. *Cercetări în domeniul balisticei exterioare.* (Extras din Revista Artileriei 1941).

CPT. I. GH. ZAMFIRESCU. *Proiectile şi ţevi centrifugate.* (Extras din Revista Artileriei 1940).

CAIUS JACOB. *Despre amortizarea împrumuturilor.* (Extras din *Pitagora*, V, 7—8). Bucureşti 1940.

CAIUS JACOB. *Sur quelques propriétés de la correspondance de* M. TCHAPLIGUINE *en dynamique des fluides compressible* (Extras din *Bulletin Mahtématique* de la Société Roumaine des sciences. Tome XLII). Bucureşti 1940.

CAIUS JACOB. *Asupra unor funcţiuni armonice de două variabile.* (Extras din *„Pozitiva"*, Anul I, Nr. 3). Bucureşti 1940.

CAIUS JACOB. *Sur une problème de* M. SLIOSKINE. (Extras din *Bulletin* de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine). Bucureşti 1941.

GR. C. MOISIL. Sur un algorithme généralisant la théorie des fonctions monogênes, qui peuvent être utile pour l'intégration des équations aux dérivée partielles d'ordre supérieur (Analele Academiei Române. Memoriile Secţiunii ştiinţifice. Seria III. Tomul XVI. Mem. 17). Bucureşti 1941.

I. I. PLĂCINŢEANU. Electromagnetismul. Teoria lui MAXWELL. (Academia Română. Monografii ştiinţifice IV). Bucureşti 1941.

CERERI

301. Pitagoricianii numeau *gnomon* figura care rămânea dintr'un patrat din care se scotea un patrat mai mic dela un colţ. Figurii formate din două dreptunghiuri alăturate ABCD, AEFG aşa ca vârful A să fie comun, laturile AD, AG în prelungire iar E pe AB, i se zice, în construcţiuni, *colţar* sau *cornieră*. Ele se pot generaliza prin alăturarea a două paralelograme. Aş dori un studiu investigativ al proprietăţilor geometrice şi mecanice ale *colţarelor*.

I. IONESCU.

DIVERSE

a) Şedinţe.

Societatea Română de Matematici a ţinut şedinţe în 7.IV şi 28.IV cu următoarele comunicări:

V. VÂLCOVICI. Asupra unor traiectorii plane.

N. TEODORESCU. Asupra premiului mobil la loteria de Stat.

G. G. CONSTANTINESCU. Asupra unei teoreme a D-lui POMPEIU.

E. MACOVSCHI. Aplicarea metodei celor mai mici patrate la calculul constantelor de otrăvire.

O. ONICESCU. Asupra unei teoreme a lui CRAMER.

C. IACOB. Problema derivatei oblice a lui POINCARÉ.

b) Sporirea Bibliotecii.

LUIGI BIANCHI. Lezioni di Geometria differenziale. Vol. I, II, III, IV. Bologna.

G. PAPELIER. Leçons sur les Coordonnées Tangentielles. Paris 1894.

GASTON DARBOUX. Leçons sur théorie générale des surfaces. Vol. I, II, III, IV. Paris 1887, 1889, 1896.

GASTON DARBOUX. Leçons sur les Systèmes Orthogonaux et les Coordonnées Curvilignes Tome I. Paris 1898.

W. DE TANNENBERG. Leçons nouvelles sur les applications géométriques du calcul différentiel. Paris 1899

FELIX KLEIN. Vorlesungen über nicht-Euklidische Géometrie. Berlin 1928.

B. L. VAN DER WAERDEN. Algebraische Geometrie. Berlin 1939.

E. CARTAN. Leçons sur la Géométrie projective complexe. Paris 1931.

GEORGES TZITZEICA. Géométrie Différentieile Projective des Réseaux. Bucureşti 1923.

G. FUBINI — E. CECH. Geometria Proiettiva Differenziale. Tomo I, II. Bologna.

CLEMENT VIDAL. Pour la Géométrie Euclidienne. Paris 1900.

M. C. GUICHARD. Les courbes de l'espace a *n* dimensions. Fasc. XXIX. Paris 1928.

M. C. GUICHARD. Théorie des Réseaux. Fasc. LXXIV. Paris 1935.

M. C. GUICHARD. Théorie générale des réseaux, applications. Fasc. LXXVII. Paris 1936.

AUBERT et PAPELIER. Exercices de Géométrie Analytique. Tome, I, II, III. Paris 1930, 1933.

E. MOSNAT. Problèmes des Géométrie Analytique. Tome I. Paris 1919.

X. ANTOMARI. Cours de Géométrie Descriptive. Paris 1897.

J. CARON. Cours de Géométrie Descriptive, Part. I. texte. Part. II. planches. Paris 1895.

J. CARON. Cours de Géométrie Descriptive. (Droite et plan). Paris 1896.

A. JAVARY. Traité de Géométrie Descriptive. Paris 1889.

Donate de familia decedatei PREDUȚA D. BUNGEȚIANU.

c) D-l ARGHIRIADE, membru al Soc. *Gazeta Matematică*, a obținut în ziua de 29 Mai 1941, titlul de doctor în matematici dela Universitatea din Iași, cu teza tratând despre:

Geometria axială diferențială a curbelor strâmbe.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2112. *Un tub cilindric de tablă de fier groasă de 1 mm, de lungime* l *și de diametru* d *este astupat la un capăt cu un capac tot de tablă și deschis la celălalt capăt. Se dă drumul tubului pe apă. Se întreabă dacă se va mai cufunda acest tub, și în caz că nu, se cere o poziție de echilibru.*

GH. EM. FILIPESCU.

I. Să considerăm dimensiunile l și d ca fiind cele exterioare tubului. Să notăm cu ρ greutatea specifică a materialului din care este confecționat tubul (pentru tablă de fier $\rho = 7{,}85$ g/cm³) cu γ greutatea specifică a lichidului (pentru apă $\gamma = 1$ g/cm³) și cu a grosimea tablei.

Greutatea G a tubului este:

$$G = \frac{\pi d^2}{4} . a . \rho + \frac{\pi}{4} [d^2 - (d - 2a)^2] (l - a) \rho$$

$$G = \frac{\pi a \rho}{4} [d^2 + 4 (l - a) (d - a)]. \qquad (1)$$

Forţele ce acţionează tubul sunt: greutatea sa şi subpresiunea apei. Pentru echilibru aceste două forţe trebuesc să fie *egale* şi *direct opuse.*

In cazul când subpresiunea nu poate egala greutatea, echilibrul tubului este imposibil iar tubul se cufundă.

Fie z distanţa măsurată pe axul tubului dela nivelul apei la faţa exterioară a fundului. Volumul de lichid deslocuit de tub este:

$$V = \frac{\pi d^2}{4} . z$$

iar subpresiunea conform principiului lui ARCHIMEDE:

$$P = \frac{\pi d^2}{4} z\gamma.$$

Condiţia de egalitate dintre greutate şi subpresiune ne dă:

$$G = P \qquad (2)$$

$$\frac{\pi d^2}{4} z\gamma = \frac{\pi a\rho}{4} [d^2 + 4(l - a)(d - a)].$$

De unde:

$$z = \frac{a\rho}{d^2\gamma} [d^2 + 4(d - a)(l - a)].$$

Pentru $z > l$ nu poate exista nicio poziţie de echilibru, tubul se cufundă.

Pentru $z \leqslant l$ există cel puţin o poziţie de echilibru *stabil* sau *instabil* atunci când *axul tubului este vertical.*

In cazul datelor problemei, grosimea tubului este considerată neglijabilă faţă de diametru şi lungimea tubului.

Exprimând toate lungimile în milimetri avem:

$$G = \frac{7{,}85\,\pi d}{4} (d + 4l) \text{ miligrame}$$

$$P = \frac{\pi d^2}{4} z \text{ miligrame}$$

$$z = \frac{7{,}85}{d} (d + 4l) \text{ milimetri} = 7{,}85 + \frac{31{,}4}{d} . l.$$

Cu aceste date putem forma următorul tablou:

Tubul se cufundă în cazurile:	$d < 31{,}4$ mm	$z > l$
	$d > 31{,}4$ mm $\quad l < \dfrac{7{,}85\, d}{d - 31{,}4}$	
Tubul are cel puţin o poziţie de echilibru în cazul:	$d \geqslant 31{,}4$ mm $\quad l \geqslant \dfrac{7{,}85\, d}{d - 31{,}4}$	$z \leqslant l$

Să căutăm acum să găsim şi alte poziţiuni de echilibru.

Vom avea de studiat cazurile date în figurile A şi B după cum fundul tubului se găseşte complect sau incomplect cufundat în apă.

II. *Cazul A.*

In această ipoteză exprimând prima condiţie de echilibru (2) prin egalarea subpresiunii cu greutatea regăsim valoarea:

$$z = \frac{a\rho}{d^2\gamma}[d^2 + 4(d - a)(l - a)].$$

Ne rămâne a formula condiţia a doua şi anume că forţele G şi P să fie direct opuse adică pe aceeaşi verticală.

Pentru aceasta va trebui să determinăm centrul de greutate O al tubului şi centrul de subpresiune O_1 al lichidului.

Să considerăm sistemul de axe de coordonate Ax, Ay date în figură; să notăm cu x_G; y_G coordonatele lui O şi cu x_p; y_p coordonatele lui O_1. Avem: $x_G = 0$.

Prin momente statice în raport cu Ay:

$$G \times y_c = \frac{\pi d^2}{4} a\rho \frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}[d^2 - (d - 2a)^2](l - a)\rho \frac{l + a}{2}.$$

Inlocuind pe G prin valoarea sa din (1) şi simplificând:

$$y_G = \frac{ad^2 + 4(l^2 - a^2)(d - a)}{2[d^2 + 4(l - a)(d - a)}.$$

Coordonatele x_p; y_p le găsim în Hütte I (în ediţia franceză 1926 pag. 210):

$$x_p = \frac{d^2}{16z} \operatorname{tg}\alpha \quad ; \quad y_p = \frac{z}{2} + \frac{d^2}{32z} \operatorname{tg}^2\alpha.$$

Putem exprima condiția a doua proiectând pe orizontală conturul AOO_1B:

$$y_G \sin\alpha = y_p \sin\alpha + x_p \cos\alpha \tag{3}$$

$$y_G \sin\alpha = \left(\frac{z}{2} + \frac{d^2}{32z} \operatorname{tg}^2\alpha\right) \sin\alpha + \frac{d^2}{16z} \sin\alpha.$$

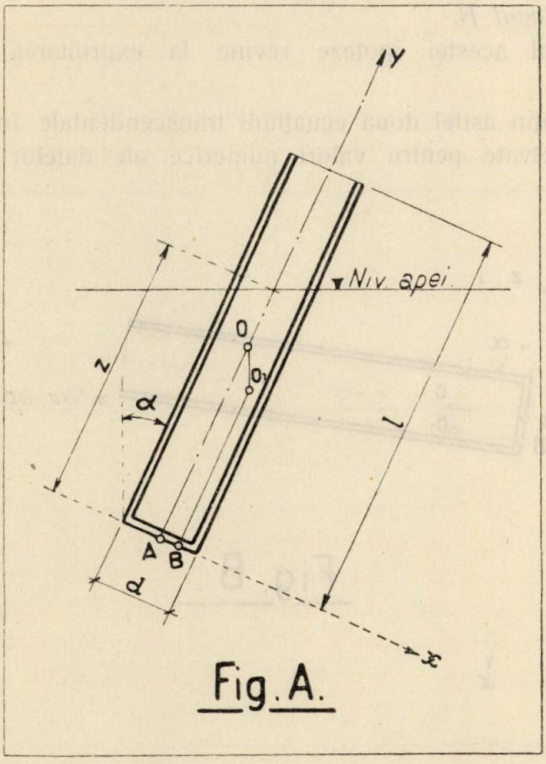


Fig. A.

De unde:

$$\sin\alpha = 0 \quad \text{soluție studiată}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{32 y_G z - 16z^2 + 2d^2}{d^2}.$$

Sau:

$$\operatorname{tg}^2\alpha = 16 \frac{a\rho}{d^4\gamma} [ad^2 + 4(l^2 - a^2)(d - a)] -$$

$$- 16 \frac{a^2\rho^2}{d^6\gamma^2} [d^2 + 4(d - a)(l - a)]^2 - 2. \tag{4}$$

Cazul A este acum complect determinat prin cunoaşterea lui z şi α în funcţiune de elementele date.

Pentru ca acest caz să fie real trebueşte ca:

$$\frac{d}{2}\operatorname{tg}\alpha \leqslant z \leqslant l - \frac{d}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

III. *Cazul B.*

Studiul acestei ipoteze revine la exprimarea condiţiilor (2) şi (3).

Se obţin astfel două ecuaţiuni transcendentale în z şi α ce pot fi rezolvate pentru valori numerice ale datelor problemei.

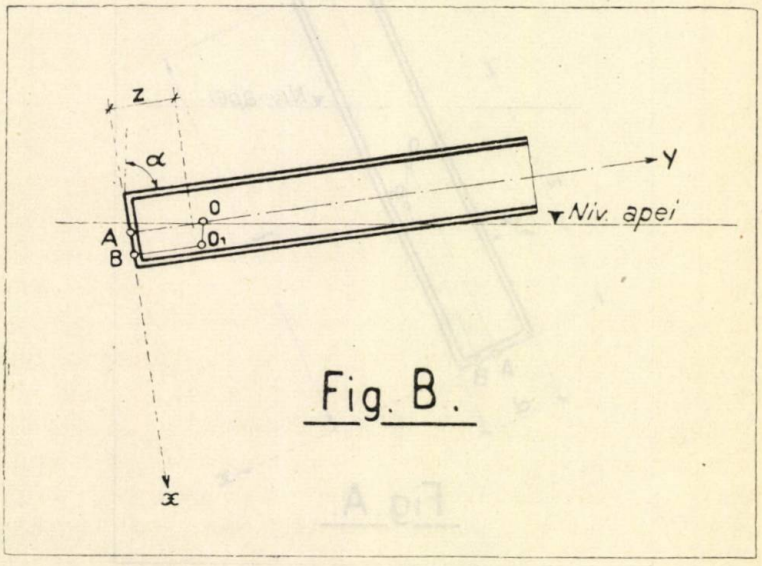


Fig. B.

Condiţiile de realitate a echilibrului este ca z să îndeplinească ambele inegalităţi:

$$z \leqslant l - \frac{d}{2}\operatorname{tg}\alpha$$

$$z \leqslant \frac{d}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

IV. *Notă.* Problema poate fi studiată şi din punctul de vedere *al stabilităţii echilibrului.* Propunem aceasta corespondenţilor G. M. spre a face o notă.

Incheiem soluţia acestei probleme cu gândul la cel plecat dintre noi, a mult regretatului Profesor Inginer GH. EM. FILIPESCU, a cărui amintire va rămâne întotdeauna în sufletul celor ce l-au cunoscut.

Citäm de pe copertele G. M. numele rezolvitorului Domnul CONSTANTINESCU N. I. (G. M. Anul XXXII, Nr. 11).

ALEXANDRU STOENESCU.

PROBLEMA 4062. *Să se rezolve în numere întregi ecuaţia:*

$$x^3 + y^3 + z^3 = txyz.$$

I. IONESCU.

Dacă dăm lui t o valoare oarecare t_0, ecuaţia dată este o ecuaţie omogenă de gradul III cu trei necunoscute.

Ecuaţia cubică generală, omogenă, de gradul III cu trei necunoscute $f(x, y, z) = 0$ a fost studiată, pentru prima oară, de A. L. CAUCHY. (Vezi operile sale volumele (2) 6 1887, pag. 289) şi mai târziu de A. H. DESBOVES *(Nouvelles Annales de Mathématiques,* (2) 18. 1881, pag. 265).

Nu s'au putut găsi toate soluţiile, dar s'a dovedit că din o soluţie (x_0, y_0, z_0) se poate deduce o a doua soluţie luând intersecţia tangentei în punctul $(x_0/y_0, y_0/z_0)$, la cubica $f(x_0/z_0, y_0/z_0, 1)=0$ cu cubica însăşi. Punctul găsit are coordonatele tot întregi, şi continuând tot aşa găsim un şir infinit de soluţii întregi ale problemei. Apoi, dacă se iau două soluţii din şirul găsit, excluzând soluţiile consecutive, dreapta care trece prin aceste două puncte intersectează cubica în al treilea punct, ale cărui coordonate sunt tot întregi, şi care nu fac parte din şirul găsit. Acest punct va da naştere la un alt şir de puncte dacă îi aplicăm metoda tangentelor.

Problema propusă este mai complicată, pentrucă nu reprezintă numai o cubică, ci reprezintă o familie de cubice, şi deci trebue să arătăm cum se găsesc soluţii particulare şi apoi să aplicăm metoda lui CAUCHY.

Ecuaţia este simetrică faţă de x, y, z şi deci din o singură soluţie putem găsi şase soluţii ale problemei. Se vede uşor că ecuaţia are pentru t oricare, soluţiile $x = -y = k$ şi $z = 0$.

Apoi, pentru $z = -1$, ecuaţia se reduce la $(x^3 + y^3 - 1)/xy = t$, căreia îi corespunde valori întregi pentru $x = a$ şi $y = (a^2 + a + 1)$. Rezultă că ecuaţia are următoarele soluţii întregi:

$$x = \pm ka \quad , \quad y = \pm k(a^2 + a + 1) \quad , \quad z = \mp ka,$$
$$t = -(a^3 + 2a^2 + 3a + 3).$$

Deasemenea, ecuaţia mai are ca soluţii întregi:

$$x = \pm k \quad , \quad y = \mp k \quad , \quad z = \pm ka \quad \text{şi} \quad t = -a^2.$$

Toate aceste soluţii au pe t negativ şi deci x, y, z nu pot fi toate pozitive.

Făcând $z = 1$, ecuaţia devine:

$$(x^3 + y^3 + 1)/xy = t.$$

Trebue determinat x astfel ca unul din divizorii lui $(x^3 + 1)$, pe care să-l însemnăm cu u, să satisfacă relaţia $u^3 = mx - 1$. Să luăm de exemplu $x = 14$. Numărul $(14^3 + 1) = 3^2 . 5 . 61$ are patru divizori: 45, 61, 549, 915 al căror cub este de forma $(14m - 1)$. Rezultă că ecuaţia are ca soluţii $x = 14$; $y = 45, 61, 549, 918$; $z = 1$; $t = 149, 269, 21, 529, 59, 802$.

In acelaşi mod am găsit soluţiile:

$x =$	1	1	2	2	3	5	5	9	9
$y =$	1	2	3	9	14	14	9	146	365
$z =$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$t =$	3	5	6	41	66	4	19	2 337	14 803

Să aplicăm acum metoda lui CAUCHY.

Ecuaţia tangentei în punctul $(x_0/z_0, y_0/z_0)$ la cubica:

$$x^3 + y^3 + 1 = txy,$$

este

$$y - y_0 = (3x_0^2 - ty_0)(x - x_0)/(tx_0 - 3y_0^2).$$

Luând intersecţia acestei drepte cu cubica, găsim:

$$x = x_0(y_0^3 - z_0^3) \quad , \quad y = y_0(z_0^3 - x_0^3) \quad , \quad z = z_0(x_0^3 - y_0^3).$$

Căutând intersecţia dreptei care trece prin două puncte x_i, y_i, z_i şi x_k, y_k, z_k cu cubica, găsim:

$$x = x_i^2 x_k z_k - x_k^2 y_i z_i \quad , \quad y = y_i^2 x_k y_k - y_k^2 x_i z_i,$$
$$z = z_i^2 x_k y_k - z_k^2 x_i y_i.$$

Aplicăm aceste formule la soluţiile găsite mai sus. Găsim astfel o infinitate de şiruri de soluţii ale problemei propuse.

GH. CONSTANTINESCU.

PROBLEMA 4247. *Să se rezolve ecuaţiunea:*

$$\begin{vmatrix} 2a_1(a_1+x) & a_1a_2+(a_1+x)(a_2+x) & a_1a_3+(a_1+x)(a_3+x) \\ a_1a_2+(a_1+x)(a_2+x) & 2a_2(a_2+x) & a_2a_3+(a_2+x)(a_3+x) \\ a_1a_3+(a_1+x)(a_3+x) & a_2a_3+(a_2+x)(a_3+x) & 2a_3(a_3+x) \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă a_1, a_2, a_3 sunt trei numere pozitive, în ce caz ecuaţiunea are două rădăcini imaginare?

(Enunţ îndreptat). GH. D. SIMIONESCU.

Soluţie dată de D-l PAUL DOBRESCU (lic. mil. „N. Filipescu").

Notând cu D determinantul dat, îl putem desface într'o sumă de opt determinanţi socotind

$$2a_1(a_1+x) = a_1(a_1+x)+a_1(a_1+x) \text{ etc.}$$

Avem:

$$D = \begin{vmatrix} a_1(a_1+x) & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2(a_2+x) & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3(a_3+x) \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1(a_1+x) & a_1a_2 & (a_1+x)(a_3+x) \\ a_1a_2 & a_2(a_2+x) & (a_2+x)(a_3+x) \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3(a_3+x) \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1(a_1+x) & (a_1+x)(a_2+x) & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2(a_2+x) & a_2a_3 \\ a_1a_3 & (a_2+x)(a_3+x) & a_3(a_3+x) \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1(a_1+x) & (a_1+x)(a_2+x) & (a_1+x)(a_3+x) \\ a_1a_2 & a_2(a_2+x) & (a_2+x)(a_3+x) \\ a_1a_3 & (a_2+x)(a_3+x) & a_3(a_3+x) \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1(a_1+x) & a_1a_2 & a_1a_3 \\ (a_1+x)(a_2+x) & a_2(a_2+x) & a_2a_3 \\ (a_1+x)(a_3+x) & a_2a_3 & a_3(a_3+x) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_1(a_1+x) & a_1 a_2 & (a_1+x)(a_3+x) \\ (a_1+x)(a_2+x) & a_2(a_2+x) & (a_2+x)(a_3+x) \\ (a_1+x)(a_3+x) & a_2 a_3 & a_3(a_3+x) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_1(a_1+x) & (a_1+x)(a_2+x) & a_1 a_3 \\ (a_1+x)(a_2+x) & a_2(a_2+x) & a_2 a_3 \\ (a_1+x)(a_3+x) & (a_2+x)(a_3+x) & a_3(a_3+x) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_1(a_1+x) & (a_1+x)(a_2+x) & (a_1+x)(a_3+x) \\ (a_1+x)(a_2+x) & a_2(a_2+x) & (a_2+x)(a_3+x) \\ (a_1+x)(a_3+x) & (a_2+x)(a_3+x) & a_3(a_3+x) \end{vmatrix}.$$

Să notăm acești determinanți cu $D_1, D_2, \ldots, D_8$. Avem:

$$D_1 = a_1 a_2 a_3 \begin{vmatrix} a_1+x & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2+x & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3+x \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 x^2 (x+a_1+a_2+a_3)$$

$$D_2 = a_1 a_2 (a_3+x) \begin{vmatrix} a_1+x & a_1 & a_1+x \\ a_2 & a_2+x & a_2+x \\ a_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 (a_3+x) \begin{vmatrix} a_1+x & a_1 & x \\ a_2 & a_2+x & 0 \\ a_3 & a_3 & 0 \end{vmatrix} = -a_1 a_2 a_3 x^2 (a_3+x).$$

Rezultă imediat pe aceeași cale:

$$D_3 = -a_1 a_2 a_4 x^2 (a_2+x) \quad ; \quad D_5 = -a_1 a_2 a_3 x^2 (a_1+x).$$

Avem apoi:

$$D_4 = a_1 (a_1+x)(a_2+x)(a_3+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & a_2 & a_2+x \\ a_3 & a_3+x & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (a_1+x)(a_2+x)(a_3+x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x \\ a_3 & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -a_1 x^2 (a_1+x)(a_2+x)(a_3+x).$$

Pe aceeaşi cale deducem:

$$D_6 = -a_2 x^2 (a_1 + x)(a_2 + x)(a_3 + x);$$

$$D_7 = -a_3 x^2 (a_1 + x)(a_2 + x)(a_3 + x).$$

In sfârşit:

$$D_8 = (a_1 + x)(a_2 + x)(a_3 + x) \begin{vmatrix} a_1 & a_1 + x & a_1 + x \\ a_2 + x & a_2 & a_2 + x \\ a_3 + x & a_3 + x & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= x^2 (2x + a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + x)(a_2 + x)(a_3 + x).$$

Putem grupa pe D_1, D_2, D_3, D_5 dând factor comun pe $(a_1 a_2 a_3 x^2)$ şi pe D_4, D_6, D_7, D_8 cu factorul $x^2 (a_1+x)(a_2+x)(a_3+x)$. Găsim:

$$D = -2 a_1 a_2 a_3 x^3 + 2 x^3 (a_1 + x)(a_3 + x)(a_3 + x)$$

$$= 2x^4 [x^2 + (a_1 + a_2 + a_3) x + a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1].$$

De aci rezultă că ecuaţia $D = 0$ are rădăcina cuadruplă $x = 0$ şi două rădăcini date de trinomul din paranteză:

$$x = \frac{-(a_1 + a_2 + a_3) \pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_1 a_2 - 2a_2 a_3 - 2a_3 a_1}}{2}.$$

Condiţia ca rădăcinile să fie imaginare este ca determinantul să fie negativ, sau ceea ce este acelaşi lucru:

$$(1) \qquad 2 \Sigma a_1 a_2 - \Sigma a_1^2 > 0.$$

Deoarece a_1, a_2, a_3 sunt pozitive putem pune:

$$u = \sqrt{a_1} \quad ; \quad v = \sqrt{a_2} \quad ; \quad w = \sqrt{a_3}.$$

Expresiunea (1) devine:

$$(1') \qquad 2 \Sigma u^2 v^2 - \Sigma u^4 > 0$$

şi arată că patratul ariei triunghiului cu laturile u, v, w este pozitiv, deci triunghiul este real şi se poate construi.

Aşa dar condiţia ca ecuaţia dată să aibă două rădăcini imaginare este ca $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$, $\sqrt{a_3}$ să fie laturile unui triunghiu, ceea ce duce la inegalităţile cunoscute.

Soluţii complete au dat D-nii: MIRCEA LEONTE A. NEGREA (Brăila) şi D. MAVRODIN (Lic. „M. Eminescu), discutând problema şi îndreptând enunţul. Determinantul l-au desvoltat pe cale directă.

G. D. S.

PROBLEMA 4929. *Se consideră un trapez* ABCD, *baza mică fiind* AB, *iar laturile neparalele fiind* BC *şi* AD. *Pe laturile neparalele se construesc înafara trapezului patratele* BB'C'C, AA'D'D. *Se notează cu* x *baza mică a trapezului, cu* h *înălţimea trapezului şi cu* λ, μ *cotangentele unghiurilor dela bază* ADC *şi* BCD.

Perpendiculara în mijlocul M *al lui* AB *întâlneşte pe* A'B' *în* M', *iar perpendiculara în mijlocul* N *a lui* CD *întâlneşte pe* C'D' *în* N'.

1°. *Să se arate că* M' *este mijlocul lui* A'B', *că* N' *este mijlocul lui* C'D', *că figura* NM'N'N *este un paralelogram şi că dreapta care uneşte centrele celor două patrate trece prin centrul paralelogramului* MM'N'N. *In ce caz paralelogramul* MM'N'N *este romb?*

Să se calculeze MM', A'B' *şi aria patrulaterului* AA'B'B *în funcţie de* x, h, λ *şi* μ. *Să se calculeze deasemenea tangentele unghiurilor* AA'B', A'B'B *în funcţie de* x, h, λ *şi* μ.

2°. *Să se determine* x *in funcţie de* h, λ *şi* μ *astfel ca patrulaterul* AA'B'B *să fie inscriptibil. Să se arate că în acest caz dacă se notează cu* H *intersecţia perpendicularei din* A *pe* CD *cu perpendiculara din* D *pe* BC *şi cu* H' *intersecţia perpendicularei din* B *pe* CD *cu perpendiculara din* C *pe* AD *şi dacă unghiul format de* AD *cu* BC *este obtus, figura* AHH'B *este un patrat. Dacă însă unghiul format de* AB *cu* BC *este ascuţit şi figura* AHH'B *este un patrat, atunci simetricul lui* A' *în raport cu* A, *simetricul lui* B' *în raport cu* B *şi punctele* A, B *sunt pe acelaşi cerc.*

3°. *Se consideră un patrulater oarecare* AA'B'B. *Pe laturile* AA', BB' *se construesc înafară patratele* AA'D'D, BB'C'C. *(Se presupune că unghiurile din* A *şi* B *sunt obtuse). Să se arate că condiţia ca patrulaterul* ABCD *să fie* **trapez,** *este ca dreapta* MM' *care uneşte mijloacele laturilor* AB, A'B' *să fie perpendiculară pe* AB.

D. V. IONESCU.

Soluţie. 1°. Fie E şi E proiecţiile lui A' şi B' pe MM', E' proiecţia lui A pe A'E, E'' proiecţia lui A pe CD, F' proiecţia lui B pe B'F, F'' proiecţia lui B pe CD.

Din egalitatea triunghiurilor AA'E', ADE'' de o parte şi a triunghiurilor BB'F', BF''C pe de altă parte rezultă că

$$A'E' = B'F' = AE'' = h.$$

Se deduce că

$$(1) \qquad \boxed{A'E = B'F = \frac{x}{2} + h},$$

şi că M' *este mijlocul lui* A'B'.

Tot din egalitatea acestor triunghiuri mai rezultă că

$$ME = DE''' \quad , \quad MF = CF''$$

şi că

$$MM' = \frac{ME + MF}{2} = \frac{CD - AB}{2}.$$

La fel se arată cu N' *este mijlocul lui* CD' şi că

$$NN' = \frac{DC - AB}{2}.$$

Rezultă că *figura* MM'N'N *este un paralelogram.*

Dreapta care uneşte centrele patratelor este dreapta care uneşte mijloacele laturilor opuse A'D şi B'C din patrulaterul A'B'CD; ea trece deci prin mijlocul lui NM' care este mijlocul diagonalelor paralelogramului MMM'N'.

Fie P şi Q mijloacele diagonalelor BD şi AC ale trapezului ABCD. Se ştie că

$$PQ = \frac{DC - AB}{2}$$

şi că figura MPNQ este un paralelogram.

Dacă figura MM'N'N este un romb, urmează că vom avea

$$MN = \frac{DC - AB}{2}$$

şi prin urmare paralelogramul MPNQ având două diagonale egale este un dreptunghiu. Se deduce că *condiţia necesară şi suficientă ca figura* MM'N'N *să fie romb este ca trapezul* ABCD *să aibă laturile neparalele, perpendiculare.*

Să notăm cu α şi β unghiurile dela bază. Avem

$$DE'' = h \operatorname{cotg}\alpha = \lambda h \quad , \quad CF'' = h \operatorname{cotg}\beta = \mu h.$$

Rezultă că:

$$(2) \qquad \boxed{MM' = \frac{h}{2}(\lambda + \mu)}.$$

Din triunghiul dreptunghiu A′EM′ se vedă că

$$\overline{A'M'}^2 = \left(\frac{x}{2} + h\right)^2 + \frac{h^2}{4}(\lambda - \mu)^2$$

adică

$$\boxed{\overline{A'B'}^2 = x^2 + 4hx + h^2[4 + (\lambda - \mu)^2]} \quad (3)$$

Aria patrulaterului AA′B′B este egală cu suma ariilor trapezelor AMEA′, MBB′F, adică

$$S = \frac{(x+h)\,ME}{2} + \frac{(x+h)\,ME}{2} = (x+h)\,MM'$$

sau:

$$\boxed{S = \frac{\lambda + \mu}{2} h\,(x+h)} \quad (4)$$

Să calculăm unghiul AA′B′. Observăm că

$$\hat{A} = \widehat{AA'B'} = \widehat{AA'E'} + \widehat{EA'M'}.$$

Dar unghiul $\widehat{AA'E'}$ este egal cu $\frac{\pi}{2} - \alpha$, iar unghiul $\widehat{EA'M'}$ se calculează din triunghiul dreptunghiu A′EM′ cu formula

$$\operatorname{tg} \widehat{EA'M'} = \frac{EM'}{A'E} = \frac{h(\mu - \lambda)}{2h + x}.$$

Avem:

$$\hat{A}' = \frac{\pi}{2} - (\alpha - \widehat{EA''M'})$$

și deci

$$\operatorname{tg} A' = \operatorname{cotg}(\alpha - \widehat{EA'M'})$$

adică

$$\operatorname{tg} A' = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg} \widehat{EA'M'} + 1}{\operatorname{cotg} \widehat{EA'M'} - \operatorname{cotg}\alpha}$$

sau:

$$\operatorname{tg} A' = \frac{1 + \lambda \dfrac{2h + x}{h(\mu - \lambda)}}{\dfrac{2h + x}{h(\mu - \lambda)} - \lambda}.$$

adică

$$\text{(5)} \qquad \boxed{\operatorname{tg} A' = \frac{\lambda x + h(\lambda + \mu)}{x + h(2 - \lambda\mu + \lambda^2)}}.$$

La fel se arată că:

$$\text{(6)} \qquad \boxed{\operatorname{tg} B' = \frac{\mu x + h(\mu + \lambda)}{x + h(2 - \lambda\mu + \mu^2)}}.$$

Formulele (3), (4), (5) şi (6) răspund la chestiunile puse în prima parte a problemei.

2°. Pentru ca patrulaterul AA'B'B să fie inscriptibil, trebue ca unghiurile opuse să fie suplimentare. Unghiul ABB' fiind $\frac{\pi}{2} + \beta$, trebue să avem

$$A' + \frac{\pi}{2} + \beta = \pi$$

sau:

$$A' = \frac{\pi}{2} - \beta$$

şi deci

$$\operatorname{tg} A' = \operatorname{cotg}\beta$$

Ţinând seama de formula (5), rezultă că

$$\frac{\lambda x + h(\mu + \lambda)}{x + h(2 - \lambda\mu + \lambda^2)} = \mu$$

sau:

$$(\lambda - \mu)\, x = h[\mu - \lambda + \lambda\mu(\lambda - \mu)]$$

sau:

$$\text{(7)} \qquad \boxed{x = h(\lambda\mu - 1)}.$$

Rămâne să interpetăm geometriceşte această relaţie.

a) Să presupunem că unghiul format de AD şi BC este obtus. Fie H intersecţia perpendicularei duse din A pe DC cu perpendiculara dusă din D pe BC. Fie deasemenea H' intersecţia perpendicularei duse din B pe DC cu perpendiculara dusă din C pe AD. Să demonstrăm că *figura* ABH'H *este un romb* şi c *dreapta* BC *trece prin* A' iar *dreapta* AD *trece prin* B'.

Intr'adevăr din triunghiul DHE" rezultă că

$$E''H = DE'' \operatorname{cotg}\beta = \mu\, DE''.$$

Dar

$$DE'' = h\lambda$$

astfel că:

$$E''H = h\lambda\mu$$

şi deci

$$AH = h(\lambda\mu - 1).$$

La fel se arată că

$$BH' = h(\lambda\mu - 1)$$

şi comparând cu formula (7) deducem că

$$AH = AB = BH',$$

ceea ce înseamnă că figura ABH'H este un patrat.

Să observăm că triunghiurile ADH, AA'B sunt egale; se deduce că unghiurile ABA', DHA sunt egale cu β şi deci punctele A', B, C sunt pe o aceeaşi dreaptă.

La fel se arată că dreapta AD trece prin B'.

b) Să presupunem că unghiul format de AD şi BC este ascuţit.

Se demonstrează că în acest caz avem

$$AH = BH' = h(1 - \lambda\mu);$$

figura AHH'B este tot patrat, patratul acesta este situat însă faţă de AB, de partea unde se găseşte CD.

Fie A'' intersecţia lui AA' cu BC şi B'' intersecţia lui BB' cu AD. Să arătăm că A'' este simetricul lui A' în raport cu A, şi B'' este simetricul lui B' în raport cu B.

Intr'adevăr triunghiurile ABA'', AHD sunt egale şi se deduce că $AA'' = AD$.

La fel se vede că triunghiurile ABB'', BH'C sunt egale şi deci $BB'' = BC$.

Patrulaterul ABA''B'' *este inscriptibil,* pentrucă din egalitatea triunghiurilor precedente, rezultă că unghiurile AB''B, AA''B sunt egale cu complimentul unghiului format de AD şi BC.

3°. Să presupunem acum că avem un patrulater oarecare ABA'B' cu unghiurile din A şi B obtuse şi că construim înafara lui patratele AA'D'D, BB'C'C. *Să căutăm proprietatea geometrică a patrulaterului* ABB'A', *pentru ca patrulaterul* ABCD *să fie trapez.*

Să notăm cu I intersecția dreptelor AD și BC. Din triunghiul IAB se deduce

$$\frac{IA}{\sin\left(B-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{IB}{\sin\left(A-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{AB}{\sin(A+B-\pi)}$$

de unde:

$$(8)\qquad IA=\frac{AB\cos B}{\sin(A+B)}\ ,\quad IB=\frac{AB\cos A}{\sin(A+B)}.$$

Pentru ca figura ABCD să fie trapez trebue ca

$$\frac{AI}{AD}=\frac{BI}{BC}$$

sau ca

$$\frac{AI}{AA'}=\frac{BI}{BB'}.$$

Ținând seama de formulele (8) trebue deci să avem:

$$BB'\cos B=AA'\cos A$$

adică proiecțiile laturilor AA', BB' pe AB să fie egale, sau dreapta care unește mijloacele AB și A'B' să fie perpendiculară pe AB.

Observare. Și dacă unghiurile din A și B sunt ascuțite amândouă, și se construesc patratele AA'D'D, BB'C'C înafara patrulaterului AA'B'B, condiția necesară și suficientă ca figura ABCD să fie trapez este ca perpendiculara pe mijlocul lui AB să treacă prin mijlocul lui A'B'.

Au dat foarte bune soluții D-nii PETRESCU ACHILLE și CONSTANTIN V. PANTELIMON dela Liceul militar, Iași.

PROBLEMA 5277. *Se consideră triunghiul de referință* T, *tăiat de transversala* (Δ). *Dacă se ia simetricul cercului circumscris triunghiului, în raport cu diametrul cercului* (Ω) MIQUEL *al sistemei* T, (Δ), *trecând prin punctul* ω MIQUEL *și se taie acest cerc cu cercurile lui* MIQUEL *trecând prin vârfurile triunghiului de referință și prin intersecțiile transversalei* (Δ) *pe laturile adiacente se obține un nou triunghiu* T' *omologic cu* T. *Să se precizeze centrul și axa de omologie.*

N. N. MIHĂILEANU.

Soluțiune. Fie ABC triunghiul T și $\overline{abc}$ transversala (Δ); O, O_a, O_b, O_c centrele cercurilor ABC, A_{bc}, B_{ac}, C_{ab}; intersecțiile: A_ω ($\overline{\omega A}$, $\overline{O O_a}$) și analoagele; ω_a ($\overline{\omega_a}$, $\overline{O_b O_c}$) și analoagele; (O′) simetricul lui (O) prin raport cu diametrul ωΩ și A′, B′, C′ intersecțiile perechilor de cercuri: (O′) și (O_a); (O′) și (O_b); (O′) și (O_c). Fie încă intersecțiile:

A'_ω ($\overline{\omega A'}$, $\overline{O'O_a}$), B'_ω ($\overline{\omega B'}$, $\overline{O'O_b}$), C'_ω ($\overline{\omega C'}$, $\overline{O'O_c}$). Pentru ca triunghiurile T și T′ să fie omologice, trebue ca AA′, BB′ CC′ să fi concurente.

In adevăr în triunghiurile $OO'O_a$, $OO'O_b$, $OO'O_c$ înscrise în (Ω) după teorema SIMSON, grupele de puncte: A'_ω, A''_ω, A_ω; B'_ω, A''_ω, B'_ω; $C'_\omega A''_\omega C_\omega$ (unde A''_ω e proiecția lui ω pe OO′), adică respectiv proiecțiile lui ω pe laturile fiecăruia din triunghiurile $OO'O_a$, $OO'O_b$, $OO'O_c$, sunt grupe de puncte colineare. Dar A'_ω, A''_ω, A_ω se află la jumătatea segmentelor $\overline{\omega A'}$, $\overline{\omega S}$, $\overline{\omega A}$ [unde S este intersecția cercurilor (O) și (O′)]. Deci și A, S, A′ sunt colineare. Analog se află că și grupele de puncte B, S, B′; C, S, C′ sunt grupe de puncte colineare.

Prin urmare AA′, BB′, CC′ concură în S, adică triunghiurile ABC, A′B′C′ sunt omologice de centru S.

In triunghiurile $O'O_b O_c$, $O'O_c O_a$, $O'O_a O_b$ înscrise în cercul (Ω) grupele de puncte: ω_a, B'_ω, C'_ω; ω_b, C'_ω, A'_ω; ω_c, A'_ω, B'_ω sunt grupe de puncte colineare (SIMSON).

Deoarece ω_a, B'_ω, C'_ω se află la mijloacele segmentelor $\overline{\omega a}$, $\overline{\omega B'}$, $\overline{\omega C'}$, urmează că și punctele *a*, B′, C′ sunt colineare. La fel: *b*, C′, A′; *c*, A′, B′ sunt grupe de puncte colineare.

Din aceste rezultate se vede că laturile omoloage ale triunghiurilor ABC, A′B′C′ se taie în respectiv *a*, *b*, *c*. Acestea sunt pe (Δ) care e axa de omologie.

MIHAI I. TREFILOV
Bacalaureat, Brăila.

Observare. Triunghiurile ABC, A′B′C′ sunt *egale* obținute printr'o *rotație* în jurul lui ω; ele au același cerc MIQUEL relativ la aceeași transversală comună Δ; laturile lor fac unghiuri egale între ele, în punctele de intersecție cu Δ. (Triunghiuri *isohomologice: Mathesis*, XLVII—229).

PROBLEMA 5353. *Fie un triunghiu* ABC, S *piciorul simedianei pe* BC *şi* I *un punct arbitrar pe una din bisectoarele unghiului* A; *o dreaptă* Δ *care trece prin* S, *taie* AC, AB *în* β, γ, $I\beta$, $I\gamma$ *taie pe* AB, AC *în* γ', β'. *Dreptele* B'C', SI *se taie pe mediana din* A.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie. Fie S arbitrar pe BC şi I arbitrar în planul triunghiului; notăm încă S' intersecţia (SI, $\beta'\gamma'$) şi D, δ, δ' intersecţiile dreptei AI cu BC, $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$, M intersecţia AS', BC. Se observă uşor egalitatea rapoartelor anarmonice proiectate din A şi I

$$(BCDS) = (\gamma\beta\delta S) = (\beta'\gamma'\delta' S') = (CBDM)$$

deci

$$\frac{DB}{DC} : \frac{SB}{SC} = \frac{DC}{DB} : \frac{MC}{MB} \quad \therefore \quad \frac{SB}{SC} \cdot \frac{MB}{MC} = \left(\frac{DB}{DC}\right)^2.$$

Dacă D este piciorul uneia din bisectoarele unghiului A, obţinem

$$\frac{SB}{SC} \cdot \frac{MB}{MC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

şi după teorema STEINER[1]) AM şi AS sunt *ceviene isogonale.* Dacă AS este simediana, AM este *mediana.*

Observaţii. 1. Soluţii geometrice foarte bune în cazul general a două isogonale, date de D-nii: HORIA M. BODNĂRESCU (şcoala polit. Bucureşti) şi PAUL P. DRĂGHICESCU (liceul militar Iaşi). Bună soluţie analitică dela D-l AUREL N. POPA.

2. A se vedea şi problema 4883.

EXERCIŢII.

15. Intr'un triunghiu, bisectoarea l nu poate fi medie armonică între trisectoarele i, j ale aceluiaşi unghiu.

EUGEN G. VIJELIE.

R. Fie şi h, înălţimea. Avem

$$l = h \sec \frac{1}{2}(B - C) \ , \ i = h \operatorname{cosec}\left(\frac{1}{3}A + C\right) \ , \ j = h \operatorname{cosec}\left(\frac{1}{3}A + B\right)$$

1) C. d. P. IX. 28.

condiţia

$$\frac{1}{i}+\frac{1}{j}=\frac{2}{l}$$

devine

$$\sin\left(\frac{1}{3}A+C\right)+\sin\left(\frac{1}{3}A+B\right)=2\cos\frac{1}{2}(B-C)$$

$$\therefore \quad 2\cos\frac{1}{6}A\cos\frac{1}{2}(B-C)=2\cos\frac{1}{2}(B-C)$$

$$\therefore \quad \cos\frac{1}{6}A=1 \ , \ A=0.$$

PROBLEME PROPUSE

4396 [1]). Fie U un punct arbitrar în planul triunghiului ABC; AU taie pe BC în I; UB, UC retaie cercul circumscris în B′ şi C′. CB′ şi BC′ se întâlnesc în A′. UA′ taie pe BC în J. Notăm

$$\sphericalangle UBC=x \ , \ \sphericalangle UCB=y.$$

Avem

$$\frac{IB}{IC}=\frac{\operatorname{cotg}x-\operatorname{cotg}B}{\operatorname{cotg}y-\operatorname{cotg}C} \ , \ \frac{JB}{JC}=\frac{\operatorname{cotg}x-\operatorname{cotg}A}{\operatorname{cotg}y-\operatorname{cotg}A}.$$

N. N. MIHĂILEANU.

5475 [2]). Cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 luate câte o singură dată, să se formeze două numere de câte cinci cifre a căror sumă să fie compusă din cifre identice.

V. THÉBAULT.

5482. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin x+\sin 2x=\sin 3x.$$

I. IONESCU.

5483. Să se găsească bazele x şi y ale sistemelor de numeraţie pentru care avem egalitatea:

$$1700 \text{ în baza } x=900 \text{ în baza } y.$$

P. SERGESCU.

1) Enunţ modificat al problemei publicate la pag. 165, vol. XLVI.

2) Inlocueşte problema cu acelaş număr de la pag. 447, care este identică cu problema 5459 propusă la pag. 391 din acest volum.

5484. Care sunt numerele poligonale, de prima sau de a doua speță, vecine lui 1941?

COMANDOR I. LINTEȘ.

5485. Să se determine trei numere, de câte trei cifre, în progresie aritmetică, astfel încât două dintre ele scrise unul după altul să formeze patratul perfect al celui de-al treilea.

(Exemplu: $594^2 = 352 \times 836$).

IOAN B. FLORESCU.

5486. Să se arate că dacă se adună a^n la produsul

$$(1 + a + \ldots + a^n + a^{n+1})(1 + a + \ldots + a^{n-2} + a^{n-1})$$

se obține un patrat perfect.

G-L GH. BUICLIU.

5487. Fie $a \leqq b \leqq c$ laturile unui triunghiu ABC și M un punct arbitrar, în plan.

Să se arate, că avem:

$$c - b \leqq \overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC}.$$

ȘERBAN A. GHEORGHIU.

5488. Se dă un triunghiu dreptunghiu ABC. Pe cateta AB se ia un punct M astfel ca

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{AB}.$$

Fie P proiecția punctului M pe BC.

1°. Să se găsească locul punctului P când B variază pe dreapta AB.

2°. Să se arate că dreapta MP trece printr'un punct fix.

BAL LASCU.

5489. Fie A, B, C trei puncte pe aceeași dreaptă și M, N două puncte oarecare în plan. Fie A′ al doilea punct de intersecție al cercurilor MNA și NBC; B′, C′ punctele analoage.

Să se arate că avem relația:

$$\frac{\overline{NA} \cdot \overline{MA'}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{NB} \cdot \overline{MB'}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{NC} \cdot \overline{MC'}}{\overline{CC'}} = \overline{MN}.$$

NICOLAE D. ȘTEFĂNESCU.

5490. Extremitățile unui segment AB de lungime constantă alunecă pe două drepte fixe OA, OB. Prin A și B se duc dreptele MA și MB paralele cu două direcții date.

Să se găsească prin geometria pură:

1°. Locul punctului M.

2°. Locul centrului de greutate al triunghiului ABM.

3°. Locul centrelor cercurilor înscrise şi exînscrise triunghiului ABM.

OTILIA GEORGESCU-ROEGEN.

5491. Se consideră cercurile (C) şi (C') secante în A şi B; un punct M variabil pe (C). Dreptele MA, MB taie a doua oară pe (C') în A' şi B', iar dreapta MC taie pe A'B' în P.

1°. Să se găsească locul punctului P.

2°. Să se cerceteze cazurile limită.

I. I. ŢIŢEICA.

5492. Cele patru triunghiuri, formate de laturile unui patrulater complect, sunt înscrise în patru conice tangente la cele trei diagonale şi tangente între ele, două câte două.

CPT. I. GH. ZAMFIRESCU.

5493. Pe o circonferinţă fixă se rostogoleşte o circonferinţă de rază dată.

Să se găsească locul punctelor de contact ale ultimei circonferinţe cu tangentele de direcţie dată.

V. THÉBAULT.

5494. Fie N_a şi N_b două nave care se găsesc în două puncte A şi B. Nava N_a urmează un drum constant cu viteza V_a, iar nava N_b are pentru o perioadă t viteza V_b, apoi viteza V_b'. Se cere drumul navei N_b astfel ca să întâlnească nava N_a în timpul cel mai scurt.

LT. C. COSTĂCHESCU.

5495. Un punct material M alunecă fără frecare pe tangenta unui cerc fix, al cărei punct de contact descrie cercul cu o iuţeală unghiulară constantă ω.

Să se studieze mişcarea punctului M şi să se determine reacţia tangentei, ştiind că asupra punctului M nu lucrează nici o forţă dată.

M. GHERMĂNESCU.

5496. In ecuaţia diferenţială

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \frac{y}{x^{2n}}$$

să se facă schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{t}$ şi să se integreze apoi ecuaţia propusă.

TH. ANGHELUŢĂ.

Până la sfârșitul lunii precedente, s'au primit și reținut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Andrei Aurel (5415); *Bogdan Gh. Gr.* (5475); *Checian N. Ana* (4368, 5442); *Drăghicescu P. Paul* (5205, 19, 61, 62, 311, 12, 401, 03, 15, 20, 30, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 57); *Eftimie D. C.* (5438, 51, 64, 80); *Gheorghiu E. Octavian* (5435, 76, 77); *Musceleanu V. Ion* (4368, 5107, 273, 82, 91, 378, 438, 47, 67); *Negrescu C. Ion* (5468, 73, 76); *Niculescu C. Mircea* (3590, 4368, 5158, 205, 375, 89, 423, 42); *Petrescu Iulian* (5202, 05, 58, 62, 368); *Popescu Florin* (5327, 400, 76, 77); *Reischer Herman* (5013, 205, 325, 28, 56, 66, 69, 78, 90, 95, 447); *Șerban Const.* (5442); *Stănculescu M.* (5480); *Stoianovici Șerban* (5321); *Teodorescu Ion* (5294); *Turculeț Tiberiu* (5114); *Văduva F. Marin* (5427, 35); *Voinea P. Radu* (5468, 77).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie,** *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii și nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, III, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*

Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 71.028.

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNEA"
CLUJ-SIBIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVI

NUMĂRUL 10. — IUNIE 1941

SUMARUL

1. Calculul vectorial (urmare) . *Dr. Ing. Plautius Andronescu.*
2. Soluția și generalizarea problemei 1876 (urmare și sfârșit) . . . . . *Tiberiu Popoviciu.*
3. O extindere relativ la modulele rădăcinilor ecuațiilor algebrice . . . . . *Iulian Petrescu.*
4. Raport asupra premiului „V. Cristescu" *Comisiunea pentru premii.*
5. Note Matematice: 44 — 49.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 302.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2717, 5141, 5149, 5330, 5340, 5375.
10. Exerciții: 16 — 18.
11. Probleme propuse: 5260, 5497 — 5511.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1941

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri dn arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică eî primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer, şi D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1940 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLV.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 5364, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 5400, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 5500, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

CALCULUL VECTORIAL

(Urmare dela pag. 408)

Una din cele mai importante probleme din algebra vectorială e următoarea: Un vector $\mathcal{A}$ descompus după trei vectori unitari necomplanari: $\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}$ dă o soluţie unică şi bine determinată.

Fie:

$$\mathcal{A} = A_m \bar{m} + A_n \bar{n} + A_p . \bar{p}$$

şi se cere să se determine: A_m, A_n şi A_p ($\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}$ sunt cunoscuţi).

Vom forma pe rând produsul scalar între $\mathcal{A}$ şi vectorii:

$$[\bar{n}\,\bar{p}] \ , \ [\bar{p}\,\bar{m}] \ , \ [\bar{m}, \bar{n}].$$

Se obţine:

$$(\mathcal{A}\,[\bar{n}\,\bar{p}]) = A_m\,(\bar{m}[\bar{n}\,\bar{p}])$$

$$(\mathcal{A}\,[\bar{p}\,\bar{m}]) = A_n\,(\bar{n}\,[\bar{p}\,\bar{m}])$$

$$(\mathcal{A}\,[\bar{m}\,\bar{n}]) = A_p\,(\bar{p}\,[\bar{m}\,\bar{n}])$$

în care:

$$(\bar{m}[\bar{n}\,\bar{p}]) = (\bar{n}[\bar{p}\,\bar{m}]) = (\bar{p}\,[\bar{m}\,\bar{n}]).$$

La obţinerea relaţiilor de mai sus, s'a luat în considerare:

$$(\bar{n}[\bar{n}\,\bar{p}]) = (\bar{p}\,[\bar{n}\,\bar{n}]) = 0 \quad \text{ş. a. m. d.}$$

Scalarele A_m, A_n şi A_p obţin următoarele valori:

$$A_m = \left(\mathcal{A}\,\frac{[\bar{n}\,\bar{p}]}{(\bar{m}\,[\bar{n}\,\bar{p}])}\right) \ ; \ A_n = \left(\mathcal{A}\,\frac{[\bar{p}\,\bar{m}]}{(\bar{m}\,[\bar{n}\,\bar{p}])}\right) \ ; \ A_p = \left(\mathcal{A}\,\frac{[\bar{m}\,\bar{n}]}{(\bar{m}\,[\bar{n}\,\bar{p}])}\right)$$

vectorii:

$$m' = \frac{[\bar{n}\,\bar{p}]}{(\bar{m}\,[\bar{n}\,\bar{p}])} \ , \quad n' = \frac{[\bar{p}\,\bar{m}]}{(\bar{m}\,[\bar{n}\,\bar{p}])} \ , \quad p' = \frac{[\bar{m}\,\bar{n}]}{(\bar{m}\,[\bar{n}\,\bar{p}])}$$

sunt denumiţi vectorii reciproci ai vectorilor: $\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}$. Aşa dar când vectorii unitari: $\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}$ sunt daţi şi anume sunt necomplanari (căci numai în acest caz pseudoscalara $(\bar{m}\,[\bar{n}\,\bar{p}])$ e diferită de zero) vectorii reciproci: m', n', p' sunt determinaţi.

Vectorul $\mathcal{A}$, exprimat prin vectorii unitari: $\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}$ va lua forma:

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}\,m')\,\bar{m} + (\mathcal{A}\,n')\,\bar{n} + (\mathcal{A}\,p')\,\bar{p}.$$

Vectorii reciproci satisfac următoarele relaţii:

$$(\bar{m}\, m') = (\bar{n}\, n') = (\bar{p}\, p') = 1;$$

$$(\bar{n}\, m') = (\bar{p}\, m') = (\bar{m}\, n') = (\bar{p}\, n') = \ldots = 0.$$

E bine să facem remarca.

Când produsul scalar e nul spre exemplu: $(\bar{n}\, m') = 0$ înseamnă întotdeauna că $\bar{n}$ e perpendicular pe m'.

Când însă $(\bar{m}\, m') = 1$ înseamnă că valoarea numerică a lui m' depinde de valoarea numerică a lui $\bar{m}$ şi de unghiul ce-l formează cei doi vectori.

Să considerăm următorul caz mai general:

Se dau vectorii $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$ şi se cere să se determine vectorul $\mathfrak{C}$ în funcţie de $\mathcal{A}$ şi $\mathfrak{B}$ aşa fel ca $(\mathcal{A}\,\mathfrak{C}) = 1$.

Vom pune: $\mathfrak{C} = \dfrac{\mathfrak{B}}{(\mathcal{A}\,\mathfrak{B})}$.

Când vectorii unitari necomplanari $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$ sunt şi ortogonali, rezultă:

$$m' = \bar{m} \quad , \quad n' = \bar{n} \quad , \quad p' = \bar{p}.$$

Spre exemplu vectorii reciproci ai vectorilor unitari $i\,j\,k$ sunt tot i, j, k. Din cazul general desvoltat mai sus, obţinem cazul particular:

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}\, i)\, i + (\mathcal{A}\, j)\, j + (\mathcal{A}\, k)\, k = A_x\, i + A_y\, j + A_z\, k.$$

Cazul ④

Ţinând seamă că $[\mathcal{A}\,[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]]$ reprezintă un vector în planul vectorilor $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ vom pune $[\mathcal{A}\,[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]] = \beta\mathfrak{B} + \gamma\mathfrak{C}$ şi se cere să se determine scalarele β, γ.

Formăm determinantul:

$$[\mathcal{A}\,[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ |[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]|_x & |[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]|_y & |[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]|_z \end{vmatrix}$$

în care:

$$|[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]|_x = B_y\, C_z - B_z\, C_y$$

$$|[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]|_y = B_z\, C_x - B_x\, C_z$$

$$|[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]|_z = B_x\, C_y - B_y\, C_x$$

şi obţinem

$$[\mathcal{A}\,[\mathcal{B}\,\mathcal{C}]] = \{(A_y B_x C_y - A_y B_y C_x) - (A_z B_z C_x - A_z B_x C_z)\}\, i$$
$$+ \{(A_z B_y C_z - A_z B_z C_y) - (A_x B_x C_y - A_x B_y C_x)\}\, j$$
$$+ \{(A_x B_z C_x - A_x B_x C_z) - (A_y B_y C_z - A_y B_z C_y)\}\, k.$$

Cercetând spre exemplu, valoarea numerică care însoţeşte vectorul unitar i se remarcă că dacă introducem acolo

$$A_x B_x C_x - A_x B_x C_x$$

ea se mai poate scrie în felul următor:

$$\{A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z\} B_x - \{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\} C_x$$
$$= (\mathcal{A}\,\mathcal{C})\, B_x - (\mathcal{A}\,\mathcal{B})\, C_x .$$

Analog vom obţine, pentru valorile numerice care însoţesc vectorii unitari $j\,k$ expresiile următoare:

$$(\mathcal{A}\,\mathcal{C})\, B_y - (\mathcal{A}\,\mathcal{B})\, C_y \quad ; \quad (\mathcal{A}\,\mathcal{C})\, B_z - (\mathcal{A}\,\mathcal{B})\, C_z .$$

Din cele de mai sus rezultă:

$$[\mathcal{A}\,[\mathcal{B}\,\mathcal{C}]] = (\mathcal{A}\,\mathcal{C})\,\mathcal{B} - (\mathcal{A}\,\mathcal{B})\,\mathcal{C}.$$

Se obţine aşa dar un vector polar.

Se remarcă următoarea egalitate:

$$[\mathcal{A}\,[\mathcal{B}\,\mathcal{C}]] + [\mathcal{B}\,[\mathcal{C}\,\mathcal{A}]] + [\mathcal{C}\,[\mathcal{A}\,\mathcal{B}]] = 0$$

ceea ce ne arată că vectorii de mai sus sunt complanari.

Cazul ⑤

$$([\mathcal{A}\,\mathcal{B}]\,[\mathcal{C}\,\mathcal{D}]) = (\mathcal{E}\,[\mathcal{C}\,\mathcal{D}]) = (\mathcal{C}\,[\mathcal{D}\,\mathcal{E}])$$

în care $\mathcal{E} = [\mathcal{A}\,\mathcal{B}]$.

Inlocuind pe $\mathcal{E}$ prin $[\mathcal{A}\,\mathcal{B}]$ în ultima expresie, obţinem următoarea scalară:

$$([\mathcal{A}\,\mathcal{B}]\,[\mathcal{C}\,\mathcal{D}]) = (\mathcal{A}\,\mathcal{C})\,(\mathcal{B}\,\mathcal{D}) - (\mathcal{A}\,\mathcal{D})\,(\mathcal{B}\,\mathcal{C}).$$

Parantezele indicate deasupra şi dedesubtul mărimei: $([\mathcal{A}\,\mathcal{B}]\,[\mathcal{C}\,\mathcal{D}])$ ne indică felul cum formăm produsele scalare pentru a obţine cei doi termeni de mai sus din dreapta.

Cazul ⑥

$$[[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}]] = \mathfrak{C}([\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]\,\mathfrak{D}) - \mathfrak{D}([\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]\,\mathfrak{C}).$$

Se obţine un vector axial.

Să facem câteva aplicaţii:

1. Să se verifice egalitatea:

$$[\bar{m}\,m'] + [\bar{n}\,n'] + [\bar{p}\,p'] = 0.$$

Formând egalităţile:

$$[\bar{m}\,m'] = \left[\bar{m}\,\frac{[\bar{n}\,\bar{p}]}{(\bar{m}\,[\bar{n}\,\bar{p}])}\right] = \frac{1}{(\bar{m}\,[\bar{n}\,\bar{p}])}\{\bar{n}(\bar{m}\,\bar{p}) - \bar{p}(\bar{m}\,\bar{n})\}$$

$$[\bar{n}\;n'] = \left[\bar{n}\;\frac{[\bar{p}\,\bar{m}]}{(\bar{m}\,[\bar{n}\,\bar{p}])}\right] = \frac{1}{(\bar{m}\,[\bar{n}\,\bar{p}])}\{\bar{p}(\bar{n}\,\bar{m}) - \bar{m}(\bar{n}\,\bar{p})\}$$

$$[\bar{p}\;p'\;] = \left[\bar{p}\;\frac{[\bar{m}\,\bar{n}]}{(\bar{m}\,[\bar{n}\,\bar{p}])}\right] = \frac{1}{(\bar{m}\,[\bar{n}\,\bar{p}])}\{\bar{m}(\bar{p}\,\bar{n}) - \bar{n}(\bar{p}\,\bar{m})\}$$

şi însumându-le, se verifică egalitatea de mai sus.

2. Ţinând seama de expresia vectorului m':

$$m'\,\frac{[\bar{n}\,\bar{p}]}{(\bar{m}\,[\bar{n}\,\bar{p}])}$$

să se verifice egalitatea:

$$\bar{m}\,\frac{[n'\,p']}{(m'\,[n'\,p'])}\,.$$

Avem:

$$[n'\,p'] = \frac{1}{(\bar{m}\,[\bar{n}\,\bar{p}])^2}\,[[\bar{p}\,\bar{m}]\,[\bar{m}\,\bar{n}]]$$

$$= \frac{1}{(\bar{m}\,[\bar{n}\,\bar{p}])^2}\,\bar{m}([\bar{p}\,\bar{m}]\,\bar{n}) = \frac{\bar{m}}{(\bar{m}\,[\bar{n}\,\bar{p}])}$$

ţinând seamă că: $\bar{n}([\bar{p}\,\bar{m}]\,\bar{m}) = 0.$

Pe de altă parte avem:

$$(m'\,[n'\,p']) = \frac{(\bar{m}\,[\bar{n}\,\bar{p}])}{(\bar{m}\,[\bar{n}\,\bar{p}])^2} = \frac{1}{(\bar{m}\,[\bar{n}\,\bar{p}])}$$

de unde ducem verificarea egalităţii de mai sus.

După cum vectorul $\mathfrak{A}$ poate fi descompus în trei componente după vectorii unitari necomplanari: $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$, tot așa se poate descompune vectorul $\mathfrak{A}$ după vectorii reciproci: m', n', p'. Putem scrie:

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}\,\bar{m})\,m' + (\mathfrak{A}\,\bar{n})\,n' + (\mathfrak{A}\,\bar{p})\,p'.$$

Impărțirea vectorilor.

Deosebim următoarele trei cazuri:

$$a)\ \frac{\mathfrak{A}}{\mathrm{B}} \qquad b)\ \frac{\mathrm{A}}{\mathfrak{B}} \qquad c)\ \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}.$$

Cazul a.

Putem pune $\frac{\mathfrak{A}}{\mathrm{B}} = \mathfrak{C}$ de unde rezultă $\mathfrak{A} = \mathrm{B}\,\mathfrak{C}$. Vectorii $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ au aceeași direcție.

Ca exemplu putem considera câtul diferențial $\frac{dr}{dl} = \bar{t}$ în care $\bar{t}$ reprezintă vectorul unitar tangențial, având aceeași direcție ca vectorul infinitesimal. (Vezi Fig. 25).

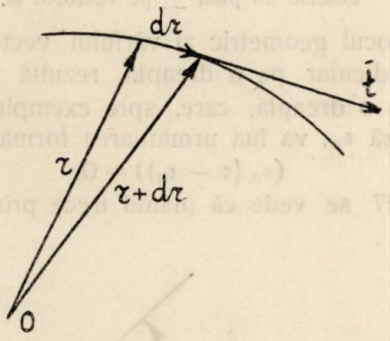


Fig. 25. Reprezentarea câtului diferențial $\frac{dr}{dl} = \bar{t}$.

Cazul b.

Va trebui să se determine un vector $\mathfrak{C}$ așa fel ca să obținem:

$$\mathrm{A} = (\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}) = \mathrm{BC}\cos\alpha.$$

Ținând seama că scalara A și vectorului $\mathfrak{B}$ *sunt considerate ca mărimi date* (adică patru scalare) rezultă că se poate obține o infinitate de vectori $\mathfrak{C}$ ale căror vârfuri se vor găsi pe un plan

perpendicular pe vectorul $\mathfrak{B}$ şi situat la distanţa $\frac{A}{B}$ de punctul iniţial al vectorului $\mathfrak{B}$ (Vezi Fig. 26).

Avem: $$C\cos\alpha = \frac{A}{B} = \text{constant.}$$

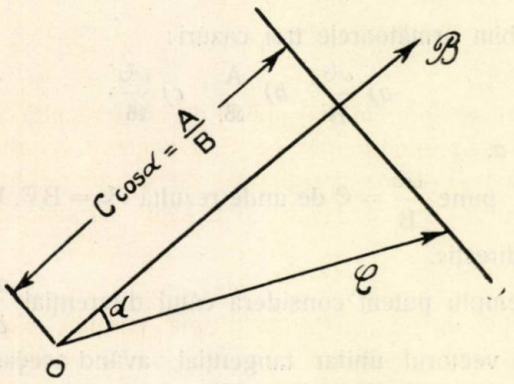


Fig. 26. Locul geometric al vârfului vectorului $\mathfrak{C}$ descrie un plan $\perp$ pe vectorul $\mathfrak{B}$.

Deoarece locul geometric al vârfului vectorului $\mathfrak{C}$ reprezintă un plan, perpendicular pe o dreaptă, rezultă că ecuaţia planului perpendicular pe o dreaptă, care, spre exemplu, trece prin vârful vectorului de rază r_0, va lua următoarea formă vectorială:

$$(r_0\{r - r_0\}) = 0.$$

In figura 27 se vede că planul trece prin vârful vectorului de rază r_0.

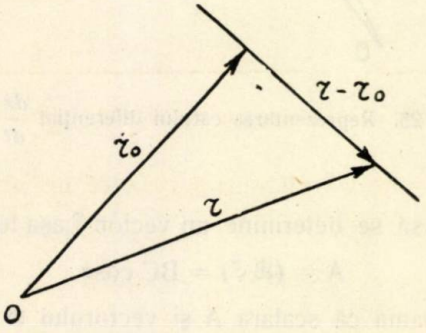


Fig. 27. Ecuaţia planului perpendicular pe r_0:
$(r_0\{r - r_0\}) = 0.$

In general când planul perpendicular pe r_0, se găseşte la distanţa Δ de pe punctul O, ecuaţia planului mai poate lua forma următoare:

$$r_0 \Delta = (r_0 r) = r_0 r \cos\alpha$$

de unde rezultă:

$$r \cos\alpha = \Delta.$$

Cazul c.

Va trebui să obţinem $\mathcal{A} = [\mathcal{B}\,\mathcal{C}]$ de unde rezultă că vectorul $\mathcal{A}$ va trebui să fie perpendicular pe $\mathcal{B}$. Deoarece vectorii $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sunt daţi, rezultă că se obţine o infinitate de soluţii pentru vectorul $\mathcal{C}$.

Vârful vectorului $\mathcal{C}$ descrie o dreaptă paralelă cu vectorul $\mathcal{B}$ şi situată la distanţa $\frac{A}{B}$ de $\mathcal{B}$.

Planul format de cele două drepte paralele e perpendicular pe vectorul $\mathcal{A}$ (Fig. 28).

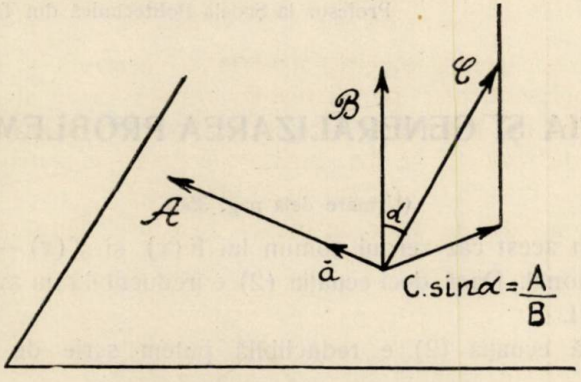


Fig. 28. Locul geometric al vârfului vectorului $\mathcal{C}$.

Avem: $\mathcal{A} = A\,\bar{a} = BC \sin\alpha\, \bar{n}$ ceea ce ne arată că $\bar{a} = \bar{n}$ şi din $A = BC \sin\alpha$ rezultă

$$C \sin\alpha = \frac{A}{B} = \text{const.}$$

Ca un exemplu al celor stabilite mai sus, putem exprima vectorial ecuaţia dreptei care trece prin două puncte date.

Avem:

$$[\{r - r_1\}\{r - r_2\}] = 0$$

în care vectorii de rază r_1, r_2 fixează în spaţiu punctele date (fig. 29).

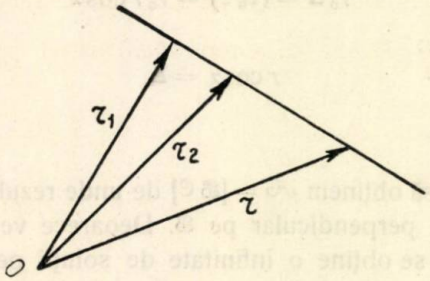


Fig. 29. Dreapta care trece prîn două puncte date.

Raportul a doi vectori poate fi şi un număr dacă vectorii au aceeaşi direcţie.

(Va urma)

DR. ING. PLAUTIUS ANDRONESCU
Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara.

SOLUŢIA ŞI GENERALIZAREA PROBLEMEI 1876

(Urmare dela pag. 350)

7. In acest caz zeroul comun lui $F(x)$ şi $f(x) - x$ trebue să fie raţional. Dacă deci ecuaţia (2) e ireductibilă nu avem soluţii de tipul II.

Dacă ecuaţia (2) e reductibilă putem scrie de exemplu:

$$F(x) = (x - u)(x - \beta)(x - \gamma)$$

şi va trebui să distingem mai multe cazuri:

7.1. Cazul $\beta = \gamma = u$ ne conduce evident la *două* soluţii distincte

$$(x - u)^3 \quad , \quad (x - v)^3,$$

care, dacă $\Delta = 0$, se reduc la una singură deja găsită la tipul I.

7.2. $\beta = \gamma$ dar diferiţi de u şi v. Avem

$$F(f(x)) = [f(x) - u][f(x) - \beta]^2,$$

de unde rezultă că $f(x) - u$ trebue să se dividă cu $(x-\beta)^2$, deci $\beta = u$, în contrazicere cu ipoteza inițială. O astfel de soluție nu există deci.

7.3. $\beta = u$, γ diferit de u și v. Trebue atunci ca $f(\gamma) = u$, deci $\gamma = v - \frac{1}{a}$. Avem în general *două* astfel de soluții distincte

$$\left(x-u\right)^2\left(x-v+\frac{1}{a}\right) \quad , \quad \left(x-v\right)^2\left(x-u+\frac{1}{a}\right).$$

Dacă $\Delta = 1$ una se reduce la o soluție deja găsită, iar dacă $\Delta = 0$ ambele se reduc la soluții deja găsite.

Avem încă două cazuri când $\beta \neq \gamma$ și diferiți de u și v.

7.4. Avem $f(\beta) = \gamma$, $f(\gamma) = \beta$. In acest caz β, γ sunt rădăcinile ecuației (3). Discuția dela No. 3 ne arată că dacă $\Delta \neq 4$ avem *două* noi soluții distincte

$$(x-u)\,g(x) \quad , \quad (x-v)\,g(x).$$

Dacă $\Delta = 0$ aceste soluții se reduc la *una* distinctă.

7.5. Avem $f(\beta) = u$, $f(\gamma) = \beta$. Acest caz este foarte interesant și merită o discuție mai detailată. Avem $\beta = v - \frac{1}{a}$ și ecuația $f(x) = v - \frac{1}{a}$ trebue să fie reductibilă. Pentru ca să fie astfel trebue ca

$$[a\,(u-v) - 1]^2 - 4$$

să fie patratul unui număr rațional. Pentru a avea noi soluții e necesar și suficient în plus ca $u \neq v - \frac{1}{a}$.

Pentru a face discuția să observăm că $\Delta = a^2\,(u-v)^2$ și să punem

$$\delta = \sqrt{\Delta} = |\,a\,(u-v)\,| = \frac{p}{q}$$

$\frac{p}{q}$ fiind o fracție ireductibilă. Discuția va depinde de natura numerelor

$$(11) \qquad (\delta-1)^2-4 \quad , \quad (\delta+1)^2-4.$$

Se vede imediat că dacă $\Delta < 1$ nu avem nici o soluție.

Dacă $\Delta = 1$ nu avem soluție căci primul număr (11) e negativ, iar al doilea e nul, însă $a(u-v) = -1$, deci $u = v - \frac{1}{a}$ în contrazicere $u \neq v - \frac{1}{a}$.

Dacă $1 < \Delta < 9$ putem avea *două* soluții sau *nici una* după cum al doilea număr (11) este sau nu este patratul unui număr rațional. Când există aceste soluții, notațiile u, v fiind alese astfel ca $a(u-v) < 0$, ele sunt

$$\left(x-u\right)\left(x-v+\frac{1}{a}\right)\left(x-\gamma_1\right) \quad , \quad \left(x-u\right)\left(x-v+\frac{1}{a}\right)\left(x-\gamma_2\right)$$

γ_1, γ_2 fiind rădăcinile ecuației $f(x) = v - \frac{1}{a}$.

Dacă $\Delta = 9$ avem *una* soluție. Dacă $a(u-v) < 0$ această soluție este

$$\left(x-v\right)\left(x-u+\frac{1}{a}\right)\left(2ax+b\right).$$

Rămâne să examinăm cazul $\Delta > 9$. Cele ce preced sunt suficiente pentru a arăta cum se formează soluțiile în acest caz. Acum ambele numere (11) sunt pozitive. Vom arăta că și în acest caz problema are *cel mult două soluții distincte.* Pentru aceasta e destul să arătăm că *numerele* (11) *nu pot fi în același timp patrate de numere raționale.* Problema revine la a arăta că numerele

$$(12) \qquad \begin{cases} (p-q)^2 - 4q = (p+q)(p-3q), \\ (p+q)^2 - 4q = (p-q)(p+3q) \end{cases}$$

nu pot fi în același timp patrate perfecte, p, q fiind două numere naturale prime între ele.

Se vede din $p - 3q = (p+q) - 4q$ că numerele $p+q$, $p-3q$ nu pot avea alți factori comuni decât pe 1, 2 sau 4. La fel și numerele $p-q$, $p+3q$. Pentru demonstrație vom distinge mai multe cazuri:

7.5.1. p, q sunt de paritate diferită. Atunci $p+q$, $p-3q$ sunt prime între ele și $p-q$, $p+3q$ sunt deasemenea prime între ele. Rezultă că numerele

$$p-3q \quad , \quad p-q \quad , \quad p+q \quad , \quad p+3q$$

ar trebui să fie patrate perfecte. Insă *patru patrate nu pot forma o progresie aritmetică* [1]). Imposibilitatea e demonstrată.

7 5.2. $p = 4p' + 1$, $q = 4q' + 1$. In acest caz c.m.m.c.d. a lui $p+q$ şi $p-3q$ este 2 şi c.m.m.c.d. a lui $p-q$ şi $p+3q$ este 4. Rezultă că numerele $p-q$, $p+3q$ trebue să fie patrate perfecte iar numerele $p+q$, $p-3q$ duble de patrate perfecte. Avem, mai explicit

$$p-3q = 2(2p'-6q'-1) = 2r^2$$
$$p-q = 4(p'-q') = s^2$$
$$p+q = 2(2p'+2q'+1) = 2t^2$$
$$p+3q = 4(p'+3q'+1) = z^2.$$

Trebue să avem $s^2 = r^2 + t^2$, ceea ce nu se poate căci s este par r, t impare şi suma a două patrate impare nu poate fi divizibil prin 4. Imposibilitatea e încă demonstrată.

7.5.3. $p = 4p' + 3$, $q = 4p' + 1$. Demonstraţie ca şi în cazul precedent.

7.5.4. $p = 4p' + 1$, $q = 4q' + 3$. Demonstraţia ca mai sus.

7.5.5. $p = 4p' + 3$, $q = 4q' + 3$. Demonstraţia ca mai sus.

De altfel se poate uşor găsi forma lui δ pentru care unul din numerele (11) este un patrat. Aceste forme sunt $\rho + \frac{1}{\rho} + 1$ pentru primul şi $\rho + \frac{1}{\rho} - 1$ pentru al doilea, ρ fiind un număr raţional şi pozitiv oarecare.

Soluţii de tipul III

8. In acest caz $F(x)$ trebue să aibă cel puţin două zerori distincte, după cum se poate uşor constata. Fie

$$F(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma),$$

α, β, γ nefiind egale cu u şi v.

Vom distinge şi aici următoarele trei cazuri:

8.1. $\alpha = \beta \neq \gamma$. In acest caz α, γ sunt raţionali şi avem

$$F(f(x)) = [f(x)-\alpha]^2 [f(x)-\gamma].$$

---

1) A. GENOCHI *«Sur l'imposibilité de quelques égalités doubles»* C. R. Acad. Sci., Paris, **78**, 433—435 (1874).

Trebue să avem $f(\alpha) = \gamma$, $f'(\alpha) = 0$ şi $f(\gamma) = \alpha$, căci factorul $[f(x) - \alpha]^2$ nu trebue să se dividă cu $x - \alpha$ iar $f(x) - \gamma$ nu trebue să se dividă cu $x - \gamma$. α, γ sunt deci zerorile lui $g(x)$ care trebue să fie divizibil cu $f'(x)$. Se găseşte uşor condiţia necesară şi suficientă $\Delta = 5$ şi soluţia *unică* este atunci

$$(2ax + b)\, g(x).$$

8.2. α, β, γ diferiţi şi $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \alpha$, $f(\gamma) = \alpha$. α, β sunt deci zerorile lui $g(x)$. Polinomul $F(x)$ se divide deci cu $g(x)$ şi γ trebue să fie raţional. Rezultă că şi α, β trebue să fie raţionali, deci $\Delta - 4$ trebue să fie patratul unui număr raţional. Se vede imediat că rădăcinile ecuaţiei $f(x) = u_1$ sunt v_1 şi $u_1 + \frac{1}{a}$.

Dacă deci $\Delta - 4$ este patratul unui număr raţional ($\neq 0$) avem în general *două* soluţii distincte de această formă,

$$\left(x - u_1 - \frac{1}{a}\right) g(x) \quad , \quad \left(x - v_1 - \frac{1}{a}\right) g(x).$$

Se poate constata uşor că $u_1 + \frac{1}{a}$, $v_1 + \frac{1}{a}$ nu coincid cu u sau v căci primele sunt zerorile polinomului

$$g\left(x - \frac{1}{a}\right) = a\,[f(x) - x] + 1$$

care e totdeauna prim cu $f(x) - x$.

Dacă $u_1 = v_1 + \frac{1}{a}$ sau $v_1 = u_1 + \frac{1}{a}$ una din aceste soluţii se reduce la una deja găsită în cazul precedent. Pentru aceasta e necesar şi suficient ca $\Delta - 5$.

8.3. In fine avem cazul α, β, γ diferiţi şi $f(\beta) = \alpha$, $f(\gamma) = \beta$, $f(\alpha) = \gamma$. Discuţia dela No. 4 ne arată că avem *două* astfel de soluţii dacă $\Delta - 8$ este patratul unui număr raţional. Aceste soluţii distincte sunt polinoamele (10). Dacă $\Delta = 8$ acestea se reduc la *una* singură distincte care este polinomul $P(x)$. Putem scrie soluţiile sub o formă mai simplă dacă punem

$$\xi = ax + \frac{b+1}{2} \quad , \quad \Delta = 4\lambda^2 + 8 \quad , \quad (\lambda \geqq 0).$$

Avem atunci

$$P(x) - \frac{\sqrt{\Delta - 8}}{2} Q(x) = \xi^3 - (\lambda+1)\xi^2 - (\lambda^2+2)\xi + \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1,$$

$$P(x) + \frac{\sqrt{\Delta - 8}}{2} Q(x) = \xi^3 + (\lambda-1)\xi^2 - (\lambda^2+2)\xi - \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Discriminanţii acestor polinoame în ξ sunt

$$(4\lambda^2 + 2\lambda + 7)^2 \quad \text{şi} \quad (4\lambda^2 - 2\lambda + 7)^2,$$

de unde rezultă că *dacă soluţiile de această formă există atunci aceste soluţii* $F(x)$ *au zerorile toate reale şi distincte.*

9. In cazul particular al problemei 1876 avem

$$a = \frac{7}{6}, \quad b = -\frac{9}{6}, \quad c = -\frac{4}{6},$$

deci $\Delta = \frac{337}{36}$, care nu e patratul unui număr raţional. Rezultă că în acest caz nu avem soluţii de tipul I şi tipul II. Numărul $\Delta - 4 = \frac{193}{36}$ nu este patratul unui număr raţional, deci nu avem soluţii de tipul III forma 8.2. Avem însă $\Delta - 8 = \frac{49}{36} = \left(\frac{7}{6}\right)^2$, deci *avem două soluţii distincte de tipul II forma 8.3.* Făcând calculele găsim soluţiile distincte (suprimând factori constanţi)

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2), \quad 49x^3 - 49x^2 - 70x + 16.$$

Vedem că una din soluţii are zerorile -1, 1, 2 raţionale. De altfel evident că acest caz particular a fost ales tocmai ca polinomul $x^3 - 2x^2 - x + 2$ să fie o soluţie de tipul III forma 8.3. E destul pentru aceasta să luăm unul din ciclurile semnalate la No. 4 format din numerele 1, -1, 2 (în această ordine) şi coeficienţii a, b, c sunt atunci determinaţi de sistemul

$$f(1) = -1, \quad f(-1) = 2, \quad f(2) = 1.$$

10. Alte cazuri particulare interesante sunt:

10.1. Dacă $\Delta = 0$ problema are *trei* soluţii. Anume două soluţii de tipul I şi o soluţie de tipul II forma 7.4.

Exemplu. $a = c = 1$, $b = -1$. Soluţiile sunt

$(x-1)^3$, $x(x-1)^2$ (tipul I)

$(x-1)(x^2+1)$ (tipul II, forma 7.4).

10.2. Dacă $\Delta = 1$ problema are *opt* soluţii distincte şi anume trei de tipul I şi cinci de tipul II.

Exemplu. $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$. Avem soluţiile

$(x-1)^2(x-2)$, $(x-1)(x-2)^2$, $x(x-1)(x-2)$ (tipul I)

$(x-2)^3$, $(x-2)^3$ (tipul II, forma 7.1)

$x(x-2)^2$ (tipul II, forma 7.3)

$(x-1)(x^2-x+1)$, $(x-2)(x^2-x+1)$ (tipul II, forma 7.4).

10.3. Dacă $\Delta = 4$ problema are tot *opt* soluţii distincte şi anume patru de tipul I şi patru de tipul II.

Exemplu. $a = b = 1$, $c = -1$. Avem soluţiile distincte

$(x-1)(x^2-1)$, $(x+1)(x^2-1)$, $x(x^2-1)$, $(x+2)(x^2-1)$ (tipul I)

$(x-1)^3$, $(x+1)^3$ (tipul II, forma 7.1)

$x(x+1)^2$, $(x+2)(x-1)^2$ (tipul II, forma 7.3).

10.4. Dacă $\Delta = 5$ avem numai *două* soluţii distincte ambele de tipul III.

Exemplu. $a = c = 1$, $b = -2$. Avem soluţiile

$x(x-1)^2$ (tipul III, forma 8.1)

$x(x-1)(x-2)$ (tipul III, forma 8.2).

10.5. Dacă $\Delta = 8$ avem trei soluţii toate de tipul III.

Exemplu. $a = 1$, $b = c = -1$. Avem soluţiile distincte

$x(x^2-1)$, $(x-2)(x^2-1)$ (tipul III, forma 8.2)

$x^3 - x^2 - 2x + 1$ (tipul III, forma 8.3).

10.6. Dacă $\Delta = 9$ problema admite *treisprezece* soluţii distincte dintre care patru de tipul I, şapte de tipul II şi două de tipul III.

Exemplu. $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$. Avem soluţiile

$x^2(x-3)$, $x(x-3)^2$, $x(x+1)(x-3)$, $x(x-2)(x-3)$ (tipul I)

x^3 , $(x-3)^3$ (tipul II, forma 7.1)

$x^2(x-2)$, $(x+1)(x-3)^2$ (tipul, II, forma 7.3)

$x(x^2-x-1)$, $(x-3)(x^2-x-1)$ (tipul II, forma 7.4)

$(x-3)(x^2-1)$ (tipul II, formă 7.5)

x^3-3x^2+3 , x^3-2x^2-x+1 (tipul III, forma 8.3).

Se pot construi evident şi alte exemple. Ar mai trebui văzut dacă problema poate avea în acelaşi timp soluţii de forma 8.2 şi 8.3 în cazul când ecuaţia (2) este reductibilă. Pe urmă de examinat în ce caz putem avea în acelaşi timp soluţii de forma 7.5 şi 8.2 sau 8.3. Las pe seama corespondenţilor *Gazetei Matematice* să studieze aceste probleme care duc toate la sisteme diophantiene de ordinul al doilea (care la rândul lor conduc la ecuaţii diophantiene de ordinul al patrulea).

TIBERIU POPOVICIU.

O EXTINDERE RELATIV LA MODULELE RĂDĂCINILOR ECUAŢIILOR ALGEBRICE

In G. M. XLV pag. 513, D-l Prof. P. SERGESCU stabileşte ca aplicaţie imediată a limitei lui MAC LAURIN, intervalul $\frac{A_n}{A_n + A_k}$, $\frac{A_0 + A_k}{A_0}$ în care se află modulele rădăcinilor ecuaţiei algebrice:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (1)$$

unde: $|a_i| = A_i$, A_k fiind cel mai mare dintre aceste numere.

Prin artificii simple se poate încă restrânge acest interval, introducând şi ceilalţi coeficienţi ai ecuaţiei (1) în expresia limitelor lui.

Să aplicăm astfel limitele de mai sus transformatei în αy, a ecuaţiei (1), unde α este un parametru pozitiv variabil:

$$a_0 \alpha^n y^n + a_1 \alpha^{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \alpha y + a_n = 0. \qquad (2)$$

Va trebui să determinăm pe α astfel ca modulul unuia din coeficienţii acestei ecuaţii să fie, în mod evident, mai mare decât toţi ceilalţi.

Fie A_{k_1} numărul imediat următor în mărime lui A_k între numerele A_i şi să determinăm pe α astfel ca $a_k \alpha^{n-k}$ să fie coeficientul cu cel mai mare modul. Cu alte cuvinte:

$$A_0 \alpha^n < A_k \alpha^{n-k},\ A_1 \alpha^{n-1} < A_k \alpha^{n-k}, \ldots,\ A_{k-1} \alpha^{n-k+1} < A_k \alpha^{n-k} \quad (a)$$

ceea ce este suficient, dacă $\alpha > 1$, căci de aici încolo inegalităţile:

$$A_{k+1}\,\alpha^{n-k-1} < A_k\,\alpha^{n-k}, \ldots, \; A_n < A_k\,\alpha^{n-k}$$

sunt evidente. In adevăr conform ipotezelor:

$$\alpha^{n-k-1} < \alpha^{n-k}, \ldots, \; A_{k+1} < A_k, \ldots$$

Aceasta revine la:

$$A_0\,\alpha^k < A_k, \; A_1\,\alpha^{k-1} < A_k, \ldots, \; A_{k-1}\,\alpha < A_k \qquad (b)$$

$$\alpha < \sqrt[k]{\frac{A_k}{A_0}}, \; \alpha < \sqrt[k-1]{\frac{A_k}{A_1}}, \ldots, \; \alpha < \frac{A_k}{A_{k-1}} \qquad (c)$$

$\sqrt[k]{\frac{A_k}{A_{k_1}}}$ este însă o margine inferioară a numerelor $\sqrt[k-i]{\frac{A_k}{A_i}}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$

astfel că pentru $\alpha = \sqrt[k]{\frac{A_k}{A_{k_1}}} > 1$, inegalităţile (c) sunt satisfăcute a fortiori şi deci şi (b), (a).

Avem prin urmare:

$$|y| < 1 + \frac{A_k\,\alpha^{n-k}}{A_0\,\alpha^n} = 1 + \frac{A_{k_1}}{A_0}$$

$$|x| = |\alpha y| = \alpha\,|y| < \sqrt[k]{\frac{A_k}{A_{k_1}}}\left(1 + \frac{A_{k_1}}{A_0}\right).$$

Aplicând această limită şi transformatei în $\frac{1}{n}$ relativ la (1) obţinem în cele din urmă:

$$\sqrt[n-k]{\frac{A_{k_1}}{A_k}}\,\frac{A_n}{A_n + A_{k_1}} < |x| < \sqrt[k]{\frac{A_k}{A_{k_1}}}\,\frac{A_0 + A_{k_1}}{A_0}.$$

In particular, ecuaţia: $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, unde A_i sunt numere supraunitare, are modulele rădăcinilor mai mici ca

$$2A_1 \sqrt{A_2}\,\sqrt[3]{A_3} \ldots \sqrt[n]{A_n}.$$

Iar ecuaţia:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1 = 0,$$

are modulele rădăcinilor mai mari ca

$$\frac{1}{2A_1 \sqrt{A_2}\,\sqrt[3]{A_3} \ldots \sqrt[n]{A_n}}.$$

Exemple:

Ecuaţia:

$$x^n + x^{n-1} + 2^2 x^{n-2} + 3^3 x^{n-3} + \ldots + n^n = 0,$$

are modulele rădăcinilor mai mici ca $2n!$. Limita indicată de D-l Prof. SERGESCU dă: $|x| < 1 + x^n$.

Deasemenea modulele rădăcinilor ecuaţiei $\sum_0^n (ix)^i = 0$ sunt mai mari ca $\frac{1}{2n!}$.

Ecuaţia:

$$x^n + x^{n-1} + \ldots + ax^{n-i} + x^{n-i-1} + \ldots + 1 = 0,$$

unde $A > 1$ are modulele rădăcinilor cuprinse între:

$$\frac{1}{\sqrt[n-i]{2A}} \quad \text{şi} \quad 2\sqrt[i]{A}.$$

IULIAN PETRESCU
Liceul Gh. Lazăr, Bucureşti.

Notă adăugată de D-l P. SERGESCU. Frumosul articol al D-lui IULIAN PETRESCU mai poate fi precizat.

Se poate ca mai mulţi coeficienţi să aibă acelaşi modul. Vom lua atunci drept a_k pe acela dintre coeficienţii de modul maxim care are indicele *cel mai mic.* In adevăr, pentru toţi coeficienţii următori inegalităţile (a) rămân valabile, chiar dacă toţi sunt egali cu A_k în modul, căci $\alpha^{n-k-j} < \alpha^{n-k}$ în ipoteza $\alpha > 1$. Prin urmare coeficienţii a_{k+j} ($j = 1, \ldots, n-k$) nu mai joacă nici un rol în calculele următoare şi deci când căutăm pe A_{k_1} nu trebue să ţinem seama decât de *indicii mai mici decât k.*

In acelaşi mod, luăm drept a_{k_1} coeficientul de modul imediat următor lui A_k care are *cel mai mic indice* posibil dintre $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$.

In general, deci putem presupune că avem

$$k > k_1 > k_2 > \ldots > k_m > 0$$

iar k_j e *cel mai mic* indice cuprins între a şi k_{j-1} care corespunde coeficientului de modul imediat mai mic ca $A_{k_{j-1}}$.

Inegalitatea (3) din dreapta a D-lui IULIAN PETRESCU poate fi deci restrânsă astfel:

$$|x| < \frac{\sqrt[k]{A_k}\,\sqrt[k_1]{A_{k_1}} \ldots \sqrt[k_m]{A_{k_m}}}{\sqrt[M]{A_{k_m}^{\left(\frac{M}{k} + \ldots + \frac{M}{k_m}\right)}}} \cdot \frac{A_0 + A_m}{A_0} \qquad (4)$$

unde M e cel mai mic multiplu comun al numerelor din şirul descrescător $k, k_1, \ldots, k_m$.

Aceasta ne arată că limita D-lui IULIAN PETRESCU e cu atât mai avantajoasă cu cât coeficienţii a_i sunt aşezaţi în ordinea mai normală a modulelor crescătoare.

Exemplul pe care-l dă D-sa:

$$x^n + x^{n-1} + 2^2 x^{n-2} + \ldots + n^n = 0$$

satisface perfect acestei ordini. Dar dacă de pildă a_2 e coeficientul de modulul cel mai mare atunci limitarea (3) introduce factori inutili care măresc limita. De pildă, pentru

$$x^n + n^{n+1} x^{n-1} + 2^2 x^{n-2} + \ldots + n^n = 0$$

limita (3) dă $2n^{n+1} n!$ pe când simpla limită $\frac{A_0 + A_k}{A_0}$ devine $1 + n^{n+1}$.

In particular dacă A_0 e modulul cel mai mare limita $\frac{A_0 + A_k}{A_0}$ devine 2; toate rădăcinile unei astfel de ecuaţii sunt mai mici ca 2.

Considerând transformata în $\frac{1}{x}$, găsim o limitare inferioară a modulelor rădăcinilor ecuaţiei date.

Fie l indicele *cel mai mare* al coeficienţilor de modul maxim în (1). Avem $k = l$ dacă există un singur coeficient de modul maxim. In cazul când un singur coeficient din ecuaţie are modulul maxim avem $k = l$. Dar în general $k < l$ şi pentru calcularea limitei inferioare coeficienţii $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_{l-1}$ sunt indiferenţi. Insemnând cu l_1 indicele *cel mai mare* (unde $l_1 > l$) al coeficientului care are modulul inferior lui $A_k = A_l$ şi, în general, cu $l_j > l_{j-1}$ indicele *cel mai mare* al coeficientului care are modulul imediat următor lui A_{j-1} în ordinea descrescândă, avem:

$$\frac{1}{|x|} < \frac{\sqrt[n-l]{A_l}\ \sqrt[n-l_1]{A_{l_1}} \ldots \sqrt[n-l_s]{A_{l_s}}}{\sqrt[N]{A_{l_s}^{\frac{N}{n-l}+\frac{N}{n-l_1}+\ldots+\frac{N}{n-l_s}}}} \cdot \frac{A_n + A_{l_s}}{A_n} \qquad (5)$$

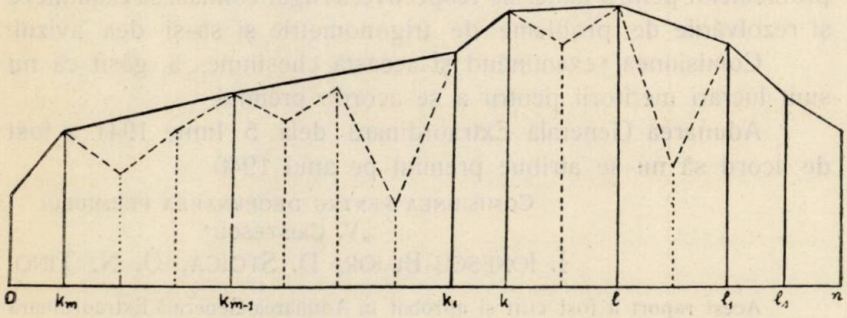
unde N e cel mai mic multiplu comun al numerelor $n - l, n - l_1, \ldots, n - l_s$, iar l_s e cel mai mare indice al coeficientului al cărui modul e imediat următor lui A_n în ordinea crescătoare. Avem deci:

$$l < l_1 < l_2 < \ldots < l_s < n.$$

Reunind cele două limitări, superioară şi inferioară, obţinem:

$$\frac{\sqrt[N]{A_{l_s}^{\frac{N}{n-l}+\frac{N}{n-l_1}+\ldots+\frac{N}{n-l_s}}}}{\sqrt[n-l]{A_l}\sqrt[n-l_1]{A_{l_1}}\ldots\sqrt[n-l_s]{A_{l_s}}}\cdot\frac{A_n}{A_n+A_{l_s}}<|x|<$$

$$<\frac{\sqrt[k]{A_k}\sqrt[k_1]{A_{k_1}}\ldots\sqrt[k_m]{A_{k_m}}}{\sqrt[M]{A_{k_m}^{\frac{M}{k}+\frac{M}{k_1}+\ldots+\frac{M}{k_m}}}}\cdot\frac{A_0+A_{k_m}}{A_0}\cdot \tag{6}$$



După cum se vede, dacă $l > k$, coeficienţii a_{k+1}, $a_{k+2}, \ldots$, a_{l-1} nu joacă nici un rol în calcularea limitelor superioară şi inferioară după procedeul precedent.

Se poate da o imagină grafică a calculelor de mai sus. Să considerăm punctele C_j de coordonate j, A_j unde $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. Din C_0 se roteşte dreapta cu coeficient unghiular pozitiv spre argumentele crescătoare, până întâlneşte punctul C de abscisa cea mai apropiată. Acela va fi C_{k_m}. In C_{k_m} se aplică acelaşi procedeu: se roteşte înspre argumentele crescătoare o semidreaptă pornind din direcţia orizontală până întâlneşte punctul C de abscisa cea mai apropiată posibil de k_m. Acela va fi $C_{k_{m-1}}$ ş. a. m. d.

Când am ajuns în punctul din care nici o semidreaptă pe care o rotim din direcţia orizontală în sus să nu mai întâlnească nici un alt punct C suntem în C_k. Conturul poligonal astfel construit $C_0 C_{k_m} \ldots C_k$, cu ordonatele vârfurilor crescătoare, este o imagină a coeficienţilor utili în limita superioară. Punctele C_j interioare acestui contur poligonal sunt inutile. Din C_k se duce orizontala până la ultimul punct C pe aceeaşi orizontală. Va fi C_l. Pentru imagina coeficienţilor utili în limita inferioară se urmează un procedeu analog. Pornim însă din C_n cu semidrepte al căror argument descreşte dela π spre $\frac{\pi}{2}$ până ce semidreapta întâlneşte punctul C de abscisa cea mai apropiată de n; acela va fi C_{l_s}. In C_{l_0} se aplică acelaşi procedeu, ş. a. m. d. până închidem în C_l conturul poligonal.

RAPORT ASUPRA PREMIULUI „V. CRISTESCU"

Comisia însărcinată cu acordarea acestui premiu, pentru lucrări referitoare la trigonometrie, dintre cele publicate în *Gazeta Matematică,* an. XLV, compusă din d-nii: C. IONESCU-BUJOR, D. STOICA şi O. N. ŢINO a opiniat că nu sunt publicaţii făcute de corespondenţi, cărora să li se poată acorda premiul şi a propus amânarea acordării premiului pentru anul următor.

Adunarea Generală, având în vedere că pentru celelalte premii s'a luat în considerare şi activitatea corespondenţilor în rezolvarea problemelor pentru materiile respective, a rugat comisia să examineze şi rezolvările de probleme de trigonometrie şi să-şi dea avizul.

Comisiunea, examinând şi această chestiune, a găsit că nu sunt lucrări meritorii pentru a se acorda premiul.

Adunarea Generală Extraordinară dela 5 Iunie 1941 a fost de acord să nu se atribue premiul pe anul 1940.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „V. CRISTESCU"

I. IONESCU-BUJOR, D. STOICA, O. N. ŢINO.

Acest raport a fost citit şi aprobat în Adunarea Generală Extraordinară dela 5 Iunie 1941.

NOTE MATEMATICE

44. **Media şi extrema raţie.** In *Gazeta Matematică,* Anul XLIV, pag. 647, D-l V. MARIAN a publicat *Cererea* No. 286 prin care întreba dacă există termen românesc pentru latinescul *sectio aurea* (fr. *section d'or,* germ. *Goldene Schnitt,* eng. *golden section*) şi dacă nu ar fi nemerit să zicem şi noi în limba română *secţiunea de aur,* problemei cunoscute sub numele de *media şi extrema raţie.* Mărturisesc că multă vreme nu am priceput ce legătură este între această împerechere de cuvinte şi problema geometrică corespondentă şi sunt sigur că mulţi profesori de matematică ar rămâne încurcaţi dacă elevii le-ar cere explicaţii în această privinţă. Autorii de geometrii fug de asemenea explicaţii şi tratează problema geometrică corespondentă ca şi cum expresiunea *„medie şi extremă raţie"* ar fi clară ca lumina zilei. *Cererea* Nr. 286 îmi dă ocazia de a vorbi aci puţin de această chestiune.

EUCLID rezolvă în Cartea II, problema 11 cu enunțul:

„Să se taie o dreaptă dată, în așa fel ca dreptunghiul cuprins de dreapta întreagă și unul din segmente să fie egal cu pătratul segmentului rămas“.

Acolo nu se dă niciun nume problemei acesteia. In Cartea VI, la problema 30, EUCLID revine asupra chestiunii acesteia cu următorul enunț:

„O dreaptă finită dată să se taie după un raport extrem și mediu“.

In definițiile dela începutul Cărții VI se spune:

„Se zice *că o dreaptă se taie după un raport extrem și mediu, când, după cum întreaga către segmentul mai mare, tot așa cel mai mare către cel mai mic“.*

Din cauza proprietăților numeroase, frumoase și interesante ale acestei diviziuni a dreptelor, cei vechi i-au zis și *secțiunea de aur (sectio aurea).* Mai târziu, unii matematicieni entusiasmați de proprietățile acestei secțiuni de aur, i-au dat numele de *secțiunea* sau *proporțiunea divină,* ca de exemplu LUCAS de BURGO, care a scris 66 pagini cu proprietăți ale mediei și extremei rații. Această numire a durat în Evul mediu și în Epoca renașterii și se găsește prin geometriile tipărite în secolul XVI. Autorii francezi au revenit apoi la *moyenne et extrême raison,* după cum se poate vedea în *Recreațiunile matematice* ale lui OZANAM din 1790. Italienii i-au zis de asemenea *Media ed estrema ragione.*

Traducătorii români ai primelor geometrii franceze au adoptat acest mod de a exprima problema. Astfel PETRACHE POIENARU, în traducerea din 1837 a Geometriei lui LEGENDRE, îi zice *„de mijloacă și de margine proporțională“;* DUMITRU PETRESCU, în *Elemente de Geometrie* din 1874, îi zice *„De mijloacă și extremă rație“.*

Prima carte pe care am întâlnit-o și care caută să explice numirea dată problemei a fost *Mathématique et Mathématiciens,* a lui A. REBIÈRE din 1898 unde găsim, la pag. 305:

„La locution **„Moyenne et extrême raison“** *viendrait de ce que si l'on considère la petite partie et la droite entière, on peut dire que, dans cet ordre, la raison de l'extrême égale la raison de la moyenne“.*

Această explicație nu spune mult.

In secolul XVIII autorii germani de geometrii au revenit la numirea antică de *secţiune de aur*, în urma unora entusiasmaţi de proprietăţile acestei diviziuni geometrice, în special în secolul XIX, s'a răspândit mult această denumire, mai ales de către estetul A. ZEISSING care la 1854 a scris: „*Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers aus einem bisher umbekannt gebliebenem, die ganze Natur und Kunst durchdringendem morphologischem Grundgesetze*". El arată că mijlocul corpului omenesc împarte toată înălţimea corpului după secţiunea de aur, că gâtul împarte trupul după aceeaşi secţiune lăsând capului partea cea mică, şi că această diviziune de aur o găseşte chiar la părţile degetelor. In diferitele părţi ale plantelor, el găseşte secţia de aur la trunchiuri, ramuri, frunze, etc. In literatura ştiinţifică germană se găsesc numeroase scrieri privitoare la *secţiunea de aur.*

La noi această denumire nu a prins deşi avem cărţi traduse sau influenţate de scriitorii germani. De altfel, nici această denumire nu spune nimic mai mult în legătură cu natura problemei de cât *media şi extrema raţie.* Cred că ar fi mai raţional să i se zică *Secţia decagonului,* căci împărţind raza după media şi extrema raţie, sau secţiunea de aur, se găseşte latura decagonului regulat înscris în cercul de acea rază.

Cu aceasta se dă şi un răspuns Cererii Nr. 286.

I. IONESCU.

45. *Asupra problemei 2580.* Pe când soluţia acestei probleme era sub tipar, s'a primit o soluţie a ei diferită de cea publicată în Anul XXXVII, pag. 70, trimisă de D-l I. B. FLORESCU. Concluzia la care a ajuns D-sa este următoarea:

Pentru ca:

$$\frac{m}{n}+\frac{n}{p}+\frac{p}{m}$$

să fie un număr întreg trebue să avem $m=\alpha a^2b$, $n=\alpha b^2c$, $p=\alpha c^2a$ *în care* α *este un număr oarecare iar* a, b, c *trei numere prime între ele astfel alese încât suma cuburilor lor să se dividă cu produsul lor. Rezolvarea completă a problemei 2580 reclamă deci soluţionarea următoarei ecuaţii diofantine:*

$$a^3+b^3+c^3=t.\,a.\,b.\,c.$$

Pentru rezolvarea acestei ecuaţii, D-l I. B. FLORESCU a dat două soluţii pe care le vom publica în rezumat în Numărul viitor.

I. I.

46. *Numere interesante cu 10 cifre diferite* [1]). Pentru N_6 începând cu 5, s'au găsit următoarele 182 soluțiuni:

N_6	N	N_6	N
502 487 931	3 014 927 586	528 304 179	3 169 825 074
502 874 931	3 017 249 586	528 749 301	3 172 495 806
502 987 431	3 017 924 586	528 749 310	3 172 495 860
510 248 793	3 061 492 758	539 043 178	3 174 259 068
510 287 493	3 061 724 958	529 178 304	3 175 069 824
510 298 743	3 061 792 458	529 317 804	3 175 906 824
517 082 943	3 102 497 658	529 417 083	3 176 502 498
517 804 329	3 106 825 974	529 418 307	3 176 509 842
517 829 043	3 106 974 248	529 430 817	3 176 584 902
517 829 304	3 106 975 824	529 431 708	3 176 590 248
517 830 429	3 106 982 574	529 431 807	3 176 590 842
517 904 328	3 107 425 968	529 874 301	3 179 245 806
517 928 304	3 107 569 824	530 417 829	3 182 506 974
517 942 083	3 107 652 498	530 418 279	3 182 509 674
517 943 082	3 107 658 492	530 428 179	3 182 569 074
517 943 208	3 107 659 248	530 794 182	3 184 765 092
518 043 279	3 108 259 674	530 798 421	3 184 790 526
518 207 943	3 109 247 658	530 817 942	3 184 907 652
518 279 304	3 109 657 824	530 829 417	3 184 976 502
518 294 307	3 109 765 842	530 849 127	3 185 094 762
518 304 279	3 109 825 674	530 984 127	3 185 904 762
518 307 942	3 109 847 652	531 078 492	3 186 470 952
520 794 183	3 124 765 098	531 079 842	3 186 479 052
520 798 431	3 124 790 586	531 084 957	3 186 509 742
520 817 943	3 124 907 658	531 270 849	3 187 625 094
521 078 493	3 126 470 958	531 780 429	3 190 682 574
524 879 301	3 149 275 806	531 790 428	3 190 742 568
524 879 310	3 149 275 860	531 792 804	3 190 756 824
527 084 913	3 162 509 478	531 794 208	3 190 765 248
527 098 413	3 162 590 478	531 804 279	3 190 825 674
527 130 849	3 162 785 094	531 807 942	3 190 847 652
527 130 984	3 162 785 904	532 079 418	3 192 476 508
527 904 183	3 167 425 098	532 084 791	3 192 508 746
527 904 318	3 167 425 908	532 097 841	3 192 587 046
527 918 304	3 167 509 824	532 108 479	3 192 650 874
527 931 804	3 167 590 824	532 109 784	3 192 658 704
528 043 179	3 168 259 074	532 790 418	3 196 742 508
528 179 043	3 169 074 258	532 791 804	3 196 750 824
528 179 304	3 169 075 824	532 804 179	3 196 825 074

1) Urmare la Nota dela pag. 411, Vol. XLVI, *Gazeta Matematică*.

N_6	N	N_6	N
532 840 971	3 197 045 826	570 298 431	3 421 790 586
532 841 097	3 197 046 582	570 329 418	3 421 976 508
532 847 091	3 197 082 546	571 028 493	3 426 170 958
532 847 109	3 197 082 654	571 092 843	3 426 179 058
532 904 178	3 197 425 068	578 492 031	3 470 952 186
532 910 847	3 197 465 082	579 418 302	3 476 509 812
532 917 804	3 197 506 824	579 418 203	3 476 509 218
532 971 084	3 197 826 504	579 418 302	3 476 509 812
540 178 293	3 241 069 758	579 420 183	3 476 521 098
540 179 283	3 241 075 698	579 420 318	3 476 521 908
540 179 328	3 241 075 968	579 430 182	3 476 581 092
540 182 793	3 241 096 758	579 432 018	3 476 592 108
540 279 183	3 241 675 098	579 842 107	3 479 052 618
540 279 318	3 241 675 908	572 843 102	3 479 058 612
540 281 793	3 241 690 758	580 294 317	3 481 765 902
540 291 783	3 241 750 698	580 317 942	3 481 907 652
540 317 928	3 241 907 568	580 329 417	3 481 976 502
540 327 918	3 241 967 508	581 702 943	3 490 217 658
540 329 178	3 241 975 068	581 794 203	3 490 765 218
541 780 329	3 250 681 974	582 017 943	3 492 107 658
541 782 903	3 250 697 418	582 941 703	3 497 658 218
541 783 029	3 250 698 174	582 943 017	3 497 658 102
541 790 283	3 250 741 698	583 017 942	3 498 107 652
541 827 903	3 250 967 418	583 029 417	3 498 176 502
541 830 279	3 250 981 674	584 032 971	3 504 197 826
542 790 183	3 256 741 098	584 103 297	3 504 619 782
542 790 318	3 256 741 908	584 703 291	3 508 219 746
542 803 179	3 256 819 074	584 710 329	3 508 261 974
542 817 903	3 256 907 418	584 791 032	3 508 746 192
542 830 179	3 256 981 074	584 903 127	3 509 418 762
542 901 783	3 257 410 698	584 912 703	3 509 476 218
542 903 178	3 257 419 068	584 913 027	3 509 478 162
543 017 829	3 258 106 974	590 328 471	3 541 970 826
543 018 279	3 258 109 674	591 032 847	3 546 197 082
543 028 179	3 258 169 074	597 032 841	3 548 197 046
543 178 029	3 259 068 174	597 103 284	3 582 619 704
543 179 028	3 259 074 168	597 840 321	3 587 041 926
543 180 279	3 259 081 674	597 841 032	3 587 046 192
543 280 179	3 259 681 074	598 402 713	3 590 416 278
570 182 943	3 421 097 658	598 403 147	3 590 418 762
570 294 183	3 421 765 098	598 412 703	3 590 476 218
570 294 318	3 421 765 908	598 413 027	3 590 478 162

G-L GH. BUICLIU.

47. *Asupra problemei Nr. 5260.* Enunţul acestei probleme, aşa cum a fost propus de subsemnatul în Vol. XLV, pag. 334, este greşit. In consecinţă şi soluţia pe care am dat-o în Vol. XLVI, pag. 271—273, este greşită. In adevăr, octogonul care se formează în condiţiunile problemei nu este un *octogon regulat* deoarece diagonalele sale sunt numai două câte două egale. Eroarea pe care am comis-o enunţând că octogonul este regulat se datorează faptului că diferenţa între mărimile celor două diagonale este foarte mică şi nu se poate observa pe un desemn.

In adevăr, fie dh şi cg două din aceste diagonale. Din triunghiurile asemenea A'_{cg} şi $A'CD$ avem, O fiind centrul patratului:

$$\frac{cg}{CD} = \frac{A'_c}{A'C} = \frac{A'O}{A'C'} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad cg = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}a. \qquad (1)$$

Din triunghiurile asemenea Bdh şi $BC'D'$, avem

$$\frac{dh}{C'D'} = \frac{Bd}{BC'} = \frac{BO}{Bf'},$$

f' fiind piciorul înălţimii corespunzătoare vârfului B, sau intersecţia diagonalei BD cu digonala C_1D_1 din patratul OC_1DD_1. Avem apoi

$$BO = \frac{\sqrt{2}}{2}a = C'D'$$

$$Bf' = \sqrt{2}\,a - \frac{\sqrt{2}}{4}a = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$$

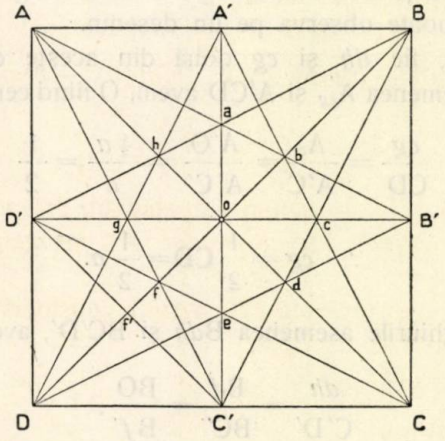
$$\therefore \quad dh = \frac{\overline{D'C'} \times \overline{BO}}{Bf'} = \frac{\sqrt{2}}{3}a. \qquad (2)$$

Comparând (1) cu (2), avem

$$\frac{cg}{dh} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{2}}{3}a} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cong 1{,}06.$$

Rezultă dar că, *cg* este numai cu $6^0/_0$ mai mare decât *dh*, astfel că, pe un desemn în care *dh* este egal cu 5 cm s. ex., *cg* va fi egal numai cu 5,3 cm, diferenţă ce nu se poate observa pe un desemn obişnuit.

Faptul că octogonul *abcdefgh* nu este regulat, nu a fost fost observat de *niciunul* din rezolvitorii problemei, astfel că, toate soluţiile primite au fost greşite.



Enunţul exact al problemei este acel publicat în Vol. XLVI, pag. 444. Sub această formă însă, problema este identică cu problema Nr. 843, propusă de Domnul C. GEORGESCU în Revista Matematică din Timişoara (Vol. X, p. 19—20), unde se dă ca rezultat

$$S_8 = \frac{1}{6}\, a^2.$$

Condiţia ca octogonul *abcdefgh* să fie regulat, a fost stabilită de Domnul General GH. BUICLIU în soluţia ce a dat problemei Nr. 4025, propusă de D-sa (G. M. Vol. XXXIX, p. 107—113).

Cu acestea, problema Nr. 5260 trebueşte a fi considerată definitiv anulată, prima oară ca fiind greşită şi a doua oară ca fiind cunoscută şi se înlocueşte prin problema propusă sub acelaşi număr, în numărul de faţă.

ION S. ANTONIU.

48. *Asupra triunghiului automedian.* Dacă dreapta Δ

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$$

trece prin centrul cercului circumscris (O), ortopolului ei e centrul hiperbolei echilatere (H), transformata prin inversiune isogonală a lui Δ. Ori, avem pentru ecuaţia lui (H):

$$la^2\beta\gamma + mb^2\gamma\alpha + nc^2\alpha\beta = 0$$

al cărei centru (ortopolul lui Δ), e

$$\frac{\alpha}{a^2l(-a^2l + b^2m + c^2n)} = \frac{\beta}{b^2m(a^2l - b^2m + c^2n)}$$

$$= \frac{\gamma}{c^2n(a^2l + b^2m - c^2n)}.$$

Vom arăta că în triunghiul automedian, *ortopolul dreptei* OK *e pe una din mediane, iar al dreptei* OH, *pe reciproca uneia din înălţimi.*

In adevăr, dacă dreapta, (diametrul) considerat, e OK, *l, m, n* sunt proporţionale cu

$$\frac{b^2 - c^2}{a^2}, \quad \frac{c^2 - a^2}{b^2}, \quad \frac{a^2 - b^2}{c^2}$$

şi ortopolul e

P $$\frac{\alpha}{(b^2 - c^2)^2} = \frac{\beta}{(c^2 - a^2)^2} = \frac{\gamma}{(a^2 - b^2)^2}.$$

Dacă $$2a^2 = b^2 + c^2$$

relaţia care defineşte triunghiul automedian, găsim $\beta = \gamma$, deci P e pe mediana din A. Coordonatele lui, sunt

$$\frac{\alpha}{4} = \frac{\beta}{1} = \frac{\gamma}{1}$$

şi se deduce raportul în care împarte acea mediană.

Dacă Δ coincide cu OH, deci

$$\frac{l}{(b^2 - c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)} = \dots$$

ortopolul ei e

$$\frac{\alpha}{(b^2 - c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)} = \dots$$

Dacă $2a^2 = b^2 + c^2$,

$$\frac{\beta}{a^2 - b^2 + c^2} = \frac{\gamma}{a^2 + b^2 - c^2}$$

reciproca înălţimii AH.

ION C. VASILIU.

49. *Asupra problemei 4761.* In soluţia acestei probleme, publicată la pagina 43, Volumul XLIV, se dă condiţia necesară şi suficientă pentru ca diagonalele AD, BE, CF, care unesc vârfurile opuse [1]) ale unui exagon (ABCDEF) înscris într'un cerc, să fie concurente.

Vrem să înfăţişăm o nouă demonstraţie, care are asupra celei dintâi avantajul că lămureşte mai bine legătura strânsă care există între condiţia găsită şi teorema lui CEVA şi conduce şi la o nouă proprietate a unor exagoane înscrise în cerc.

Condiţia căutată este o consecinţă imediată a teoremei lui CEVA.

Intr'adevăr, Aa, Bb, Cc, fiind trei ceviene, condiţia de concurenţă a lor se poate pune şi sub forma trigonometrică:

$$\frac{\sin a\mathrm{AB}}{\sin a\mathrm{BC}} \cdot \frac{\sin b\mathrm{BC}}{\sin b\mathrm{BA}} \cdot \frac{\sin c\mathrm{CA}}{\sin c\mathrm{CB}} = -1, \qquad (1)$$

această relaţie fiind adevărată oricare ar fi sensurile pozitive alese pe laturile triunghiului şi pe cele trei ceviene (Vezi, de exemplu, EUG. ROUCHÉ et CH. DE COMBEROUSSE. Traité de Géométrie. 1922. Tome I, pag. 226).

Dacă, în cazul problemei 4761, considerăm triunghiul EAC cu cevienele EB, AD şi CF, relaţia (1) devine:

$$\frac{\sin\mathrm{BEA}}{\sin\mathrm{BEC}} \cdot \frac{\sin\mathrm{DAC}}{\sin\mathrm{DAE}} \cdot \frac{\sin\mathrm{FCE}}{\sin\mathrm{FCA}} = -1. \qquad (2)$$

Alegând un sens pozitiv pe cerc, ne asigurăm uşor că relaţia (2) poate fi scrisă

$$\frac{\sin\frac{\widehat{\mathrm{BA}}}{2}}{\sin\frac{\widehat{\mathrm{BC}}}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\widehat{\mathrm{DC}}}{2}}{\sin\frac{\widehat{\mathrm{DE}}}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\widehat{\mathrm{FE}}}{2}}{\sin\frac{\widehat{\mathrm{FA}}}{2}} = -1. \qquad (3)$$

1) Definite aşa cum se definesc vârfurile opuse ale unui exagon în teorema lui BRIANCHON.

Amplificăm acum fiecare raport din (3) cu 2R (R fiind raza cercului), facem să corespundă sensului pozitiv de pe cerc, sensul pozitiv pe o coardă a cercului şi relaţia (3) devine:

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\overline{FE}}{\overline{FA}} = -1, \qquad (4)$$

care este condiţia căutată [1]).

Insă cele trei drepte, AD, BE, CF, pot fi socotite ceviene şi în alt triunghi afară de EAC. Dacă luăm, de exemplu, triunghiul ABC, condiţia de concurenţă este:

$$\frac{\sin DAC}{\sin DAB} \cdot \frac{\sin EBA}{\sin EBC} \cdot \frac{\sin FCB}{\sin FCA} = -1$$

şi ea ne conduce la

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}} = -1. \qquad (5)$$

Comparând pe (4) cu (5) deducem că:

Dacă într'un exagon ABCDEF *înscris într'un cerc diagonalele care unesc vârfurile opuse,* AD, BE, CF, *sunt concurente, atunci avem relaţia* [2]*):*

$$\boxed{\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{ED}}{\overline{EF}}},$$

şi alte două analoage corespunzătoare diagonalelor AD şi CF.

PETRE BOLDESCU
Profesor.

1) Relaţia (4) nu conduce la o nouă condiţie care să servească la rezolvarea problemelor de concurenţă. Relaţia (γ) publicată anterior (Loc. citat) este eronată, căci coardele nu sunt proporţionale cu arcele pe care le subîntind, ci sinusurile jumătăţilor acestor arce. Soluţia publicată la pag. 43, Vol. XLIV poate constitui, deci, numai o nouă demonstraţie pentru relaţia (2).

2) Remarcabilă pentru simetria ei; poate fi enunţată: raportul distanţelor dela un vârf la două vârfuri neopuse înmulţit cu raportul distanţelor dela acelaşi vârf la opusele primelor două, este egal cu produsul rapoartelor formate la fel, plecând însă dela vârful opus celui dintâi.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul „I. E. R.“. Anul VIII. Nr. 4, Decemvrie 1940. Bucureşti.

Deutsche Mathematik, editat de THEODOR VAHLEN, Anul V, Caietul 2, Iulie 1940. Leipzig.

Pozitiva. Revistă de matematici, Anul I, Nr. 9—10, Mai—Iunie 1941. Bucureşti, Str. Vulturilor 63. Abonamentul 100 lei.

Notă asupra curbelor osculatoare staţionare, de P. SERGESCU. Asupra unor relaţii metrice, de CEZAR COŞNIŢĂ. Asupra triunghiurilor podare şi unor cercuri ataşate unui triunghiu, de ANDREI DOBRESCU. Asupra mişcării unui punct material într'un mediu rezistent sub acţiunea unei forţe centrale, de CAIUS IACOB. Notă cu privire la cosinusurile de transformare într'un spaţiu cu patru dimensiuni, de EMIL GRIGORESCU. Probleme propuse şi rezolvate.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXI. Mai 1941. Nr. 3. Generalizarea unei teoreme a lui MAURICE D'OCAGNE, de D. V. IONESCU. Asupra rezolvării pe cale trigonometrică a ecuaţiilor algebrice, de N. GHIRCOIAŞU. O familie de transversale, de ANDREI DOBRESCU.

Suplimentul cu exerciţii al Gazetei Matematice. Anul VII. Nr. 9. 1 Iunie 1941, Bucureşti. Abonamentul 50 lei.

Exerciţii pentru liceu propuse şi exerciţii rezolvate.

EM. ARGHIRIADE. *Geometria axială diferenţială a curbelor strâmbe,* teză prezentată la Facultatea de Ştiinţe din Iaşi pentru a obţine gradul de doctor în matematici.

THEODOR VAHLEN. *Abstrakte Geometrie,* apărută în biblioteca revistei Deutsche Mathematik. Leipzig 1940.

CERERI

302. Există acte vechi româneşti în care să se găsească exprimate volume în stânjeni cubici sau coţi cubici sau subdiviziuni ale acestora?

I. I.

Răspuns la Cererea Nr. 286. Un răspuns al acestei *Cereri* se găseşte în *Nota Matematică* Nr. 44 *) publicată în acest număr.

I. IONESCU.

*) Nota despre *media şi extrema raţie.*

DIVERSE

a) Sporirea Bibliotecii.

P. MANSION. Bibliographie. Bruxelles, 1912.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

J. NEUBERG. Sur les équicentres de deux systèmes de n points. Bruxelles, 1913.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

ERNEST LEBON. Traité de Géometrie Descriptive, vol. I, II. Paris.
F. J. Eléments de Géometrie Descriptive. Paris.
DR. JOHANNES HJELMSLEV. Darstellende Geometrie. Berlin und Leipzig, 1914.
J. J. PILLET. Géometrie Descriptive, partea I. Paris.
TRAIAN LALESCU şi ST. MIREA. Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie. Bucureşti 1914.
C. F. A. LEROY. Traité de Géometrie Descriptive. Tome I texte, Paris 1885; tome II planches, Paris 1885.
EDMOND DUBOIS. Cours d'Astronomie. Paris.
M. J. ESCARY. Mémoire sur le problème des trois corps. 1893.
GASTON JULIA. Cours de Cinématique. Paris 1928.
H. POINCARÉ. Cinématique et Mécanismes. Paris.
P. PUISEUX. Leçons de Cinématique. Paris 1890.
GABRIEL KOENIGS. Leçons de Cinématique. Paris 1897.
F. J. Eléments de Mécanique. Paris.
PAUL APPELL. Traité de Mécanique Rationnelle, Tome I, II. Paris 1926, 1931.
M. APPELL. Cours de Mécanique Rationnelle. Paris, 1888.
H. LAURENT. Traité de Mécanique Rationnelle, Tome II. Paris 1878.
H. RESAL. Traité de Mécanique Générale. Tome I. Paris 1895.
PAUL MONTEL. Cours de Mécanique Rationnelle. Paris 1935.
G. STURM. Cours de Mécanique, Tome I. Paris 1883.
J. DUFAILLY. Mécanique. Paris 1894.
Donate de familia decedatei PREDUŢA D. BUNGEŢIANU.

b) Şedinţe.

Societatea Română de Matematici a ţinut şedinţe în 5.V, 19.V şi 2.VI cu următoarele comunicări:

L. PRANDTL. Mathematisches zu Überschallströmung.

D. BARBILIAN. Măsura iperbolică în raport cu forme hermitice peste algebre involutive.

C. DRÂMBĂ. Ciocniri triple imaginare în problema lui LAGRANGE.

C. IACOB. Dubla sursă pentru fluidele compresibile.

c) **Admiteri de membri noui.**

In Adunarea Generală Extraordinară din 5 Iunie 1941 a Societăţii *Gazeta Matematică* s'au mai admis ca membri următorii Domni: AVRAMESCU AUREL, doctor-inginer; DINESCU P. TUDOR-ALEXANDRU, inginer; GHEORGHIU ALEXANDRU, inginer; GORCIU GH. VASILE, licenţiat în matematici; GUŢU ION, inginer; PERLEA G. DAN, inginer; PROVINCEANU MIHAIL, inginer; STANCU S. MIRCEA, inginer; SLEAHTENEA DUMITRU, inginer; ŞTEFĂNESCU-GOANGĂ AUREL, inginer; STOIKA VICTOR, inginer şi ZAMFIRESCU GH. ION, căpitan de artilerie.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2717. *Fie* M *un punct în planul triunghiului* ABC *de ortocentru* H. *O rotaţie de unghiul* 2B, *centru* B, *aduce pe* M *în* M_1. *O a doua rotaţie de unghiul* 2A, *centru* A, *aduce pe* M_1 *în* M_2.

1. *O a treia rotaţie de unghiul* 2C, *centru* C, *aduce pe* M_2 *peste* M.

2. *Dacă* M *se află pe cercul* BHC, *punctele* M, M_1, M_2 *sunt colineare pe o dreaptă ce trece prin* H.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţiune dată de D-l PAUL P. DRĂGHICESCU (lic. mil. Iaşi). Fie N simetricul lui M faţă de latura BC; este uşor de observat că simetricele lui N faţă de AB, AC sunt M_1, M_2. In adevăr

$$BM = BN = BM_1$$

şi
$$\sphericalangle MBM_1 = 2 \sphericalangle MNM_1 = 2 \sphericalangle ABC.$$

Rămâne să mai arătăm că M_2 şi M_1 se corespund în rotaţia (A, 2A). In adevăr $AM_1 = AN = AM_2$ şi

$$\sphericalangle M_1AM_2 = 2(\sphericalangle BAN + \sphericalangle CAN) = 2 \sphericalangle BAC.$$

Dacă M se află pe cercul BHC, N se află pe cercul circumscris triunghiului ABC. Deci simetricele lui faţă de BC, BA, AC adică punctele M, M_1, M_2 sunt colineare pe o dreaptă paralelă cu dreapta SIMSON a punctului N faţă de triunghiul ABC la o depărtare dublă faţă de N. Această dreaptă trece prin H, pentrucă dreapta SIMSON trece prin mijlocul NH.

Observare. Această problemă este extrasă din materialul studiului *Geometrie cinematică* (Pozitiva, I — 17).

PROBLEMA 5141. *Pe un segment de dreaptă dat,* $\overline{AB}$, *considerăm un triunghiu* ACB; *pe latura* AC *construim triunghiul isoscel* AMC *cu unghiul dela vârf egal cu* $\pi - 2 \sphericalangle$ CBA, *iar pe latura* BC *triunghiul isoscel* BNC *cu unghiul dela vârf egal cu* $\pi - 2 \sphericalangle$ CAB.

Să se aleagă vârful C *astfel ca* $\overline{MN}$ *să fie egal cu* $m . \overline{AB}$ *(m un număr pozitiv dat), iar aria triunghiului* ABC *să fie medie geometrică între ariile triunghiurilor* AMC *şi* BNC. *Discuţie.*

O. N. ŢINO.

Observând că: $\sphericalangle ACM = B$ şi $\sphericalangle BCN = A$, rezultă, dacă triunghiurile isoscele sunt construite înafara triunghiului ABC, că punctele M, C, N sunt în linie dreaptă şi avem relaţia:

$$\overline{MN} = \overline{MC} + \overline{CN}; \tag{1}$$

deci ţinând seamă de prima condiţie a enunţului, avem:

$$\overline{MC} + \overline{CN} = m . \overline{AB}. \tag{2}$$

Dar:

$$\overline{MC} = \frac{\overline{AC}}{2 \cos B} \quad ; \quad \overline{NC} = \frac{\overline{BC}}{2 \cos A}$$

$$\therefore \qquad \frac{\overline{AC}}{2 \cos B} + \frac{\overline{BC}}{2 \cos A} = m \overline{AB} \tag{3}$$

şi cum:

$$\overline{AC} \cos A + \overline{BC} \cos B = \overline{AB},$$

deducem din relaţia (3), că:

$$\boxed{2m \cos A \cos B = 1} . \tag{4}$$

De altă parte, având:

$$S_{AMC} = \frac{\overline{AB}^2}{4} \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C} \operatorname{tg} B \quad ; \quad S_{BNC} = \frac{\overline{AB}^2}{4} \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \operatorname{tg} A;$$

$$S_{ABC} = \frac{\overline{AB}^2}{2} \frac{\sin A \sin B}{\sin C},$$

a doua condiţie a problemei, dă relaţia:

$$\boxed{4 \sin^2 (A + B) \cos A \cos B = \sin A \sin B} . \tag{5}$$

Ca urmare, unghiurile A și B sunt determinate de sistemul format de ecuațiile (4) și (5), sistem echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} 4\sin^2(A+B) = 2m\ \sin A\ \sin B \\ 1 = 2m\ \cos A\ \cos B \end{cases} \tag{6}$$

Punând acum $\cos(A+B) = u$, $\cos(A-B) = v$, avem:

$2\cos A\cos B = u+v$; $2\sin A\sin B = v-u$; $\sin^2(A+B) = 1-u^2$, deci sistemul (6) devine;

$$u+v = \frac{1}{m} \quad ; \quad 4(1-u^2) = m(v-u) \tag{7}$$

sau încă:

$$v = \frac{1}{m} - 1 \quad ; \quad 4u^2 - 2mu - 3 = 0. \tag{8}$$

Cum v trebue să fie cuprins între -1 și $+1$, avem ca primă condiție

$$-1 < \frac{1}{m} - u \leqq +1, \tag{9}$$

condiție care poate fi pusă succesiv sub formele:

$$-1 \leqq u - \frac{1}{m} < +1, \text{ sau încă } -1 + \frac{1}{m} \leqq u < +1 + \frac{1}{m}, \tag{9'}$$

dar m este pozitiv, iar u valoarea cosinusului sumei a două unghiuri ale unui triunghiu, deci (9') poate fi înlocuită prin următoarea:

$$-1 + \frac{1}{m} \leqq u < +1. \tag{10}$$

De altă parte, punând:

$$F(u) \equiv 4u^2 - 2mu - 3$$

și observând că

$$F(-1) = 1 + 2m > 0;\ F(0) = -3 < 0;\ F(+1) = 2\left(\frac{1}{2} - m\right),$$

deducem, că ecuația $F(u) = 0$ are totdeauna o rădăcină u' în intervalul $(-1, 0)$ și o a doua rădăcină u'' în intervalul $(0, +1)$ dacă $m < \frac{1}{2}$. Dacă $m > \frac{1}{2}$ această rădăcină $u'' > 0$ este în afara

intervalului $(0, +1)$, deci nu convine problemei. Pentru ca inegalitatea (10) să aibă sens, trebue să avem evident $-1+\frac{1}{m}<+1$, deci $m>\frac{1}{2}$.

Presupunând acum $m>\frac{1}{2}$, trebue ca u să satisfacă inegalităţii (10) pentru ca valoarea lui v corespunzătoare să dea o soluţie a problemei, deci trebue ca:

$$F\left(-1+\frac{1}{m}\right) \cdot F(+1)<0, \tag{11}$$

adică:

$$-\frac{4}{m^2}\left(m-\frac{1}{2}\right)^2(m+2)(m-3)<0, \tag{12}$$

căci:

$$F\left(-1+\frac{1}{m}\right)=-\frac{2}{m^2}\left(\frac{1}{2}-m\right)(m+2)(m-2);$$

dar $$m>0,$$

deci $$m>2. \tag{13}$$

Aşa dar, pentru $m>2$, avem o rădăcină negativă u' cuprinsă în intervalul $\left(-1+\frac{1}{m}, 0\right)$ pentru care problema are o soluţie.

— Dacă $m=2 \therefore F\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, adică $u'=-\frac{1}{2} \therefore v'=1$,

deci $$A+B=\frac{2\pi}{3}, \quad A-B=0 \therefore A=B=\frac{\pi}{3};$$

în acest caz, soluţia problemei este triunghiul echilateral construit pe segmentul dat $\overline{AB}$.

— In cazul când $m<\frac{1}{2}$, avem: $v>2-u$, însă cea mai mică valoare a lui $2-u$ corespunde la valoarea cea mai mare a lui u, dar luând chiar $u=1$ avem $v>1$, deci valoare inacceptabilă, ca urmare în acest caz problema n'are soluţie.

Dacă $m = \frac{1}{2}$, avem $u=1$, $v=1$, soluţie fără interes $A=B=0$.

2. Să presupunem acum că am construit ambele triunghiuri isoscele către interiorul triunghiului ABC; avem în acest caz:

$$\sphericalangle NBC = A \quad ; \quad \sphericalangle MAC = B.$$

Fie A' şi B' proiecţiile lui N şi M respectiv pe BC şi AC, iar O centrul cercului ABC. Lungimea segmentului MN o vom calcula din triunghiul MON, fiind opusă în acest triunghiu unghiului MON egal cu $\sphericalangle A'OB' = A + B$, deci trebue calculate mai întâi segmentele OM şi ON; dar:

$$\overline{OM} = |\overline{MB'} - OB'| \quad \text{şi} \quad \overline{ON} = |NA' - OA'|,$$

ca urmare vom calcula $\overline{MB'}$, $\overline{OB'}$, $\overline{NA'}$, $\overline{OA'}$.

Din triunghiul dreptunghiu AB'M avem:

$$\overline{MB'} = \frac{\overline{AC}}{2} \operatorname{tg} B;$$

apoi din triunghiul OB'C, având $\sphericalangle COB' = B$, deducem:

$$\overline{OB'} = \frac{\overline{AC}}{2} \operatorname{cotg} B$$

şi ca urmare:

$$\overline{OM} = \frac{\overline{AC}}{2} \frac{|\cos 2B|}{\sin B \cos B} = \frac{\overline{AB}}{2} \frac{|\cos 2B|}{\cos B \sin (A+B)}. \tag{14}$$

In mod analog obţinem:

$$\overline{ON} = \frac{\overline{AB}}{2} \frac{|\cos 2A|}{\cos A \sin (A+B)}. \tag{15}$$

Acum, din triunghiul MON, avem:

$$\overline{MN}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 - 2\,\overline{OM} \cdot \overline{ON} \cos (A+B),$$

deci ţinând seama de prima condiţie a problemei, suntem conduşi la ecuaţia:

$$\boxed{\begin{array}{c} 4m^2 \sin^2 (A+B) \cos^2 A \cos^2 B = \cos^2 2A \cos^2 B + \\ + \cos^2 2B \cos^2 A \mp 2 \cos A \cos B \cos 2A \cos 2B \cos (A+B) \end{array}}. \tag{16}$$

Pentru a doua condiţie a problemei observăm că, relaţia, din prima ipoteză asupra aşezării triunghiurilor isoscele, se păstrează, adică avem ecuaţia:

$$\boxed{4\sin^2(A+B)\cos A\cos B = \sin A\sin B} \cdot \qquad (17)$$

Sistemul format de ecuaţiile (16) şi (17), care determină pe A şi B, este echivalent cu următorul:

$$\left|\begin{array}{l} 4\sin^2(A+B) = \mathrm{tg}A\,.\,\mathrm{tg}B \\ m^2\sin A\sin B\cos A\cos B = \cos^2 2A\cos^2 B + \cos^2 2B\cos^2 A \\ \qquad \mp 2\cos A\cos B\cos 2A\cos 2B\cos(A+B) \end{array}\right. \qquad (18)$$

[cosA, de exemplu, nu poate fi nul, căci din ecuaţia (17) ar rezulta că sinB = 0 (sinA fiind $\neq 0$), iar din ecuaţia (16) ca şi cosB = 0 deoarece cos2A = 2 cos²A — 1 = — 1, deci sinB = cosB = 0, adică o imposibilitate]

Dacă în sistemul (18) înlocuim *sinusul* şi *cosinusul* unghiurilor A şi B în funcţie de tangentele lor, sistemul devine:

$$\left|\begin{array}{l} 4(\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B)^2 = \mathrm{tg}A\,.\,\mathrm{tg}B\,(1+\mathrm{tg}^2A)(1+\mathrm{tg}^2B) \\ m^2\,\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B\,(1+\mathrm{tg}^2A)(1+\mathrm{tg}^2B) = (1-\mathrm{tg}^2A)^2(1+\mathrm{tg}^2B) \\ \mp(1-\mathrm{tg}^2B)^2(1+\mathrm{tg}^2A) \pm 2(1-\mathrm{tg}^2A)(1-\mathrm{tg}^2B)(1-\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B). \end{array}\right. \qquad (19)$$

Punând acum:

$$\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B = u \quad \text{şi} \quad \mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B = v, \qquad (20)$$

sistemul (19) se înlocueşte prin următorul:

$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B = u \\ \mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B = v; \end{array}\right. \qquad (21)$$

$$\left|\begin{array}{l} 4u^2 = [u^2+(v-1)^2]\,v \\ 4(m^2+1)\,u^2 = [u^2+(v-1)^2][u^2-2(v-1)] \\ \quad +8v-8v^2 \mp 2(1-v)[(v+1)^2-u^2]. \end{array}\right. \qquad (22)$$

a) Să studiem în primul rând sistemul corespunzător, când în ecuaţia a doua luăm înaintea ultimului produs semnul *minus*, anume:

$$\left\{\begin{array}{l} 4u^2 = vu^2 + v(v-1)^2 \\ (4m^2-1)\,u^2 = u^4 + u^2(v^2-6v), \end{array}\right. \qquad (23)$$

care se descompune în următoarele sisteme:

$$\left|\begin{array}{l} v=0 \\ u=0 \end{array}\right. \quad (24) \qquad \left|\begin{array}{l} u=0 \\ v=1 \end{array}\right. \quad (25) \quad \text{şi} \quad \left|\begin{array}{l} u^2=\dfrac{v\,(v-1)^2}{4-v} \\ u^2+v^2-6v-(4m^2-1)=0. \end{array}\right. \quad (26)$$

Sistemul (24) dă soluţia fără interes: $A = B = 0$; sistemul (25) dă pentru tgA şi tgB valori imaginare. Dacă în sistemul (23) luăm $v = 4$, trebue să luăm $u = \infty$, care cere cosA sau cosB să fie nul; şi am văzut că în aceste cazuri nu avem soluţie pentru sistemul iniţial. Vom studia sistemul (26) în ipoteza $v \neq 4$.

Observăm în primul rând că sistemul (26) este echivalent cu următorul:

$$\left\{\begin{array}{l} u^2=\dfrac{v\,(v-1)^2}{4-v} \\ 2v^2-(m^2-6)\,v-(4m^2-1)=0. \end{array}\right. \quad (27)$$

Calculând realizantul ecuaţiei în v din sistemul (27), avem: $R(m) \equiv m^4 + 20m^2 + 28$, care privit în m^2 are rădăcini reale, ambele negative; deci $R(m) = 0$ are rădăcini imaginare conjugate două câte două şi ca urmare $R(m)$ având semnul primului său termen, este *pozitiv* pentru toate valorile reale ale lui m.

Ecuaţia în v are deci totdeauna rădăcinile sale reale; dar pentru ca aceste rădăcini să convină problemei trebue ca valoarea lui u^2 corespunzătoare să fie pozitivă, deci ca:

$$v\,(4-v) > 0 \quad (28')$$

sau încă:

$$0 < v < 4; \quad (28)$$

de altă parte condiţia (28) fiind îndeplinită, trebue ca rădăcinile sistemului (21), deci ale ecuaţiei

$$z^2 - uz + v = 0 \quad (29)$$

să fie reale, adică să avem asemenea condiţia:

$$u^2 - 4v = \frac{v\,(v-1)^2}{4-v} - 4v \geqslant 0$$

sau

$$v\,(v^2+2v-15)\,(4-v) \geqq 0 \qquad (v \neq 4)$$

sau încă:

$$(v+5)\,v\,(v-3)\,(v-4) \leqq 0 \qquad (v \neq 4). \quad (30)$$

După condiția (28), v fiind cuprins între *zero* și $+4$, iar pentru $0 < v < 3$ inegalitatea (30) nefiind satisfăcută, condiția la care trebue să satisfacă rădăcina reală a ecuației:

$$P(v) \equiv 2v^2 + (m^2 - 6)\, v - (4m^2 - 1) = 0 \qquad (31)$$

pentru ca să poată da o soluție a problemei, este ca ea să fie cuprinsă în intervalul $(+3, +4)$ limita inferioară putând fi atinsă. Dar:

$$P(+4) = +9 > 0 \quad ; \quad P(+1) = -3(m^2+1) < 0$$

deci cele două rădăcini reale ale ecuației $P(v) = 0$ sunt cuprinse în intervalele $(-\infty, +1)$ și $(+1, +4)$.

Observăm însă că:

$$P(+3) = -m^2 + 1 = -(m-1)(m+1), \qquad (32)$$

deducem că, pentru ca rădăcina cuprinsă în intervalul $(+1, +4)$ să fie cuprinsă în intervalul $(+3, +4)$, trebue ca $m - 1 \geqq 0$, deci ca:

$$m \geqq 1. \qquad (33)$$

Dacă condiția (33) este îndeplinită și v_0 este rădăcina pozitivă din intervalul $(+3, +4)$, avem pentru sistemul (27) două soluții: (u_0, v_0) și $(-u_0, v_0)$, luând $u_0 > 0$. Să vedem dacă ambele dau soluții pentru problemă. Este deajuns să observăm, că având $v > 0$, tgA și tgB sunt de același semn, iar semnul lor comun este semnul sumei lor, semnul lui u; dar ele nu pot fi ambele negative căci în acest caz având $A > \frac{\pi}{2}$ și $B > \frac{\pi}{2}$, vom avea: $A + B > \pi$; ca urmare *numai pentru soluția* (u_0, v_0) avem o soluție a problemei. In rezumat, *în cazul de figură considerat, dacă* $m > 1$ *problema admite o soluție și numai una.* Dacă $m = 1$ avem triunghiul ABC echilateral.

b) Să luăm acum în ecuația a doua a sistemului (22) al doilea semn; în acest caz sistemul devine:

$$\left|\begin{array}{l} u^2 = \dfrac{v(v-1)^2}{4-v} \\ 4m^2u^2 = [u^2 + (v-1)^2][u^2 - 2(v-1)] - 4u^2 \\ \qquad\qquad + 8v - 8v^2 - 2(v-1)[(v+1)^2 - u^2]. \end{array}\right. \qquad (34)$$

Inlocuind în a doua ecuaţie pe u^2 şi eliminând numitorul găsim :

$$(v-1)[(m^2+4)v^3-(5m^2+3)v^2+(4m^2-21)v-16]=0 \quad (35)$$

şi înlăturând soluţia $v=1$ (care am văzut că nu convine problemei), sistemul (34) devine :

$$\begin{cases} u^2=\dfrac{v(v-1)^2}{4-v} \\ (m^2+4)v^3-(5m^2+3)v^2+(4m^2-21)v-16=0. \end{cases} \quad (36)$$

Dar am văzut, că pentru ca u^2 să aibă valoarea pozitivă şi pentru ca soluţiei (u_0, v_0) să-i corespundă o soluţie a problemei, soluţia ecuaţiei în v trebue să fie cuprinsă în intervalul $(+3, +4)$, limita inferioară putând fi atinsă.

Insemnând cu

$$R(v)\equiv(m^2+4)v^3-(5m^2+3)v^2+(4m^2-21)v-16$$

şi observând că

$$R(+1)=-36<0 \quad , \quad R(+4)=+108>0,$$

urmează că ecuaţia $R(v)=0$ are în intervalul $(+1, +4)$ *una* sau *trei* rădăcini reale (căci $R(-\infty)$ este $-\infty$, iar $R(+\infty)$ este $+\infty$). Pentru a preciza, calculăm derivata polinomului $R(v)$ şi având :

$$R'(v)\equiv 3(m^2+4)v^2-2(5m^2+3)v+4m^2-21;$$

găsim :

$$R'(+1)=-(7m^2+15)<0 \quad ; \quad R'(+3)=m^2+69>0;$$

$$R'(4)=(12m^2+147)>0,$$

iar la capetele intervalului $(-\infty, +\infty)$ polinomul $R'(v)$ este pozitiv; deci $R'(v)=0$ are o rădăcină cuprinsă în intervalul $(-\infty, +1)$ şi o rădăcină v_1 cuprinsă în intervalul $(+1, +3)$. Aşa dar, în cazul când $R(v)=0$ ar avea trei rădăcini reale, ele ar fi cuprinse în intervalele $(-\infty, v_2)$; (v_2, v_1); $(v_1, +\infty)$ şi cum $R(+4)>0$ şi $R(+1)<0$ în intervalul $(v_1, +4)$ se găseşte

totdeauna o rădăcină reală. Pentru ca această rădăcină a lui $R(v)$ să se găsească în subintervalul $(+3, +4)$, trebue ca:

$$R(+3) = -6\left(m^2 - \frac{1}{3}\right) < 0;$$

deci *problema poate admite o soluție în cazul când* $m \geqq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Pentru a găsi cu certitudine dacă soluția găsită convine preblemei, trebue să observăm că subcazul (b) are loc când $\cos 2A \cdot \cos 2B < 0$, adică când unul din unghiurile A, B este mai mic ca $\frac{\pi}{4}$, dar în acest caz ecuația (29) trebue să aibă între *zero* și *unu* o rădăcină și numai una; adică trebue ca:

$$v(v+1-u < 0 \qquad (37)$$

și cum $v > 0$, trebue ca:

$$u > v+1 \quad \text{sau} \quad u^2 > (v+1)^2,$$

sau încă:

$$\frac{v(v-1)^2}{4-v} > (v+1)^2, \quad \text{dar} \quad 4-v > 0,$$

deci $$v(v-1)^2 - (v+1)^2(4-v) > 0,$$

sau încă: $$v^3 - 2v^2 - 3v - 4 > 0. \qquad (38)$$

Dar polinomul $R(v) \equiv v^3 - 2v^2 - 3v - 4$ are o singură rădăcină pozitivă, după teorema lui DESCARTES, și se vede că având:

$$Q(+3) < 0 \quad , \quad Q(+4) > 0$$

această rădăcină pozitivă v' a ecuației $Q(v) = 0$, este cuprinsă în intervalul $(+3, +4)$; urmează de aici că pentru a avea și $Q(v) > 0$ îndeplinit trebue ca rădăcina ecuației $R(v) = 0$ să fie cuprinsă în intervalul $(v', +4)$, cu alte cuvinte pentru a fi în cazul (b) și a avea o soluție pentru problemă trebue ca să punem condiții pentru m astfel ca să avem:

$$R(v') < 0. \qquad (39)$$

Ecuaţia $Q(v) = 0$ fiind de gradul al treilea, deci rezolvabilă cu ajutorul formulelor lui CARDAN, putem scrie explicit condiţia (39) de mai sus.

3. Să presupunem acum că triunghiul isoscel BNC, de exemplu, este construit către interiorul triunghiului ABC, iar triunghiul AMC către exteriorul triunghiului ABC. In acest caz de figură avem:

$$\overline{OM} = \overline{OB'} + \overline{B'M} \quad \text{şi} \quad \overline{ON} = \overline{A'N} - \overline{A'O},$$

A', B', O fiind notaţiile din cazul precedent.

Procedând cum am făcut în cazurile precedente de figură, găsim:

$$\overline{ON} = \frac{\overline{AB}}{2} \frac{|\cos 2A|}{\sin(A+B)\cos A}; \quad \overline{OM} = \frac{\overline{AB}}{2} \frac{1}{\sin(A+B)\cos B}, \tag{40}$$

aşa că *prima condiţie* a problemei $\overline{MN} = m\,\overline{AB}$ conduce la ecuaţia:

$$4m^2 \sin^2(A+B)\cos^2 A \cos^2 B = \cos^2 2A \cos^2 B + \cos^2 A + 2\cos 2A \cos A \cos B \cos(A+B). \tag{41}$$

A doua condiţie a problemei, conduce, cum am văzut în cazurile precedente de figură, la ecuaţia:

$$4\sin^2(A+B)\cos A \cos B = \sin A \sin B. \tag{42}$$

Sistemul format de ecuaţiile (42) şi (41) este echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} (\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B)^2 = \dfrac{\operatorname{tg}A \operatorname{tg}B (\operatorname{tg}A \operatorname{tg}B - 1)^2}{4 - \operatorname{tg}A \operatorname{tg}B} \\ m^2 \operatorname{tg}A \operatorname{tg}B (1 + \operatorname{tg}^2 A) = (1 - \operatorname{tg}^2 A)^2 + (1 + \operatorname{tg}^2 A)(1 + \operatorname{tg}^2 B) \\ \qquad \pm 2(1 - \operatorname{tg}^2 A)(1 - \operatorname{tg}A \operatorname{tg}B) \end{cases} \tag{43}$$

sau încă, punând:

$$\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B = u \quad , \quad \operatorname{tg}A \operatorname{tg}B = v:$$

$$\begin{cases} u^2 = \dfrac{v(v-1)^2}{4 - v} \\ m^2 v (1 + \operatorname{tg}^2 A) = (1 - \operatorname{tg}^2 A)^2 + 1 \\ \qquad + \dfrac{v(v-1)^2}{4-v} - 2v + v^2 \pm 2(1 - \operatorname{tg}^2 A)(1 - v) \end{cases} \tag{44}$$

dublul semn din ecuaţia a doua corespunzând semnului lui $(1 - \operatorname{tg}^2 A)$.

Ecuaţia care dă pe $\operatorname{tg}^2 A = w_1$ şi pe $\operatorname{tg}^2 B = w_2$ se formează uşor şi avem:

$$w^2 - \frac{\nu(\nu^2 - 7)}{4 - \nu} w + \nu^2 = 0$$

sau încă:

$$\boxed{(4 - \nu) w^2 - \nu(\nu^2 - 7) w + \nu^2 (4 - \nu) = 0} \cdot \quad (45)$$

Din sistemul (44) se vede că w_1 satisface şi ecuaţiei:

$$\boxed{m^2 \nu (1 + w) = (1 - w)^2 + \frac{\nu(\nu - 1)^2}{4 - \nu} + (\nu - 1)^2 \pm 2(1 - \nu)(1 - w)} \quad (46)$$

Ca urmare, vom determina pe ν astfel ca ecuaţiile (45) şi (46) să aibă o rădăcină comună.

a) Să luăm în primul rând în ecuaţia (46) semnul *plus*. Avem în acest caz pentru ecuaţia (46) pe următoarea:

$$(4 - \nu) w^2 - [(m^2 - 2)\nu + 4](4 - \nu) w + [(m^2 + 6)\nu^2 - (4m^2 + 19)\nu + 16] = 0. \quad (46\ a)$$

Scriind acum că ecuaţia (45) să aibă cu (46 a) o rădăcină comună, găsim pentru determinarea lui ν, ecuaţia:

$$\begin{aligned} F_a(\nu) \equiv\ & (2m^2 + 4)\nu^8 - (2m^4 + 12m^2 - 8)\nu^7 + (20m^4 - 37m^2 - 157)\nu^6 \\ & + (61m^4 - 411m^2 - 126)\nu^5 + (32m^4 - 855m^2 + 1783)\nu^4 \\ & + (62m^4 + 160m^2 + 1590)\nu^3 + (64m^4 + 864m^2 + 1324)\nu^2 \\ & - (992m^2 + 6760)\nu + 1024 = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

b) Luând în ecuaţia (46) al doilea semn, găsim:

$$(\nu - 4) w^2 - (m^2 + 2)\nu(\nu - 4) w - \nu[(m^2 - 6)\nu - (4m^2 - 15)] = 0 \quad (46\ b)$$

şi scriind condiţia pentru ca ecuaţiile (45) şi (46 b) să aibă o soluţie comună, găsim pentru determinarea lui ν, ecuaţia:

$$\begin{aligned} F_b(\nu) \equiv\ & 8\nu^6 + (4m^2 - 16)\nu^5 - (4m^4 + 50m^2 + 156)\nu^4 \\ & + (38m^4 + 228m^2 + 470)\nu^3 - (112m^4 + 423m^2 - 1030)\nu^2 \\ & + (80m^4 + 340m^2 - 2400)\nu - (64m^4 - 240m^2 + 900) = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Aplicând pe rând ecuațiilor (47) și (48) cunoscuta teoremă a lui STURM vom vedea dacă sunt condiții pe care trebue să le îndeplinească m, dat, pentru ca *una* sau ambele ecuații (47), (48) să aibă o rădăcină cuprinsă în intervalul $(+3, +4)$, adică pentru ca problema să poată avea cel puțin o soluție. In subcazul *(b)* urmează să facem aceeași discuție ca în cazul de figură precedent, același subcaz.

Au rezolvat problema, fără a o discuta complect, în primul caz de figură (când triunghiurile isoscele sunt construite amândouă înafară) D-nii CONSTANTIN PANTELIMON și ROHR I. ALEXANDRU (Elevi cl. VIII-a, Lic. Militar Iași).

O. N. Ț.

PROBLEMA 5149. *Să se determine* $(n+1)$ *numere întregi, a căror sumă este* a *astfel ca primele* n *să fie cele mai mici posibile, dar mai mari decât cel din urmă, care să fie cel mai mare posibil.*

N. V. K.

Soluție dată de D-l ST. CETĂȚEANU (Elev-inginer).

Fie a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_n$ și a_{n+1} cele $(n+1)$ numere căutate. Trebue ca între ele să avem neegalitățile:

$$a_1 \geqslant a_{n+1}+1,\ a_2 \geqslant a_{n+1}+1,\ a_3 \geqslant a_{n+1}+1, \ldots, a_n \geqslant a_{n+1}+1. \quad (1)$$

Adunând aceste relații, avem:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n \geqslant n\,.\,a_{n+1}+n. \quad (2)$$

Enunțul mai cere apoi ca:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+a_{n+1}=a, \quad (3)$$

din care deducem:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=a-a_{n+1}. \quad (4)$$

Comparând (2) cu (4) deducem:

$$a-a_{n+1} \geqslant n\,.\,a_{n+1}+n,$$

$$\therefore\ a-n \geqslant (n+1)\,a_{n+1},$$

$$\therefore\ a_{n+1} \leqslant (a-n)/(n+1).$$

Fie q câtul împărţirii lui $(a-n)$ prin $(n+1)$ şi $r<(n+1)$ restul acestei împărţiri. Avem:

$$a-n=(n+1)q+r, \tag{5}$$

$$\therefore \quad a_{n+1} \leqslant q+[r/(n+1)].$$

Această relaţie ne arată că cea mai mare valoare a lui a_{n+1} este q, adică câtul întreg al lui $(a-n)$ prin $(n+1)$. Ca să împlinim strict condiţiunile problemei ar trebui ca celelalte numere $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ să fie $(q+1)$. Suma celor $(n+1)$ numere ar fi în acest caz $[n(q+1)+q]=(n+1)q+n$. Această sumă, după (5), este $(a-r)$. Dacă deci $r=0$ soluţia problemei este dată de numerele $(q+1), (q+1), \ldots, (q+1), q$, şi condiţiunile impuse sunt strict îndeplinite. Altfel, la r dintre numerele $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ adăogăm câte o unitate spre a împlini suma a. Unele din aceste numere vor întrece pe a_{n+1} cu 1 şi altele cu 2. Dacă $r=n$ toate numerele $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ întrec pe a_{n+1} cu 2, cazul extrem când primele n numere se depărtează mai mult de a_{n+1}.

Exemplu numeric. Fie $a=21, n=5$. Avem $(a-n)=21-5=16$, $(n+1)=6$. Câtul acestor două numere este 2, iar restul 4. Deci $a_{n+1}=2$, şi $a_1=a_2=a_3=a_4=4$; $a_5=3$. Şirul de numere este 4, 4, 4, 4, 3, 2.

PROBLEMA 5330. *Un pendul de greutate* $G=100$ *gr al cărui fir are lungimea* $l=0{,}6$ *m (greutatea firului se neglijează) este mai întâi în poziţia de echilibru. Se întreabă ce viteză orizontală* v_0 *trebue imprimată pendulului pentru următoarele cazuri:*

1. *Pendulul va oscila până la o înălţime în care firul face un unghiu de* 120^0 *cu poziţia iniţială. Se va studia dacă sfoara va rămâne întinsă până la această poziţie.*

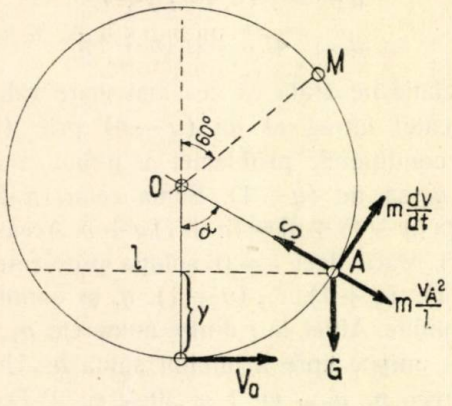
2. *Pendulul nu va oscila, ci va face o învârtitură complectă, sfoara rămânând întinsă în tot timpul mişcării.*

Se va studia în ambele cazuri tensiunea în sfoară în diferitele poziţii ale pendulului.

(Se poate lua $g=10$ *m/sec*^{2}*).*

GABRIELA ŢIŢEICA.

Soluţie dată de D-nii: C. EFTIMIE, E. MODÂLCĂ şi M. STĂNCULESCU (studenţi, Politehnica Bucureşti).



Considerăm pendulul într'o poziţie oarecare dată de unghiul α. Forţele ce lucrează asupra pendulului sunt

G = greutatea sa

S = tensiunea în fir

$\frac{mv_A^2}{l}$ = forţa de inerţie, centrifugă.

$\frac{mdv}{dt}$ = forţa de inerţie, tangenţială.

Aplicând legea lucrului mecanic avem:

$$-mgy = \frac{mv_A^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

de unde

$$v_A^2 = v_0^2 - 2gy.$$

Când pendulul se opreşte, la sfârşitul oscilaţiei

$$v_A = 0$$

deci

(a) $y_1 = \frac{v_0^2}{2g}$ este altitudinea dela care se întoarce înapoi.

Pentru cazul nostru: (1), avem $y_1 = l + l\cos 60 = \frac{2l}{2} = 0{,}9$ m

deci din relaţia *(a)* găsim $V_0 = \sqrt{18} = 4{,}24$ m/sec.

Studiind echilibrul forţelor în punctul A, avem făcând echilibrul proiecţiilor pe normala la traiectorie

$$S = mg\cos\alpha + \frac{mv_A^2}{l}$$

sau înlocuind cosα prin valoarea sa: $\cos\alpha = \frac{l - y}{l}$; găsim

$$S = \frac{m}{l}(v_0^2 + lg - 3gy).$$

Dacă firul numai este întins, în acel punct $S = 0$, deci găsim altitudinea corespunzătoare

(b) $$y_2 = \frac{v_0^2 + lg}{3g}.$$

Pentru cazul nostru, luând $v_0 = 4{,}24$ m/sec, găsim

$$y_2 = 0{,}8 \text{ m}$$

mai mic decât y_1. Deci sfoara nu va fi întinsă pe tot parcursul până în punctul M cerut şi pendulul va sări acum de pe traiectorie cu viteza

$$v^2 = v_0^2 - 2gy_2 = 2$$

$$V = \sqrt{2}\text{ m/sec.}$$

şi va parcurge o parabolă balistică.

Pentru ca firul să poată fi întins până în M, ar trebui ca v_0 să fie cel dat de ecuaţia *(b)* unde $y_2 = y_1$, deci:

$$v_0^2 = 21.$$

Pentru acest v_0 însă punctul în care pendulul se va opri va fi iar dat de *(a)*, adică

$$y_1' = \frac{21}{20} = 1{,}05 \text{ m.}$$

Vedem însă că atât timp cât altitudinea unde se anulează tensiunea în sfoară este mai mică decât 2 l, adică

$$y_2' \leqslant 2\,l \leqslant 1{,}2 \text{ m}$$

sau deci

$$v_0 \leqslant \sqrt{30} \text{ m/sec}$$

punctul va sări de pe traiectorie, conform raţionamentului de mai sus.

Pentru

$$v_0 > \sqrt{30} \text{ m/sec}$$

S este pozitiv pentru toată traiectoria circulară, iar altitudinea unde se anulează vitesa fiind mai mare de 1,5 m pentru acest v_0, este deci mai mare de 2 l, pendulul va parcurge toată traiectoria făcând învârtituri complecte, cu sfoara întinsă în tot timpul mişcării.

G. T.

PROBLEMA 5340. *O dreaptă variabilă trecând prin o, taie dreptele* (m), (n) *în m, n. Intersecţia* $p \equiv [(im), (jn)]$ *descrie o conică* (p) *trecând prin i, j* $[(m), (n)]$, $[(oi), (n)]$, $[(oj), (m)]$. *Natura conicei* (p) *depinde de situaţia lui j în raport cu parabola* (ω) *înscrisă triunghiului format de* (n), (oi), $(o\mu) \parallel (m)$ *şi a cărei axă are direcţia dreptei ce uneşte i cu intersecţia* $[(m), (o\nu) \parallel (n)]$.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie analitică dată de D-nii: PAUL P. DRĂGHICESCU (lic. mil. Iaşi) şi MIRCEA D. POPA (bac. Iaşi).

Fie $o(0, 0)$, $i(i, i')$, $j(j, j')$, (m) $y = mx + m'$,

(n) $y = nx + n'$, (mn) $y = \lambda x$.

Dreptele (im) şi (jn) au ecuaţiile

$$\frac{y - mx - m'}{i' - mi - m'} = \frac{y - \lambda x}{i' - \lambda i}, \quad \frac{y - nx - n'}{j' - nj - n'} = \frac{y - \lambda x}{j' - \lambda j}$$

de unde eliminând pe λ, aflăm

$$\frac{mi'x - (mi + m')\,y + i'm'}{nj'x - (nj + n')\,y + j'n'} = \frac{(m' - i')\,x + iy - m'i}{(n' - j')\,x + jy - n'j}$$

adică ecuaţia unei conice. Se verifică uşor că trece prin punctele indicate.

Punând ecuaţia conicei sub forma

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \ldots = 0$$

unde

$$A = mi'(n' - j') - nj'(m' - i') = \alpha j' + \alpha'$$

$$C = i(nj + n') - j(mi + m') = \beta j + \beta'$$

$$2B = mi'j - (mi + m')(n' - j') - ij'n + (nj + n')(m' - i') = \gamma j + \delta j' + \varepsilon$$

natura ei depinde de

$$4(B^2 - AC) = (\gamma j + \delta j' + \varepsilon)^2 - 4(\alpha j' + \alpha')(\beta j + \beta') = \gamma^2 j^2 + \delta^2 j'^2 + 2(\gamma\delta - 2\alpha\beta) jj' + \ldots$$

care considerată în raport cu coordonatele j, j' este o parabolă fiindcă

$$(\gamma\delta - 2\alpha\beta)^2 - \gamma^2\delta^2 = 4\alpha\beta(\alpha\beta - \gamma\delta) = 0$$

având $\gamma = -\alpha$, $\delta = -\beta$. Se verifică uşor şi celelalte indicaţii.

Observare. 1. Rezolvitorii au ales axele coordonate mai simple ceea ce le-a permis mai repede identificarea condiţiilor. Forma precedentă este mai simetrică.

2. *Soluţie geometrică.* D-l MIRCEA D. POPA demonstrează prima parte a problemei prin consideraţii de omografie, astfel: o rază arbitrară dusă prin i, taie pe (m) în m; om pe (n) în n şi găsim o singură rază jn şi reciproc; deci fascicolele de vârfuri i, j sunt omografice şi intersecţia lor — punctele p — formează o conică ce trece prin i, j; la diferite valori particulare ale razelor, în construcţiile indicate de problemă, rezultă punctele particulare ale conicei, date în enunţ.

Soluţia problemei poate continua tot prin consideraţii geometrice. Ne propunem să arătăm propoziţia: *o dreaptă variabilă dusă prin o taie pe* (m), (n) *în* m, n; *înfăşurătoarea paralelei* (d') *din* n *la* $(mi) = d$, *este o parabolă*; în adevăr pentru $(d) \parallel (n)$, $(d') \equiv (n)$ este tangentă simplă la curba căutată; observăm apoi, că dintr'un punct n dat putem duce o singură dreaptă $(d') \neq (n)$; din punctele n putem duce două tangente curbei, deci ea este o conică; direcţia asimptotică este unică pentru n la ∞ pe (n).

Cum direcţiile asimptotice ale conicei (p) corespund pentru (i), (j) paralele rezultă că (j) poate fi paralelă cu (i) când înfăşoară parabola precedentă; există puncte j din care nu putem duce tangente şi alte puncte j din care ducem două.

PROBLEMA 5375. *O bilă grea* A, *prinsă cu un fir inextensibil, de greutate neglijabilă, de un punct* O, *este lăsată liberă în poziția* OA. *In mișcarea sa ulterioară bila se isbește de peretele vertical* OB *și se reîntoarce în poziția extremă* OA'. *Se dau:*

$$\sphericalangle AOB = \alpha \quad ; \quad \sphericalangle A'OB = \beta.$$

Să se determine coeficientul k de elasticitate dintre bilă și perete.

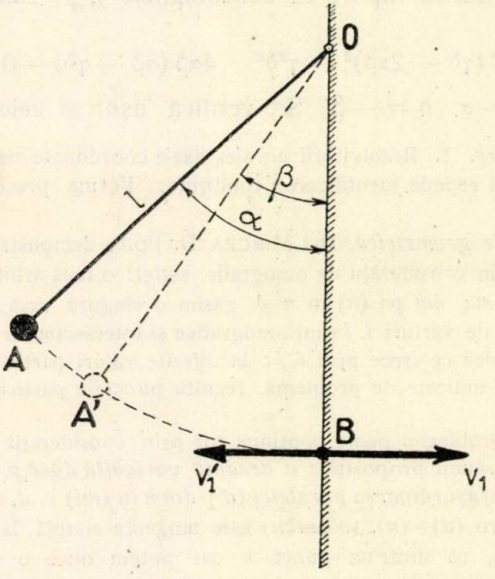
Mișcarea bilei se face într'un plan vertical normal peretelui.

Aplicație:

$$\alpha = 60^0 \quad ; \quad \beta = 45^0.$$

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluție dată de D-nii: EMIL S. MODÂLCĂ și BĂDULESCU P. NICOLAE (elevi ai Școalei Politechnice din București).



In cazul ciocnirii centrice a două corpuri, având *înainte de ciocnire iuțelile* v_1 și v_2 și *după ciocnire iuțelile* v_1' și v_2', avem prin definiția coeficientului de elasticitate k:

$$k = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}.$$

In cazul problemei date peretele fiind fix:

$$v_2 = v_2' = 0.$$

Rezultă:

$$k = -\frac{v_1'}{v_1}.$$

Aplicând teorema energiei cinetice în mişcarea bilei *înainte de ciocnire* avem:

$$\frac{1}{2} mv_1^2 = mgl\,(1 - \cos\alpha).$$

De unde:

$$v_1 = +\sqrt{2gl\,(1 - \cos\alpha)}.$$

Aplicând teorema energiei cinetice în mişcarea *după ciocnire* obţinem analog:

$$-\frac{1}{2} mv_1'^2 = -mgl\,(1 - \cos\beta).$$

De unde:

$$v_1' = -\sqrt{2gl\,(1 - \cos\beta)}.$$

Rezultă:

$$k = -\frac{v_1'}{v_1} = \sqrt{\frac{1 - \cos\beta}{1 - \cos\alpha}}.$$

In cazul aplicaţiei:

$$k = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{2}}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 0{,}765.$$

EXERCIŢII

16. Să se rezolve sistemul de ecuaţiuni

$$\frac{x+a}{y} = a \qquad \frac{y+2}{z} = 2 \qquad \frac{z+3}{x} = 3$$

şi să se determine a astfel ca rădăcinile să fie în progresie aritmetică.

I. S. A.

R. Rezolvind sistemul obţinem

$$x = \frac{9a}{6a-1} \quad , \quad y = \frac{6a+8}{6a-1} \quad , \quad z = \frac{9a+3}{6a-1} .$$

Scriind că rădăcinile sunt progresie aritmetică, adică

$$y - x = z - y$$

obţinem

$$a = \frac{13}{6}$$

de unde

$$x = \frac{39}{24} \quad , \quad y = \frac{42}{24} \quad , \quad z = \frac{45}{24} .$$

17. In orice triunghiu avem relaţiunea

$$\frac{1}{2} \sum \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{c}{2}} = \sum \left(\frac{r}{r_a} \right)^2 .$$

I. S. A.

R. Se porneşte dela relaţiile cunoscute

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} , \ldots \text{ şi } (p-a) = \frac{s}{r_a} , \ldots$$

ţinând seama că

$$r r_c = r_a r_b ,$$

prin calcule simple se ajunge la relaţia din enunţ.

18. In orice triunghiu avem relaţiunea

$$\frac{p}{r} \sum \frac{r_a}{r_b} = \sum \operatorname{cot}^2 \frac{A}{2} \operatorname{cot} \frac{B}{2} .$$

I. S. A.

R. Ţinând seama de relaţiile

$$r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} , \ldots \quad r_a = \frac{s}{p-a} = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} , \ldots$$

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr,$$

stabilim relaţia din enunţ, pornind dela suma din prima parte a relaţiei.

PROBLEME PROPUSE

5260[1]). Se dă un cilindru gol AB, de secţiune circulară, astupat la ambele capete şi suspendat dintr'un punct O astfel că, în aceste condiţiuni, el este în echilibru. Se introduce în cilindru două sfere, având fiecare aceeaşi greutate însă de densităţi diferite δ_1 şi δ_2 ($\delta_1 > \delta_2$). Sferele fiind aşezate amândouă în capătul A, pentru a se restabili echilibrul cilindrului, se atârnă de capătul B o greutate p_1. Frecându-se sferele în capătul B, greutatea p_1 aşezată în A nu mai poate restabili echilibrul.

Se întreabă: 1° Care din cele două sfere este, în fiecare caz, mai apropiată de verticala trecând prin punctul de suspensiune?

2° Ce greutate p_2 trebueşte pusă în capătul A pentru a se restabili echilibrul?

Se presupune că diametrul interior al cilindrului este numai puţin mai mare decât diametrul sferei celei mai mari.

ION S. ANTONIU.

5497. Cu trei cifre diferite se pot scrie şase numere diferite de şase cifre. Care este cea mai mare putere a unui număr prim care poate divide produsul acelor şase numere?

I. IONESCU.

5498. Să se găsească două numere $abc\ldots$ şi $a'b'c'd'\ldots$ al căror produs să fie $\ldots cbaa'b'c'd'\ldots$

Discuţie asupra numărului de cifre pe care le pot avea cele două numere, pentru cazul când nicio cifră nu se repetă.

H. TEODORU.

5499. Diferenţa de vârstă între doi fraţi, în viaţă, este 18 ani. Ştiind că anii lor de naştere reprezintă numere scrise cu aceleaşi cifre, suma cifrelor fiind cât mai mare, când s'au născut cei doi fraţi?

COMANDOR I. LINTEŞ.

---

1) Inlocueşte problema cu acelaşi număr dela pag. 444 din acest volum. (Vezi nota No. 47, pag. 529).

5500. Să se demonstreze că, dacă $(D^2 - 1)$ se împarte exact cu 15, produsul numerelor întregi a şi b, care verifică egalitatea

$$a^2 - Db^2 = 1,$$

se împarte de asemenea exact cu 15.

IOAN B. FLORESCU.

5501. Să se stabilească relaţia:

$$C_{(n-j)(p+1)}^{n-j} + (-1)C_n^1 C_{(n-j-1)(p+1)}^{n-j} + (-1)^2 C_n^2 C_{(n-j-2)(p+1)}^{n-j} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-j-1} C_n^{n-j-1} C_{p+1}^{n-j} = C_n^{j-1} C_{n+p-j}^{n-j} + (-1)C_n^{j-2} C_{n+p-j+(p+1)}^{n-j}$$

$$+ (-1)^2 C_n^{j-3} C_{n+p-j+2(p+1)}^{n-j} + \dots + (-1)^{j-1} C_n^0 C_{n+p-j+(j-1)(p+1)}^{n-j}.$$

Să se arate că avem, în particular:

$$C_{n+p-1}^{n-1} = C_{(n-1)(p+1)}^{n-1} + (-1)C_n^1 C_{(n-2)(p+1)}^{n-1}$$

$$+ (-1)^2 C_n^2 C_{(n-3)(p+1)}^{n-1} \dots + (-1)^{n-2} C_n^{n-2} C_{p+1}^{n-1}.$$

P. SERGESCU.

5502. Să se rezolve ecuaţia

$$x^6 + 9x^5 + 33x^4 + 63x^3 + 68x^2 + 42x + 2(1 - \sqrt{3}) = 0$$

ştiind că are rădăcini comune cu ecuaţia de forma

$$x^2 + 3x + a = 0.$$

CPT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

5503. Să se studieze variaţia funcţiei:

$$y = \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$$

şi să se figureze curba reprezentativă.

1°. Să se deducă numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei:

$$x - \sin x - a(1 - \cos x) = 0,$$

situate în intervalul $(0, 4\pi)$, parametrul a fiind real.

2°. Să se determine α şi p, ca seria cu termenul general

$$u_n = \frac{\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}}{1 - \cos\frac{1}{n}} - \frac{\alpha}{n^p}$$

să fie convergentă.

TH. ANGHELUŢĂ.

5504. Fie AA_1, BB_1, CC_1 cevienele punctului I în triunghiul ABC; c_β şi b_γ intersecţiile paralelelor din C_1 şi B_1 la AA_1 cu BB_1 şi CC_1.

1°. Dreptele AA_1, Bb_γ, Cc_β sunt concurente.

2°. Triunghiul format de dreptele analoage $c_\beta b_\gamma$, $a_\beta b_\alpha$, $a_\gamma c_\alpha$ este homologic cu triunghiul ABC.

S-LT. I. G. ZAMFIRESCU.

5505. *a)* Să se scrie ecuaţia focală a parabolelor (P), de mărime constantă, cu parametrul egal cu p în raport cu axele de coordonate perpendiculare OX, OY.

b) Să se găsească condiţiile ca parabolele (P) să fie tangente la axele OX şi OY.

c) Să se afle locul focarelor.

d) Insemnând cu A şi B punctele de contact ale unei parabole (P) cu OX şi OY, să se afle locul punctelor I de intersecţie a normalelor în A şi B.

e) Să se afle înfăşurătoarea cercurilor de diametru $\overline{AB}$.

N. ABRAMESCU.

5506. Fie C centrul cercului osculator într'un punct M al unei spirale logaritmice, raportată la o axă OX şi un pol O. Tangenta în M la spirală se întâlneşte cu CO în T. Se completează dreptunghiul CMTD, al cărui centru se notează cu P şi a cărui latură CD este tăiată în I de MO.

Să se demonstreze, că atunci când M se mişcă pe spirala logaritmică dată, punctele T, P, I descriu tot nişte spirale logaritmice ale căror ecuaţii se cer tot faţă de axa OX şi polul O.

G-L GH. BUICLIU.

5507. Să se stabilească identitatea

$$\frac{\sin 6\alpha - 2\sin 4\alpha + \sin 2\alpha}{\sin 8\alpha - 4\sin 6\alpha + 6\sin 4\alpha - 4\sin\alpha} + \frac{1}{4\sin^2\alpha} = 0.$$

V. ALACI.

5508. $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ fiind numere reale date se cere să se rezolve şi să se discute sistemul de ecuaţii

$$a\,x + b\,y + c = [a_1 x + b_1 y + c_1],$$

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = [a_2 x + b_2 y + c_2],$$

unde $[\alpha]$ înseamnă, ca de obiceiu, partea întreagă a lui α.

TIBERIU POPOVICIU.

5509. Un punct material M se mişcă cu frecare pe suprafaţa unei cuadrice omogene, cu centru, sub acţiunea unei forţe, care face cu axele de simetrie unghiuri cu cosinusurile a, b, c date.

Să se determine regiunea de echilibru pe cuadrică, cunoscând unghiul de frecare, acelaşi pentru toate punctele cuadricei.

M. GHERMĂNESCU.

5510. Se dă o bază omogenă de greutate G, de lungime l, susţinută la ambele capete prin fire care, după ce trec prin două inele fixe de poziţie dată în planul vertical, prind respectiv greutăţile P şi Q.

Să se determine grafic, poziţia de echilibru a barei, neţinând seamă de frecări.

Greutatea firelor se neglijează.

GABRIELA ŢIŢEICA.

5511. Unei bare omogene AB, de lungime l, mobilă într'un plan vertical în jurul centrului său O, i se imprimă iuţeala unghiulară iniţială ω_0.

Ajungând în poziţia verticală, bara se rupe într'un punct M, $\overline{AM} = a$ şi se desprinde în acelaşi moment şi din articulaţia O.

Să se studieze mişcările ulterioare ale celor două bucăţi din bară $\overline{AM}$ şi $\overline{MB}$, precum şi a centrului lor de greutate.

Rezistenţa aerului şi frecarea se vor neglija.

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ. Egalitatea din enunţul problemei 5485 se înlocueşte prin

$$594^2 = 352836.$$

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam N. N. (5482); *Andrei Aurel* (5409, 76); *Badea A. Ion* (5447, 86, 88); *Bakonyi C.* (5464, 73, 82, 83, 86, 88); *Baranga T. G.* (5482); *Bărbuţ Tomy* (5482); *Bogdan Gh.* (5476, 82, 83); *Boldescu P.* (N); *Broşteanu-Tazlău Gh.* (5473, 77, 83, 86, 88); *Broşteanu Th.* (5482); *Bucur N. Gh.* (5482, 83, 86); *Căruntu D. Fl.* (5482, 83, 86, 88); *Caulea V. Ion* (5482); *Cocea G. T.* (P); *Coman I. L.* (5482); *Costin Alex.* (5482, 87, 88); *Crăciunescu M.* (5482); *Diaconescu C. N.* (5486); *Diaconescu V. C.* (5468); *Drăghicescu P. P.* (3920, 4360, 5216, 50, 395, 458, 59, 73, 76, 77, 82, 83, 86, 88, 96); *Dumitrescu C.* (5468, 82); *Eftimie D. C.* (5482, 83, 86, 87, 93); *Florescu B. I.* (N); *Georgescu Răducan* (N); *Gheorghiu E. Oct.* (5020, 294, 482, 86, 88); *Gheorghiu Marius* (5486); *Ghimuş A. D-tru* (4368, 5482); *Grăjdaru D.* (5482); *Horia D. I.* (5482); *Ionescu F. P.* (5378); *Ionescu I.* (5482); *Irimescu S. P.* (5426, 82); *Jipa N.* (5482); *Marinescu G.* (5482); *Metea C. C.* (5482); *Mihăilescu C. C.* (5482, 86); *Milea C. Const.* (5483, 86); *Mircea I. G.* (5482); *Moscovici E. N.* (5486); *Munteanu I.* (5482); *Musceleanu D.* (5395, 482); *Nistor I. I.* (5482); *Oprea G.* (5482); *Oprea M.* (5482); *Pantelimon C.* (N); *Popa N. Aurel* (5473, 82, 83, 86); *Popescu Fl.* (5373, 416, 87, 88); *Popescu G. G.* (5482); *Popescu-Greaca I.* (5468, 82); *Puchiu T. Gh.* (5482, 83, 86); *Rădulescu Th. I.* (5486); *Raicu V.* (5468); *Reischer H.* (5469); *Sbârnea D. Gh.* (5312, 400, 20, 77, 88); *Sotirescu Nic.* (5477, 82, 86, 88, 93); *Staicu Const.* (5393, 438, 75); *Ştefan Tilică* (5361, 66, 71, 72, 73, 95, 474, 76, 77); *Stoianovici S. Ş.* (5482, 86); *Teodorescu I.* (P); *Topârceanu G.* (5482); *Tudoran M. Lydia* (4368, 5482); *Ungureanu P. L.* (5482); *Văduva D.* (5482); *Vasilescu A. M.* (5482); *Vijelie Gh. Eug.* (5442, 77, 86); *Vlădescu I. Gh.* (5482); *Voinea P. Radu* (5474); *Zamfir C. Ivan* (5216); *Zavati C. C.* (5482).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de geometrie, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, III, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 71.658.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNEA" SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVI

NUMĂRUL 11. — IULIE 1941

SUMARUL

1. † Profesorul David Emmanuel . . . *Gabriela Țițeica.*
2. Asupra unor transformări într'un triunghiu . . . . . *C. Ionescu-Bujor.*
3. O definiție a cuarticelor unicursale . *Ad. Gheorghiu.*
4. Raport pentru acordarea premiului „Gheorghe Țițeica" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
5. Note Matematice: 50 — 54.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 303.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2353, 4052, 4368, 4602, 4798—4871, 4892, 4915, 5102, 5156, 5239, 5263, 5356, 5378, 5389, 5398, 5482.
10. Exerciții: 19.
11. Probleme propuse: 5512 — 5526.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1941

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer, şi D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1940 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLV.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 5364, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 99, 400, 02, 03, 04, 05, 06, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 500, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

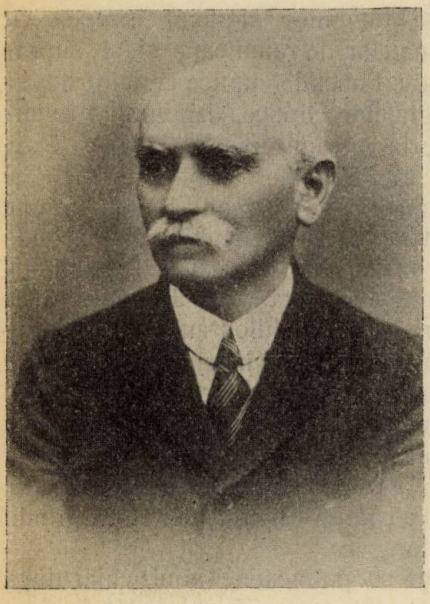
EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

† PROFESORUL DAVID EMMANUEL

Anul acesta s'a stins din viaţă, Prof. DAVID EMMANUEL care, prin lunga sa carieră profesorală, a format gândirea matematică a peste 50 de serii de studenţi.

Născut în 1854, profesor titular la Universitatea din Bucureşti din 1882, D. EMMANUEL a fost într'adevăr un profesor. Studiile strălucite făcute la Paris, teza sa de doctorat asupra Integralelor abeliene (1879) rămasă ca una din cele mai bune din cele trecute la Sorbona, l'ar fi putut îndemna să rămână la Paris, pentru a-şi continua cercetările şi a-şi face un nume în Ştiinţele Matematice. Sacrificându-şi însă cariera de cercetător, Profesorul EMMANUEL preferă să revie să-şi facă datoria faţă de ţara sa prin crearea unui edificiu de educaţie ştiinţifică, pentru ca în viitor tinerii matematicieni să poată găsi aci atmosfera necesară cercetărilor lor.



In scopul acesta el a profesat la Facultatea de Ştiinţe şi la Şcoala de Poduri şi Şosele. In fiecare loc dădea ceea ce era nevoie: Algebră şi Calcul diferenţial şi integral cu imediată aplicaţie tehnică, precis şi sobru, necesar tehnicienilor; Matematici superioare cu demonstraţii fine, totdeauna ţinute la curent, la Facultatea de Ştiinţe.

Cursul de anul II (Teoria generală a funcţiilor analitice) începe cu un studiu amănunţit al noţiunilor fundamentale de mulţime, limită, continuitate. Prin aceasta Prof. EMMANUEL se arătă dela început ca un adept al tendinţei de „aritmetizare" a matematicilor, tendinţă propovăduită de WEIERSTRASS.

E de observat că multă vreme cursul Profesorului EMMANUEL a fost singurul curs dela secţia de matematici unde această precizare a noţiunilor fundamentale a fost ţinută în seamă.

Cursul introducea apoi noţiunea de funcţie analitică după procedeul lui WEIERSTRASS prin seriile de puteri şi prelungirea

lor analitică. Suprafeţele lui RIEMANN erau introduse încă dela întâlnirea primelor exemple de funcţii multiforme.

A doua jumătate a cursului începea cu expunerea teoriei lui CAUCHY şi aplicaţiilor ei, reziduurilor, inversiunii unor integrale abeliene simple, ceea ce constituia un fel de introducere la teoria funcţiilor eliptice, desvoltată apoi în anul următor.

Cursul se termina prin reprezentarea analitică a funcţiilor uniforme, printr'un produs infinit de tip WEIERSTRASS pentru funcţiile întregi şi printr'o serie MITTAG-LEFFLER pentru funcţiile meromorfe.

Cursul de anul III (Asupra funcţiilor eliptice) începea cu studiul funcţiilor algebrice, al punctelor de ramificaţie şi al suprafeţelor lui RIEMANN corespunzătoare. Funcţiile eliptice erau introduse întâi ca rezultatal inversiunii integralelor eliptice, dar curând expunerea devenea weierstrassiană, prin introducerea funcţiilor σ, ζ, p.

Proprietăţile fundamentale ale funcţiilor eliptice precum şi aplicaţiile lor la teoria curbelor algebrice de genul 1 erau tratate pe această bază. Dar Prof. EMMANUEL nu neglija nici vechile funcţii eliptice *sn*, *cn*, *dn*, ci le dădea atât lor cât şi funcţiilor θ, o desvoltare care nu mai e întâlnită în tratatele mai moderne. El se complăcea în expunerea tuturor proprietăţilor analitice şi algebrice ale acestor funcţii, proprietăţi care au început să fie uitate de matematicienii de şcoală nouă.

Dar cele spuse mai sus nu trebue să ne facă să credem că Prof. EMMANUEL era un duşman al noutăţii. In adevăr, în ultima parte a cursului, după un studiu amănunţit al funcţiei modulare, el trecea la teoremele lui PICARD, care pot fi considerate ca primul pas al teoriei moderne a funcţiilor.

Ţinându-se mereu la curent cu publicaţiile noui, chiar după ieşirea sa din Profesorat, la vârsta de peste 75 ani, putea fi văzut la Bibliotecă, consultând reviste şi studiind ultimile lucrări care-l interesau.

Filosof calm şi senin ca şi filosofii antichităţii pe care-i citea şi recitea până în ultima zi a vieţii, vorbea cu o adâncă bunătate cu toţi, prin înţelegerea sa deplină a sufletului omenesc.

Când în ziua de 5 Februarie 1941 flacăra sufletului său s'a stins pentru totdeauna, a putut însă şti că ce era nepieritor în el fusese transmis mai departe elevilor săi şi că entusiasmul pentru Matematici aprins de el în ţară, nu se va mai putea stinge niciodată.

GABRIELA ŢIŢEICA.

ASUPRA UNOR TRANSFORMĂRI INTR'UN TRIUNGHIU

1°. Fie pe o dreaptă involuția definită de perechile de puncte: (B, C), (A_1, A_2) și A', A'' punctele duble ale involuției.

Să notăm:

$$(BCA_1A') = \lambda.$$

Avem:

$$(BCA_1A') = (CBA_2A'),$$

deci

$$(BCA_2A') = \frac{1}{\lambda}.$$

Rezultă

$$(BCA_1A') \times (BCA_2A') = \left(\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}\right) : \frac{\overline{A'B}^2}{\overline{A'C}^2} = 1$$

sau

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}} = \frac{\overline{A'B}^2}{\overline{A'C}^2}. \qquad (1)$$

„Pe o dreaptă fiind definită o involuție prin două puncte omoloage B, C *și un punct dublu* A', *două puncte omoloage oarecare ale involuției,* A_1 *și* A_2 *satisfac relația* (1).

Reciproc, relația (1) ne arată că A_1, A_2 se corespund în involuția [(B, C), (A', A')], pentrucă din (1) deducem

$$(BCA_1A') \times (BCA_2A') = 1,$$

deci

$$(BCA_1A') = (CBA_2A').$$

2°. Fie A un punct exterior dreptei BC. Intr'un articol publicat în *Gazeta Matematică*[1]), D-l Gr. Moisil, pentru a generaliza transformarea prin puncte reciproce și izogonale, consideră cevienele AA_1 și AA_2 satisfăcând relației (1) și le numește *ceviene inverse generalizat,* iar dreapta AA', *axă de inversiune generalizată.*

Rezultă astfel că *cevienele inverse generalizat nu sunt decât raze corespunzătoare într'o involuție în care laturile adiacente*

1) Gr. Moisil: Teoreme asupra triunghiului. G. M, XXIX. p. 205.

ale triunghiului sunt deasemenea raze corespunzătoare, iar axa de inversiune este rază dublă.

Dacă A′ este mijlocul laturii BC sau punctul dela infinit,

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = \frac{\overline{A_2C}}{\overline{A_2B}},$$

iar cevienele AA_1, AA_2 sunt izotomice; deci:

Două ceviene izotomice se corespund într'un fascicol involutiv cu raze duble mediana ce pleacă din acelaş vârf şi paralela dusă prin acel vârf laturii opuse.

Dacă A′ este piciorul unei bisectoare a vârfului A_1

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}} = \frac{\overline{AB^2}}{\overline{AC^2}}$$

şi după o teoremă a lui STEINER, AA_1 şi AA_2 sunt izogonale. Rezultă:

„Două ceviene izogonale se corespund într'un fascicol involutiv cu raze duble cele două bisectoare ale unghiului corespunzător.

Concluzie. Generalizarea cevienelor izotomice sau izogonale o formează cevienele ce se corespund într'un fascicol involutiv având laturile adiacente ca raze corespunzătoare şi o ceviană dată ca raze duble.

3°. Să considerăm punctele B_1, B_2, C_1, C_2 definite de

$$(CAB_1B') = (ACB_2B')$$

$$(ABC_1C') = (BAC_2C').$$

Rezultă din relaţiile analoage relaţiei (1):

A′B′C′ *fiind triunghiul pedal sau polara trilineară a unui punct* M, *punctele* A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 *se găsesc pe o conică.*

In particular, dacă $A_1B_1C_1$ este triunghiul pedal sau polara trilineară a unui punct M_1, $A_2B_2C_2$ este triunghiul pedal sau polara trilineară a unui punct M_2. M_1 şi M_2 sunt *inversele generalizate* [1]) în raport cu M.

In cazul general, dreptele AA_1, BB_1, CC_1 determină un triunghiu T_1, iar dreptele AA_2, BB_2, CC_2 determină un triunghiu T_2 care reprezintă generalizarea punctelor M_1, M_2.

---

1) Loc. cit.

Reciproc:

Dacă o conică taie laturile BC, CA, AB *ale unui triunghiu în* (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2) *şi numim* (A', A''), (B', B''), (C', C'') *punctele duble ale involuţiilor* $[(B, C), (A_1, A_2)]$, $[(C, A), (B_1, B_2)]$, $[(A, B), (C_1, C_2)]$, *punctele* $A', A'', B', B'', C', C''$ *determină vârfurile triunghiului pedal al unui punct* M *şi polara sa trilineară.*

Ca aplicaţie a acestei proprietăţi enunţăm:

„Fie α, β, γ *punctele în care axul radical al cercurilor* O *şi* O′ *taie laturile* BC, CA, AB *ale unui triunghiu înscris în cercul* O.

Cercul cu centrul în α, *ortogonal cercurilor* O, O′ *taie dreapta* BC *în* A_1, A_2. *Analog se obţin punctele* B_1, B_2, C_1, C_2. *Cele şase puncte* A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 *determină vârfurile triunghiului pedal al unui punct* M *şi polara sa trilineară.*

4°. ABC fiind triunghiul de referinţă, să notăm $A_1B_1C_1$ triunghiul pedal al punctului M, $A_2B_2C_2$ triunghiul pedal al punctului M în raport cu $A_1B_1C_1$ — şi astfel mai departe — $A_nB_nC_n$ triunghiul pedal al punctului M în raport cu $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$.

Să numim [1]) $A_nB_nC_n$ triunghiul pedal de ordinul n al punctului M în raport cu ABC.

O ceviană AP taie dreapta B_1C_1 în P_1. Avem:

$$(BCPA_1) = (C_1B_1P_1'A_2) = \lambda,$$

de unde

$$(B_1C_1P_1A_2) = \frac{1}{\lambda}.$$

Fie, în omologia Ω definită de triunghiurile ABC, $A_1B_1C_1$, P_1' omologul lui P. Avem:

$$(BCPA_1) = (B_1C_1P_1'A_2) = \lambda.$$

Se vede astfel că P_1 şi P_1' se corespund în involuţia definită de perechea B_1, C_1 şi punctul dublu A_2.

5°. Dacă AP, BQ, CR sunt cevienele unui punct N şi P_1, Q_1, R_1 punctele în care ele întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului $A_1B_1C_1$, iar $P_1'Q_1'R_1'$ transformatul triunghiului PQR în omologia Ω, cum cevienele A_1P_1', B_1Q_1', C_1R_1' sunt concurente într'un punct N_1' (transformatul lui N în Ω), deducem şi concurenţa cevienelor

---

1) O. Bolgiu: Curierul Matematic, Vol. I, pag. 17.

A_1P_1, B_1Q_1, C_1R_1 omoloagele cevienelor A_1P_1', B_1Q_1', C_1R_1' în fascicolele involutive:

$$[(A_1B_1, A_1C_1), (A_1A, A_1A)] \ , \ [(B_1C_1, B_1A_1), (B_1B, B_1B)],$$
$$[C_1A_1, C_1B_1), (C_1C, C_1C).$$

Să notăm N_1 punctul (A_1P_1, B_1Q_1, C_1R_1) şi să-l numim ca într'o notă publicată în *Gazeta Matematică* [1]), *transformatul de ordinul I al punctului* N *în raport cu triunghiul pedal al punctului* M.

6°. Să considerăm triunghiul $A_1B_1C_1$ drept triunghiu de referinţă şi să luăm transformatul lui N_1 în raport cu triunghiul pedal de ordinul II al punctului M. Se obţine un punct M_2, *transformatul pedal de ordinul 2 al punctului* N *în raport cu triunghiul pedal al punctului* M. Operaţia se poate continua. Cevienele $A_{n-1}N_{n-1}$, $B_{n-1}N_{n-1}$, $C_{n-1}N_{n-1}$ taie laturile corespunzătoare ale triunghiului $A_nB_nC_n$ în trei puncte P_n, Q_n, R_n astfel încât A_nP_n, B_nQ_n C_nR_n sunt concurente într'un punct N_n, *transformatul pedal de ordinul* n *al punctului* N *în raport cu triunghiul pedal al punctului* M.

O generalizare, în altă privinţă a transformării pedale am dat în nota citată:

„*O conică taie laturile* BC, CA, AB *ale unui triunghiu în punctele* (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2).

Cevienele AA_2, BB_2, CC_2 *taie laturile corespunzătoare ale triunghiului* $A_1B_1C_1$ *în trei puncte colineare sau în picioarele a trei ceviene concurente*".

7°. Dacă $M \equiv H$ (ortocentrul triunghiului de referinţă): obţinem transformarea, numită de D-l M. FOCŞENEANU, *ortică* [2]),

In acest caz, cevienele A_1P_1' şi A_1P_1 sunt corespunzătoare într'un fascicol involutiv cu A_1A rază dublă şi cu A_1B_1, A_1C_1 raze corespunzătoare. Insă cum A_1A este bisectoarea unghiului $B_1A_1C_1$, A_1P_1' şi A_1P_1 sunt izogonale şi deducem:

„*Transformatul ortic al unui punct şi transformatul său în omologia definită de triunghiul ortic cu triunghiul de referinţă, sunt două puncte izogonale în triunghiul ortic*".

---

1) C. IONESCU-BUJOR: O teoremă şi generalizarea unei transformări, G. M. Vol. XXXV. p. 463.

2) MIHAIL I. FOCŞENEANU: Asupra unei transformări. G. M. XXXII. pag. 329.

Transformatul ortic al punctului lui LEMOINE este centrul de greutate al triunghiului ortic. Dar, în triunghiul ortic, acesta este izogonal cu punctul lui LEMOINE al triunghiului ortic.

8°. Fie α_0, β_0, γ_0 coordonatele baricentrice ale punctului M şi α_1, β_1, γ_1 coordonatele lui N. Găsim pentru punctul N_1 coordonatele:

$$\alpha_0\left(\frac{\beta_0}{\beta_1}+\frac{\gamma_0}{\gamma_1}\right)\ ,\quad \beta_0\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}+\frac{\gamma_0}{\gamma_1}\right)\ ,\quad \gamma_0\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}+\frac{\beta_0}{\beta_1}\right).$$

Dacă punctul N_1 descrie o dreaptă

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0$$

punctul N descrie conica

$$l\alpha_0\left(\frac{\beta_0}{\beta}+\frac{\gamma_0}{\gamma}\right)+m\beta_0\left(\frac{\alpha_0}{\alpha}+\frac{\gamma_0}{\gamma}\right)+n\gamma_0\left(\frac{\alpha_0}{\alpha}+\frac{\beta_0}{\beta}\right)=0$$

circumscrisă triunghiului ABC. Deci

Transformata pedală a unei conice circumscrisă triunghiului de referinţă este o dreaptă.

Să exprimăm coordonatele punctului N în funcţie de α, β, γ coordonate ale lui N_1. Avem:

$$\alpha_1 : \frac{\alpha_0}{-\beta_0\gamma_0\alpha+\gamma_0\alpha_0\beta+\alpha_0\beta_0\gamma} = \beta_1 : \frac{\beta_0}{\beta_0\gamma_0\alpha-\gamma_0\alpha_0\beta+\alpha_0\beta_0\gamma}$$

$$= \gamma_1 : \frac{\gamma_0}{\beta_0\gamma_0\alpha+\gamma_0\alpha_0\beta-\alpha_0\beta_0\gamma}\ .$$

Dacă N descrie dreapta

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0,$$

N_1 descrie conica

$$\Sigma l\,(\beta_0\gamma_0\alpha-\gamma_0\alpha_0\beta+\alpha_0\beta_0\gamma)(\beta_0\gamma_0\alpha+\gamma_0\alpha_0\beta-\alpha_0\beta_0\gamma)=0$$

care este verificată de coordonatele vârfurilor triunghiului $A_1B_1C_1$. Deci:

Transformata pedală a unei drepte este o conică circumscrisă triunghiului pedal al centrului de transformare.

9°. Pentru transformarea ortică, observând că avem:

$$\frac{\alpha_0}{a\cos B\cos C}=\frac{\beta_0}{b\cos C\cos A}=\frac{\gamma_0}{c\cos A\cos B},$$

coordonatele transformatului ortic al punctului $N(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ sunt:

$$\frac{\alpha}{a\alpha_1[\beta_1 c\cos B + \gamma_1 b\cos C]} = \frac{\beta}{b\beta_1[\gamma_1 a\cos C + \alpha_1 c\cos A]} = \frac{\gamma}{c\gamma_1[\alpha_1 b\cos A + \beta_1 a\cos B]}$$

de unde rezultă că transformata ortică a unei drepte este o conică, nu o linie dreaptă cum găseşte D-l M. FOCŞENEANU în nota citată.

10°. Să considerăm punctul N_2, transformatul pedal de ordinul 2 al punctului N faţă cu triunghiul pedal al punctului M. Picioarele cevienelor sale în triunghiul $A_2B_2C_2$ să fie P_2, Q_2, R_2. Avem:

$$(BCPA_1) = (B_2C_2P_2A_3) = \lambda,$$

adică P şi P_2 sunt puncte corespunzătoare în transformarea omologică definită de triunghiurile ABC, $A_2B_2C_2$. Rezultă că N_2, transformatul pedal de ordinul 2 al punctului N în raport cu triunghiul pedal al punctului M este transformatul omologic al punctului N în omologia triunghiurilor ABC, $A_2B_2C_2$.

Generalizare. *Transformatele pedale de ordin impar ale unui punct* N *sunt inversele generalizate ale omoloagelor punctului* N *în omologia care leagă triunghiul de referinţă cu triunghiul pedal de ordin corespunzător, iar transformatele pedale de ordin par coincid cu transformatele omologice corespunzătoare.*

Transformatele de ordin impar ale unei drepte sunt conice circumscrise triunghiurilor pedale de ordin corespunzător, iar transformatele pedale de ordin par sunt drepte.

C. IONESCU-BUJOR.

O DEFINIŢIE A CUARTICELOR UNICURSALE

Căutând o soluţie geometrică problemei 1384 din G. M., am fost condus să consider următoarea problemă de loc geometric, ajutătoare, dar mai generală[1]):

1) Cele ce urmează au fost trimise *Gazetei Matematice* în anul 1932 întâi ca problemă propusă, apoi adăugându-i câteva consecinţe, ca articol. Problema s'a propus cu un enunţ puţin diferit sub numărul 4320, Publicând acum articolul, problema 4320 se consideră rezolvată, pe calea pe care a fost imaginată.

I. *Fie în plan conica* (G) *şi fascicolele de drepte:* (Δ) *şi* (Δ'), *de vârfuri* O *şi* O' *respectiv, într'o omografie dată* H. *O dreaptă* Δ' *taie conica* (G) *în m, n; tangentele în m, n la conica* (G) *taie dreapta omoloagă* Δ *în punctele* M, N. *Ne propunem să găsim locul geometric al punctelor* M, N, *dreptele* Δ *şi* Δ' *descriind două fascicole omografice.*

Observăm că dacă M e un punct al locului, dreapta Δ' corespunzătoare în omografie dată H, dreptei Δ definită de punctul M; şi polara lui M faţă de conica (G) se taie într'un punct *m* pe (G).

Numărăm punctele locului pe o dreaptă oarecare L. Fie *i* un punct pe această dreaptă, *l* polara lui faţă de conica (G), ea trece prin K polul dreptei L faţă de (G). Fie Δ_i' dreapta corespunzătoare în omografia dată, dreptei Δ definită de punctul *i*. Intre dreptele *l* şi Δ_i' există o corespondenţă omografică când punctul *i* descrie dreapta L fixă. In adevăr la Δ_i' corespunde în mod *unic* Δ (prin omografia dată H), Δ taie pe L într'un *singur* punct *i* la care corespunde în mod *unic l*; invers, la dreapta *l* dusă prin K corespunde în mod *unic* polul său *i* pe dreapta L, *i* defineşte *unic* pe Δ, la care corespunde în mod *unic* dreapta Δ_i'; construcţiile fiind algebrice.

Intersecţia $A \equiv (l, \Delta_i')$ descrie deci o conică (A) trecând prin O' şi K, *asociată* astfel dreptei L.

Fie *m*, *m'*, *m''*, *m'''* intersecţiile conicelor (G) şi (A); tangentele în aceste puncte la conica (G) taie dreapta L în *patru* puncte M, M', M'', M''' aparţinând locului.

Pe o dreaptă oarecare construind-se deci patru puncte ale locului, *locul căutat e o cuartică.*

Particularizând dreapta L, obţinem puncte particulare ale cuarticei. De exemplu construind conica (A) *asociată* ca mai sus dreptei dela *infinit,* obţinem *direcţiile asimptotice* ale cuarticei.

II. Fie (H) conica descrisă de intersecţia $H \equiv (\Delta, \Delta')$ a razelor omoloage în cele două fascicole omografice date în omografie H. Fie *a*, *b*, *c*, *d* intersecţiile conicelor (G) şi (H). *Aceste puncte aparţin locului.* In adevăr la dreapta $\Delta \equiv Oa$ corespunde în omografia H, dreapta $\Delta' \equiv O'a$ care taie deci pe (G) în *a* şi *n*, tangentele în *a* şi *n* la (G) taie pe $\Delta \equiv Oa$ în *a* şi N. Mai mult, fie tangenta în *a* la (G) o dreaptă L pe care să numărăm punctele locului. Polul ei K faţă de (G) este punctul *a*: conica (A) asociată

acestei drepte L, îi e tangentă în a. In adevăr, polara l a unui punct i depe L trece prin a, când i se confundă cu a, l devine L, Δ devine Oa şi omoloaga sa în fascicolul (Δ') devine O'a, încât la dreapta O'a *privită* în fascicolul (Δ') corespunde în fascicolul de drepte (l), dreapta L tangenta în a la conica (G) care deci e tangenta în a conicei (A) asociată acestei drepte L. Atunci conica (A) taie conica (G) în m, m' confundate în a şi m'', m''' distincte. Tangentele în m, m' la (G) taie pe L în M, M' confundate în a (printr'un raţionament de trecere la limită polul lui mm' este a), iar tangentele în m'', m''' taie pe L în M'', M''' şi deci L *e tangentă în a cuarticei.*

Cuartica loc e tangentă în a, b, c, d conicei (G).

III. Pe orice dreaptă Δ trecând prin O există două puncte ale locului M, N ce se construesc ca în enunţ. Locul fiind de gradul *patru.* O *e un punct dublu.* Vreau să determin tangentele în O şi tangentele din O la cuartică.

Fie m_1, m_2 contactele tangentelor din O la conica (G) şi fie h_1, h_2 intersecţiile dreptelor O'm_1, O'm_2 cu conica (H), căci O' se găseşte pe conica (H). Determin punctele M, N pe dreptele Δ definite de punctele h_1, h_2: la dreapta $\Delta \equiv Oh_1$ corespunde deci $\Delta' \equiv O'h_1$ care taie conica (G) în m_1, n_1. Tangentele în m_1, n_1 la (G) taie pe $\Delta \equiv Oh_1$ în M_1 *confundat cu* O şi în N_1 distinct.

Aşa dar dreptele Oh_1, Oh_2 *sunt tangentele punctului dublu* O.

Fie U, V contactele tangentelor din O' la conica (G) şi fie u, v celelalte intersecţii ale dreptelor O'U, O'V cu conica (H). Determin punctele M, N pe dreptele Δ definite de punctele u, v: la dreapta $\Delta \equiv Ou$ corespunde deci $\Delta' \equiv O'u$ care taie conica (G) în m, n *confundate în* U, deci tangentele în m, n la (G) se confundă cu O'U şi *punctele* M, N pe $\Delta \equiv Ou$ *se confundă în u.*

Aşa dar dreptele Ou, Ov *sunt tangentele din* O *la cuartică în u şi v,* dacă u şi v nu sunt puncte duble ale locului. Pentru aceasta să căutăm punctele locului pe dreapta $L \equiv uv$. Conica (A) asociată trece prin K polul lui L faţă de (G) prin O' şi încă prin U şi V care sunt două din punctele m, m', m'', m'''. Pentruca u şi v să fie puncte duble, trebue ca pe dreapta $L \equiv uv$ să nu găsim alte puncte afară de u şi v, trebue deci ca conica (A) să fie *bitangentă* conicei (G) în U şi V; ceea ce e *imposibil* pentrucă pe tangentele în U şi V la conica (G) mai există un punct al conicei (A): este

punctul O', Deci, *câtă vreme* O' *nu se găseşte pe conica* (G), *u* şi *v* sunt puncte simple ale locului.

IV. Mai există două drepte Δ pe care punctele M, N se confundă: acelea care conţin polul corespunzătoarelor lor Δ' în omografie dată, faţă de conica (G). Adică acele drepte Δ, astfel că Δ şi omoloaga sa Δ' să fie în acelaşi timp *conjugate* faţă de conica (G). Duc prin O o dreaptă Δ şi prin O' pe δ conjugata lui Δ faţă de (G). Se ştie că intersecţia $I \equiv (\Delta, \delta)$ descrie o conică (I) trecând prin O, O' şi prin intersecţiile polarelor lui O şi O' faţă de conica (G) cu această conică. Conicele (H) şi (I) se taie în afară de O şi O' în punctele p şi q. Aşa încât perechile de drepte O_p, O'_p şi O_q, O'_q sunt în acelaşi timp conjugate faţă de conica (G) şi omoloage în omografia H. Deci: dreapta $\Delta' \equiv O'_p$ taie conica (G) în m_p, n_p tangentele în m_p, n_p la (G) taie dreapta $\Delta \equiv O_p$ în M_p, N_p *confundate* în punctul P, *polul lui* O'_p *faţă de* (G). Analog, pe dreapta $\Delta \equiv O_q$ construim punctul Q *al locului, polul lui* O'_q *faţă de* (G). Punctele P şi Q se găsesc astfel pe polara UV a punctului O' faţă de conica (G). Vreau să arăt că P *şi* Q *sunt puncte duble ale cuarticei-loc.* In adevăr pe dreapta $L \equiv UV$ nu există alte puncte ale locului afară de P şi Q. Pentru această dreaptă L, polul său K faţă de conica (G) se confundă cu O' şi fascicolele de drepte (l) şi (Δ'_l) devin de acelaşi vârf O'. Şi deci conica *asociată* (A) devine conica singulară formată din dreptele duble ale acestor fascicole omografice de acelaşi vârf. Consider pe această dreaptă L, punctul $i \equiv P$, atunci polara sa l faţă de (G) este dreapta O'_p, iar dreapta Δ determinată de i este $O_i \equiv OP \equiv O_p$ şi deci Δ'_i corespunzătoare este O'_p, căci p este pe conica (H). Aşa dar pentru $i \equiv P$ avem $l \equiv \Delta'_i \equiv O'_p$, adică una din dreptele duble ale celor două fascicole omografice (l) şi (Δ'_i) de acelaşi vârf O' este O'_p. Analog cealaltă dreaptă dublă este O'_q. Incât conica (A) *asociată* dreptei $L \equiv UV$ este conica singulară (O'_p, O'_q) care taie conica (G) în m_p, n_p şi m_q, n_q. Iar tangentele în aceste puncte la (G) taie dreapta $L \equiv UV$ respectiv în M_p, N_p *confundate* în P, şi M_q, N_q *confundate* în Q.

Cu acestea completăm rezultatele de până aici astfel:

Locul căutat e o cuartică cu trei puncte duble O, P, Q, *adică o cuartică unicursală, tangentă conicei* (G) *în patru puncte.*

V. Determin tangentele în punctele duble P şi Q şi tangentele din P şi Q la cuartică.

Să observăm, mai întâi, că între punctele *i* şi A introduse la paragraful I există o *corespondenţă patratică* (punctul A fiind intersecţia a două corespondente corelative ale punctului *i*). Am arătat că *i* descriind o dreaptă L, punctul A descrie o conică (A), rezultat evident în urma acestei observaţii. Completăm încă: conica (A) trece prin cele *trei puncte singulare* ale transformării patratice dintre care unul este evident O'. Deci, dacă acum, facem ca dreapta L să pivoteze în jurul unui punct fix i_0, tranformata ei, conica (A) descrie un *fascicol punctual*, trecând printr'un al patrulea punct fix A_0, transformatul lui i_0.

Cu acestea, să considerăm o dreaptă L trecând prin P, şi pe care s'o numim deaci înainte φ iar fascicolul (φ). Conica *asociată* (A), conţinând punctele m_p, n_p, O' colineare pe dreapta O'_p, se descompune în dreapta O'_p şi *o altă dreaptă* φ'. Dreapta φ' taie conica (G) în punctele *m*, *n*, tangentele în aceste puncte la conica (G) taie dreapta φ în punctele M, N, celelalte puncte ale cuarticei-loc pe dreapta φ, în afară de punctul dublu P. Conform observaţiei de mai sus, dreapta φ trecând prin P, conica *asociată* (A), în acest caz conica singulară $(A) \equiv (O'_p, \varphi')$, descrie un fascicol punctal: cum O'_p e fixă, rezultă că dreapta φ' *trece printr'un punct fix* P' formând un fascicol (φ') evident omografic fascicolului (φ). Această omografie depinde de omografia dată H, căci, dacă definim $S \equiv (\varphi, \varphi')$, punctul S descrie o conică (S) ce trece şi ea prin punctele *a*, *b*, *c*, *d*, fără de care nu ar rezulta aceeaşi cuartică-loc.

Aşa dar cuartica noastră se defineşte acum în mod analog celor dela paragraful I, *în raport cu aceeaşi conică* (G), *dar faţă de punctele* P, P' *şi fascicolele de drepte* (φ), (φ') *în omografia* S *dependentă de omografia* H.

Incât tangentele punctului dublu P şi tangentele din P la cuartică se construesc în mod analog celor dela paragraful III.

Consideraţii perfect analoage asupra punctului Q, ne conduc: la două fascicole de drepte (ψ) şi (ψ') de vârfuri respectiv Q şi Q', într'o omografie T dependentă de cea dată H, la intersecţia $T \equiv (\psi, \psi')$ ce descrie o conică (T) trecând prin punctele *a*, *b*, *c*, *d*, la construcţii analoage pentru tangentele în punctul dublu Q şi tangentele din Q la cuartică.

VI. *Aşa dar, rezumând, cuartica noastră se poate defini în trei moduri perfect analoage şi dependente între ele:*

Cu punctele O, O′ şi conica (H), când se găsesc în afară de O, punctele duble: P şi Q pe polara lui O′ faţă de conica (G) şi contactele *a, b, c, d* cu conica (G), intersecţiile acesteia cu conica (H);

cu punctele P, P′ şi conica *anumită* (S), trecând prin *a, b, c, d*, când se găsesc, *pentru a avea această cuartică*, punctele duble Q şi O, în afară de punctul P, situate, *prin analogie*, pe polara lui P′ faţă de (G).

Cu punctele Q, Q′ şi conica *anumită* (T) trecând prin *a, b, c, d*, când se găsesc, *pentru aceleaşi motive*, în afară de Q, punctele duble O şi P situate pe polara lui Q′ faţă de (G).

Din acestea rezultă că *triunghiurile* OPQ *şi* O′P′Q′ *sunt polar reciproce faţă de conica* (G).

VII. Fie deci în plan, două triunghiuri polar reciproce faţă de o conică (G): OPQ şi O′P′Q′ şi punctele $p \equiv (OP, O'Q')$, $q \equiv (OQ, O'P')$, intersecţii de laturi conjugate. La *o conică* (H) trecând prin O, Q′, *p, q* şi tăind conica (G) în *a, b, c, d*, corespunde *o cuartică unicursală* (Γ), definită ca în enunţ, având O, P, Q puncte duble şi fiind tangentă conicei (G) în *a, b, c, d.* Urmează conform celor de la paragraful VI că *punctele* P, P′, *a, b, c, d sunt pe o conică* (S) *şi punctele* Q, Q′, *a, b, c, d sunt pe o conică* (T), ambele mai trecând încă prin puncte analoage punctelor *p, q* relative, respectiv la P, P′ şi Q, Q′.

De unde teorema:

Fie două triunghiuri OPQ *şi* O′P′Q′ *polar reciproce faţă de o conică* (G), *fie intersecţiile de drepte conjugate:* $P_0 \equiv (OP, O'Q')$, $Q_0 \equiv (OQ, O'P')$ *şi fie* Q_p, O_p; O_q, P_q *puncte analoage. Dacă o conică* (H) *circumscrisă patrupunctului* $OO'P_0Q_0$ *taie conica* (G) *în a, b, c, d; atunci octogoanele* $PP'Q_p O_p$ *abcd şi* $QQ'O_q P_q$ *abcd sunt înscrise în câte o conică.*

VIII. Ca un caz particular să considerăm punctul O′ pe conica (G), caz îndepărtat la paragraful III; atunci oricare Δ′, dusă prin O′, taie pe (G) în *m*, O′. Tangenta în *m* şi *tangenta fixă* în O′ taie pe Δ corespunzătoare în M şi N. Incât N *descrie tangenta în* O′ *la* (G), când Δ pivotează în jurul lui O, *deci cuartica noastră se descompune în această dreaptă şi o cubică*

cu punctul dublu în O. Atunci în adevăr tangentele Ou, Ov în u şi v la cuartică nu mai există.

IX, Mai considerăm o aplicaţie: *fie* O′ *centrul conicei* (G), *iar conica* (H), *hiperbola lui* APOLLONIUS *a unui punct* O *faţă de conica* (G); *atunci cuartica definită prin construcţiile dela paragraful I devine podara punctului* O *faţă de conica* (G).

In adevăr, atunci corespondenţa omografică între Δ şi Δ' e următoarea: Δ' fiind un diametru al conicei (G), Δ e perpendiculara din O pe diametrul conjugat Δ'' al lui Δ' în conica (G). Deci punctele M, N în care tangentele în m, n la (G), paralele şi de direcţie Δ'', taie pe Δ sunt *proecţiile* lui O pe aceste tangente. Am regăsit adică modul de a defini curbele *podare*. Se vede uşor că punctele duble P şi Q devin *punctele ciclice*. Se verifică deasemenea că cuartica e tangentă în a, b, c, d conicei (G), acestea fiind *picioarele normalelor* din O la conică.

Rezultă şi această teoremă:

Fie (G) *o conică de centru* O′ *şi* (H) *hiperbola lui* APOLLONIUS *a unui punct* O *din plan, faţă de* (G). *Fie* (I) *conica-loc al intersecţiei dreptelor duse prin* O *şi* O′ *şi conjugate faţă de conica* (G). *Conicele* (H) *şi* (I) *se taie, în afară de* O *şi* O′ *în p şi q astfel că dreptele* O_p, O_q *sunt izotrope.*

X. In cele ce preced nu am făcut distincţie între elementele reale şi imaginare. O discuţie de ordin topologic poate preciza natura acestor elemente (de ex. a punctelor duble). Cazuri particulare se pot da nenumărate.

Cu acestea rezolvarea problemei 1384 este imediată, cel puţin teoretic.

Problema 4949 ce am propus în G. M. Vol. XLIII la pag. 448 este o aplicaţie a teoremei dela paragraful VII.

AD. GHEORGHIU.

RAPORT
PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „GHEORGHE ŢIŢEICA“

Premiul „GHEORGHE ŢIŢEICA“ acordat anual de Societatea *Gazeta Matematică*, pentru cinstirea memoriei marelui profesor, se decerne autorului (român, elev de liceu din ţară) unor lucrări referitoare la geometria elementară dintre cele publicate în ultimul volum.

Condiţiunile premiului sunt îndeplinite de D-l IULIAN PETRESCU, elev al liceului „Gh. Lazăr" din Bucureşti, cu articolul *„Câteva consideraţii de Geometria Triunghiului"* în care vădeşte o bună orientare în câmpul geometriei.

Adăogăm la acest articol cunoscuta activitate a Domniei Sale ca rezolvitor de probleme şi de exerciţii din *Suplimentul Gazetei Matematice.*

Ca urmare, propunem să se acorde în acest an premiul „GHEORGHE ŢIŢEICA" D-lui IULIAN PETRESCU.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL „GHEORGHE ŢIŢEICA"
C. IONESCU-BUJOR, D. STOICA, O. N. ŢINO.

Acest raport a fost citit şi aprobat în Adunarea Generală din 20 Februarie 1941.

NOTE MATEMATICE

50. *Asupra unei probleme de Mecanică.* Problema 5101. Din rezolvarea interesantei probleme a D-lui Inginer ION S. ANTONIU, reiese că mărimea, direcţia şi sensul rezultantei celor trei vectori $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ şi $\vec{V}_3$ sunt aceleaşi, fie că vectorul mobil $\vec{V}_3$ se roteşte în jurul punctului de concurenţă al vectorilor $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$, fie că acest vector se roteşte în jurul unui *alt punct* din planul lor comun.

Ne întrebăm atunci care este diferenţa dintre primul sistem şi cel de al doilea; răspunsul la această întrebare îl dă studiul *poziţiei liniei de acţiune — a suportului rezultantei vectorilor.*

In adevăr, pe când în cazul vectorilor concurenţi $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ *suportul rezultantei trece necontenit prin punctul lor de concurenţă,* în cazul neconcurenţei vectorilor, acest suport *se deplasează în plan.*

Imi propun de a studia în cele ce urmează variaţia poziţiei suportului rezultantei.

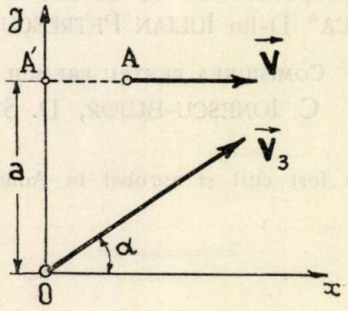
Inlocuind vectorii ficşi $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$ prin rezultanta lor:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2,$$

alegând origina O a axelor de coordonate în centrul de rotaţie a lui $\vec{V}_3$ şi ducând Ox paralel cu $\vec{V}$, rezultă:

$$X = V + V_3 \cos\alpha$$
$$Y = V_3 \sin\alpha$$
$$M_0 = + V \cdot a$$

în care X şi Y sunt proiecţiile vectorului rezultant pe axe, M_0



momentul său în O, α unghiul variabil $\sphericalangle(\vec{V}_3; Ox)$ iar $a = OA'$.

Aplicând ecuaţia suportului:

$$-yX + xY + \mathcal{M}_0 = 0$$

obţinem dreapta:

$$-y(V + V_3 \cos\alpha) + xV_3 \sin\alpha + Va = 0$$

dreaptă variabilă cu unghiul α.

Sau notând:

$$\frac{|V|}{|V_3|} = k$$

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = k(a - y) \qquad (1)$$

Pentru a afla înfăşurătoarea vom întrebuinţa procedeul clasic de eliminarea parametrului variabil α între ecuaţia dată (1) şi derivata sa (2):

$$-y\sin\alpha - x\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

Rezolvind (1) şi (2) în raport cu $\sin\alpha$ şi $\cos\alpha$, rezultă:

$$\sin\alpha = -\frac{kx(a - y)}{x^2 + y^2} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{ky(a - y)}{x^2 + y^2}.$$

Sau ţinând seama că:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

obţinem:

$$k^2(a-y)^2 = x^2 + y^2$$

ecuaţia înfăşurătoarei căutate.

Curba găsită este *o conică* cu centrul C:

$$x = 0 \qquad y = \frac{k^2 a}{k^2 - 1}$$

şi având axul Oy drept ax de simetrie.

Studiul naturii acestei conice, în funcţiune de raportul k conduce la rezultatele trecute în tabloul de mai jos:

k^2	Natura conicei	Semiaxe parametru
$k^2 < 1$	Elipsă	$\frac{ka}{\sqrt{1-k^2}}$; $\frac{ka}{1-k^2}$
$k^2 = 1$	Parabolă	parametru a
$k^2 > 1$	Hiperbolă	$\frac{ka}{\sqrt{k^2-1}}$; $\frac{ka}{k^2-1}$

Cercetând mai amănunţit problema putem ajunge la o construcţie vectorială interesantă ce permite *ducerea tangentelor la conice.*

Propun acest studiu corespondenţilor noştri.

ALEXANDRU STOENESCU.

51. *Asupra problemei 4918.* In soluţia dată acestei probleme în *Gazeta Matematică,* Vol. XLIV, pag. 267 s'a demonstrat că dacă x şi y sunt soluţii întregi ale ecuaţiei

(1) $$x(5x-4) = y^2$$

atunci x este patrat perfect. Rezultă din (1) că şi $5x-4$ este patrat perfect şi deci rezolvarea ecuaţiei (1) în numere întregi se reduce la rezolvarea în numere întregi a ecuaţiei

(2) $$5x^2 - 4 = y^2.$$

Voiu arăta că ecuaţia (2) şi ecuaţia

(3) $$5x^2 + 4 = y^2$$

îşi găsesc soluţiile în şirul lui FIBONACCI.

Se ştie şi se poate demonstra uşor că între 3 termeni consecutivi ai şirului lui FIBONACCI avem relaţiunea

$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+1} - u_n^2 + (-1)^n = 0$$

de unde se scoate

$$u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{5u_n^2 - 4(-1)^n}}{2}.$$

Cum u_{n+1} este întreg înseamnă că $5u_n^2 - 4(-1)^n$ este patrat şi vom avea

$5u_n^2 - 4 = y^2$ pentru n par

$5u_n^2 + 4 = y^2$ „ „ impar.

Deci termenii şirului lui FIBONACCI dau soluţii întregi ale ecuaţiilor (2) şi (3) şi deci ale ecuaţiei (1).

Se poate găsi şi o extindere pentru alte recurenţe mai generale decât ale şirului lui FIBONACCI.

V. I. POSTOLACHE.

52. *Asupra problemei 4782.* In soluţia ce s'a dat acestei probleme la pag. 311, Vol. XLV G. M., s'a considerat cazul general al unei conice şi s'a găsit că învelitoarea dreptei Δ este o parabolă cu focarul în P şi având pe Δ' ca tangentă la vârf. Vreau să arăt în nota de faţă că nu toată parabola face parte din învelitoare.

Când conica iniţială este un cerc, aşa cum este în enunţul negeneralizat al problemei 4782, poziţiile limită ale cercului variabil O' sunt punctele de contact Q şi R ale tangentelor duse din P la cercul O. In acest caz polara Δ şi deci tangentele în punctele limită ale parabolei învelitoare sunt razele OQ şi OR, iar punctele limită de pe parabolă sunt simetricele Q' şi R' ale lui O în raport cu Q şi R. Deci arcul de parabolă care face parte din învelitoare este arcul Q'R' cuprins între tangentele duse din O la parabolă.

La fel se poate examina problema şi în cazul când se înlocueşte cercul O prin o conică, cum s'a făcut în soluţia dată în Vol. XLV.

ING. A. ŞCODRANU.

53. *Asupra problemei 4423.*

Problema D-lui GH. TH. GHEORGHIU prin care se cerea rezolvarea triunghiului format de o înălțime, o mediană și o bisectoare dusă fiecare din câte un vârf diferit al triunghiului, ne oferă un caz destul de interesant de triunghiu special în ipoteza că cele trei linii menționate sunt concurente.

Cele trei ceviene: înălțimea AA_1, bisectoarea BB_1 și mediana CC_1 pentru a fi concurente trebue să satisfacă relația:

$$(1) \qquad \frac{AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1}{B_1C \cdot A_1B \cdot C_1A} = 1.$$

Dar:

$$BC_1 = C_1A \; ; \; \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{c}{a} \; ; \; CA_1 = b \cdot \cos C \; ; \; A_1B = c \cdot \cos B$$

așa că relația (1) devine:

$$\frac{b \cdot \cos C}{c \cdot \cos B} = 1$$

adică: proiecția laturei AC pe BC este egală cu proiecția laturei BC pe AB.

Insă cum

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}$$

avem

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin A}{\cos C} \cdot$$

Pe această cale, putem imagina o clasă întreagă de triunghiuri speciale analoage, în care să fie concurente:

1°. O înălțime, o bisectoare și o mediatoare.

In acest caz unghiul din care pleacă bisectoarea are 60°.

2°. O înălțime, o mediană și o mediatoare (înălțimea pleacă din A, mediana din B iar mediatoarea cade pe AB). Unghiurile triunghiului sunt legate în acest caz prin relația:

$$\frac{2\cos^2 B}{\cos 2B} = -\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} \cdot$$

De observat că din pricina mediatoarei care nu depinde de vârf, relaţia nu cuprinde decât două unghiuri.

3°. Mediana din A, bisectoarea din B şi mediatoarea ce cade pe AB fiind concurente, între elementele triunghiului găsim relaţia:

$$2c^2 - b^2 = 2a^2 \cos B.$$

4°. Inălţimea din A, bisectoarea din B şi simediana din C:

$$2 \sin A \cos C = \sin 2B.$$

5°. Inălţimea din A, mediana din B şi simediana din C:

$$2 \sin^2 A = \sin 2B \cdot \operatorname{tg} C.$$

6°. Mediana din A, bisectoarea din B şi simediana din C:

$$b^2 = ac.$$

Natural, fiecare din cele şapte triunghiuri speciale arătate şi se mai pot găsi multe altele pe aceeaşi cale, se bucură de anumite proprietăţi.

VIRGIL METEA
Student Politechnică.

54. *Asupra problemei 4709, pag. 648, Vol. XLI şi pag. 215, 570, Vol. XLIII.* I. Dacă (ABCD) e o diviziune armonică şi O mijlocul lui AB avem relaţiile:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{BD}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AC}^2}$$

(culegere de probleme de geometetrie de G. ŢIŢEICA, XII. 4). Aşa dar, la problema 4709, avem:

$$\frac{\overline{L''B}}{\overline{L''C}} = \frac{n^2}{p^2}, \quad \frac{\overline{M''C}}{\overline{M''A}} = \frac{p^2}{m^2}, \quad \frac{\overline{N''A}}{\overline{N''B}} = \frac{m^2}{n^2}$$

care arată că centrele L", M", N" cunt colineare. Cercurile L", M", N" fiind ortogonale cercului ABC, axele lor radicale trebue să treacă prin centrul O al acestui cerc, deci aceste axe se confundă. Această demonstraţie nu presupune existenţa punctelor de intersecţie D şi E ale cercurilor.

II. A doua parte a problemei revine la a găsi condiţia necesară şi suficientă pentru ca să existe un punct ale cărui distanţe la cele trei vârfuri ale lui ABC să fie proporţionale cu m, n, p.

Fie D un punct, a, b, c laturile triunghiului ABC, $DA = x$, $DB = y$, $DC = z$ şi A_1 simetricul lui A faţă de BC. Rotind triunghiul ADB în jurul lui B până ce A vine în A_1 (deci de un unghiu egal cu $2\hat{B}$), D va veni în D''; rotind deasemenea ADC în jurul lui C până când A va veni în A_1 (deci de unghiul $2\hat{C}$), D va veni în D'. Obţinem triunghiul DD'D'' pe laturile căruia sunt construite triunghiurile isoscele D''BD, DCD', D'A_1D'' cu unghiurile dela vârfuri egale cu $2\hat{B}$ (sau $360^0 - 2\hat{B}$), $2\hat{C}$ (sau $360^0 - 2\hat{C}$), $2\hat{A}$ (sau $360^0 - 2\hat{A}$), deci asemenea cu triunghiurile COA, AOB, BOC, O fiind centrul cercului ABC. Vom avea:

$$D'D'' = \frac{a \cdot x}{R} \quad , \quad D''D = \frac{b \cdot y}{R} \quad , \quad DD' = \frac{c \cdot z}{R}$$

unde R este raza cercului ABC.

Aşa dar există un triunghiu cu laturile am, bn, cp, m, n, p fiind trei numere proporţionale cu x, y, z.

Observări. 1. Proectând pe D în α, β, γ pe BC, CA, AB, laturile triunghiului $\alpha\beta\gamma$ sunt cât jumătate din ale lui DD'D'' cum se poate vedea unind mijloacele segmentelor PA, PB, PC cu β, γ; γ, α; α, β.

2. Dacă ABC este echilateral se obţine o teoremă cunoscută a D-lui POMPEIU.

III. Invers, să presupunem că există un triunghiu MNP de laturi am, bn, cp; să mai presupunem că unghiurile $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ sunt ascuţite iar $\hat{M}$, $\hat{N}$, $\hat{P}$ mai mici decât $180^0 - \hat{A}$, $180^0 - \hat{B}$, $180^0 - \hat{C}$. Construind pe laturile lui MNP, în afară, triunghiurile isoscele MP'N, NM'P, PN'M cu unghiurile dela vârfuri egale cu $2\hat{C}$, $2\hat{A}$, $2\hat{B}$ se obţine un exagon convex MP'NM'PN' în care

$$P'M = P'N = p \cdot R, \; M'N = M'P = m \cdot R, \; N'P = N'M = n \cdot R,$$

$$\hat{M}' + \hat{N}' + \hat{P}' = 360^0 \text{ şi deci } \hat{M} + \hat{N} + \hat{P} = 360^0.$$

Rotind triunghiul P'NM' în jurul lui P' până ce N vine în M (deci de unghiul $\hat{P}' = 2\hat{C}$), M' va veni în M_1 iar în jurul lui M sunt adunate unghiurile $\hat{M}$, $\hat{N}$, $\hat{P}$ ale exagonului; atunci, rotind M'PN' în jurul lui N' până ce P va veni în M (deci de unghiul $N' = 2\hat{B}$), M' va veni în M_1. Triunghiul format M_1N'P' este egal

cu M'N'P', unghiurile lor din N' vor fi egale, deci fiecare egal cu $\hat{B}$, deasemenea unghiurile din P' vor fi egale cu $\hat{C}$. Aşa dar triunghiul $M_1N'P'$ este asemenea cu ABC şi distanţele MM_2, MN', MP' sunt proporţionale cu *m*, *n*, *p*.

Observări. Teorema asupra sumei unghiurilor unui poligon convex pe care am folosit-o mai sus se poate extinde şi la un poligon concav, dând o definiţie convenabilă unghiurilor sale. Atunci restricţiunile de mai sus asupra unghiurilor pot fi înlăturate:

1. Unghiurile $\hat{M}$, $\hat{N}$, $\hat{P}$ pot fi oricum (cu suma 180°).

2. Presupunând $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ ascuţite putem construi triunghiurile isoscele MP"N, NM"P, PN"M de aceeaşi parte a laturilor sale ca şi triunghiul MNP. Vom obţine triunghiurile M"N"P" (analog cu M'N'P') şi $M_2N''P''$ (analog cu $M_1N'P'$) asemenea cu ABC, distanţele MM_2, MN", MP" fiind egale cu MM_1, MN', MP' şi proporţionale cu *m*, *n*, *p*.

3. Unul din unghiurile lui ABC. fie $\hat{A}$, poate fi obtuz; atunci triunghiul isoscel construit pe NP în afară, cu unghiul dela vârf de $2\hat{A}$, va deveni un triunghiu de aceeaşi parte ca şi triunghiul MNP, cu unghiul dela vârf de $360^0 - 2\hat{A}$ şi invers.

4. In rezumat, oricare ar fi ABC de laturi *a*, *b*, *c* şi MNP de laturi *ma*, *nb*, *pc*, putem construi două triunghiuri $M_1N'P'$ şi $M_2N''P''$ asemenea cu ABC astfel ca distanţele lui M la vârfurile fiecăruia să fie proporţionale cu *m*, *n*, *p*. Dacă laturile lui MNP sunt egale cu $\frac{ma}{R}$, $\frac{nb}{R}$, $\frac{pc}{R}$, distanţele sunt chiar egale cu *m*, *n*, *p* şi avem următoarea teoremă: *a*, *b*, *c* fiind laturile triunghiului ABC şi *m*, *n*, *p* trei numere astfel ca să existe un triunghiu de laturi *ma*, *nb*, *pc*, putem construi două triunghiuri asemenea cu ABC astfel ca distanţele unui punct la vârfurile fiecăruia să fie egale cu *m*, *n*, *p*. Când ABC este echilateral se obţine reciproca teoremei D-lui POMPEIU.

In fine, construind în triunghiul ABC triunghiurile ADB, BDC, CDA şi AEB, BEC, CEA respectiv asemenea cu M_1MN', $N'MP'$, $P'MM_1$ şi M_2MN'', etc. distanţele punctelor D şi E la vârfuri vor fi proporţionale cu *m*, *n*, *p*.

RĂDUCAN GEORGESCU.

BIBLIOGRAFIE

Boletin Matematico. Anul XIV. Nr. 2. Martie 1941. Buenos Aires.

Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine. Tomul XXIII. Nr. 7. Bucureşti 1941.

Idem. Nr. 8. Sur la théorie du photon, de VALERIU NOVACU. Sur la représentation des groupes abéliens infinis I, de GR. C. MOISIL.

Idem. Nr. 9. Sur le mouvement tautochrone plan, de M. GHERMĂNESCU. Sur certains mouvements ayant de trajectoires planes, de V. VÂLCOVICI.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXVII. Nr. 2—3. Aprilie-Septemvrie 1941. Iaşi. Ce este algebra logicei ? de GR. C. MOISIL.

Pozitiva. Anul I. Nr. 9—10. Mai-Iunie 1941. Bucureşti. Notă asupra curbelor osculatoare staţionare de P. SERGESCU. Asupra unor relaţiuni metrice, de C. COŞNIŢĂ. Asupra triunghiurilor podare şi unor cercuri ataşate unui triunghiu, de A. DOBRESCU.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXI. Nr. 4. Iunie 1941. Asupra deplasării elicoidale, de N. ABRAMESCU.

Revista Matematica Hispano-Americana. Tomul I. Seria 4. Nr. 1, Madrid 1941. Geometria ecuaţiilor diferenţiale de ordinul al treilea, de E. CARTAN. Stabilirea legii normale de probabilitate dependinte de două variabile aleatorii, de J. M. ORTS. Asupra teoremei fundamentale a geometriei proiective, de G. ANCOCHEA. Asupra mediilor, de LINÉS ESCARDOS.

D-RA F. BRĂTILĂ şi P. SERGESCU. *Combinări generalizate* (extras din Revista Matematică din Timişoara. Anul XXI. Nr. 2). Timişoara 1941.

CERERI

303. In anul 1892 am redijat şi litografiat cursul de Mecanică raţională pe care-l preda Profesorul GHEORGHE KIRILOV în Anul II al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. Cu acea ocazie am adăogat la fine şi câteva noţiuni sumare de *Calculul Variaţiunilor*. S'a mai publicat în româneşte ceva despre acel Calcul mai înainte ?

I. IONESCU.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

PAUL MANSION. Sur les recherches de LAPLACE relatives à la théorie des erreurs. Bruxelles, 1913.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

T. NEUBERG. Sur une transformation par affinité. Bruxelles, 1913.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

T. LEVI CIVITA e UGO AMALDI. Lezioni di Meccanica Razionale. Vol. I, II. Bologna.

A. G. WEBSTER. The Dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies Leipzig. B. G. Teubner 1925.

EDM. BOUR. Cours de Mécanique et Machines. Paris 1865.

M. G. LAMÉ. Leçons sur la théorie des corps solides. Paris 1852.

TH. CARONNET. Problèmes de Mécanique. Paris 1921.

H. BEGHIN et G. JULIA. Exercices de Mécanique. Paris 1930.

P. AUBERT. & G. PAPELIER. Exercices de Mécanique. Paris 1920.

P. M. JULLIÉN. Problèmes de Mécanique Rationnelle. Paris 1867.

N. CIORĂNESCU. Ecuaţiile Mecanicei Analitice. Bucureşti 1938.

FLORICA MARG. CARACUDOVICI. Aplicaţiile Geometrice ale Calculului vectorial. Arad. 1940.

MATHESIS. Tome XLVIII an. 1934. Nr. 1—10. Gembloux-Paris 1934.

H. LAURENT. La théorie des nombres.

P. BARBARIN. La géometrie non euclidienne.

G. LECHALAS. Introduction a la géometrie générale.

F. J. Eléments de Trigonometrie. Tours-Paris.

R. BRICARD. Le calcul vectoriel. Paris 1937.

P. B. FISCHER. Determinanten. Berlin 1928.

DR. H. TIMERDING. Aufgabensammlung zur Projektiven Geometrie Berlin 1933.

DR. G. HOHEISEL. Partielle Differentialgleichungen. Berlin 1928.

DR. G. HOHEISEL. Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Berlin 1933.

DR. HELMUT HASSE. Höhere Algebra. Berlin 1926.

DR. K. KNOPP. Funktionentheorie. Berlin 1930. Part. I, II.

PROF. DR. GERHARD HESSENBERG. Ebene und sphätische Trigonometrie.

PROF. DR. GH. HOHEISEL. Gewöhnliche Differentialgleichung. Berlin 1930.

Donate de familia decedatei PREDUŢA D. BUNGEŢIANU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2353. *Să se determine condiţiunea de echilibru a unei oglinzi sau a unui tablou suspendat, prin intermediul unei sfori, de un perete vertical, aşa după cum se obişnueşte pentru a se da oglinzii sau tabloului o poziţiune înclinată.*

Tabloul este încadrat cu un cadru dreptunghiular ABCD, *laturile* AB *şi* CD *sunt orizontale,* CD *atinge de perete. Mijlocul sfoarei este legat de un cuiu înfipt în perete, iar cele 2 extremităţi ale sfoarei sunt legate de capetele a 2 cuie, înfipte simetric în dosul laturilor înclinate* AD *şi* BC *ale cadrului.*

Se vor neglija frecările.

Să se arate în ce caz se poate determina geometriceşte poziţiunea de echilibru şi să se determine această poziţiune şi tensiunea sfoarei.

Mişcându-se latura CD *dealungul zidului în sens vertical, să se determine tangenta la curba descrisă de centrul de gravitate al tabloului, în punctul corespunzând echilibrului, şi să se dea explicaţiunea mecanică a direcţiunii tangentei în acest punct.*

N. V. K.

Forţele care acţionează oglinda sau tabloul sunt greutatea

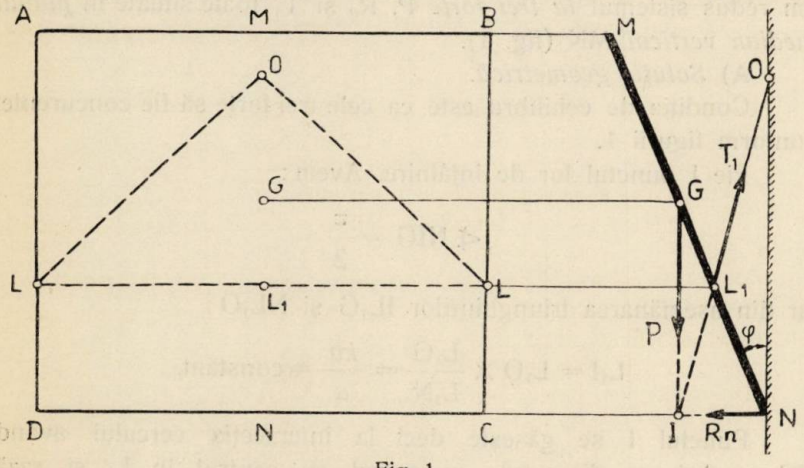


Fig. 1.

sa P aplicată în centrul de greutate G, reacţiunea R_n a zidului şi tensiunile T în fire, tensiuni egale din motive de simetrie.

Să notăm: l = lungimea comună a firelor

$$AB = CD = 2d \quad , \quad a = LC = LD = L_1N$$

$$b = L_1G \quad , \quad k = L_1O = \sqrt{l^2 - d^2} \quad , \quad \sphericalangle MNO = \varphi.$$

Rezultanta celor două tensiuni T este T_1 îndreptată după L_1O şi are valoarea:

$$T_1 = T \sin\alpha = 2T\frac{k}{l} = 2\Gamma\frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{l}. \qquad (\alpha)$$

(A se vedea fig. 2).

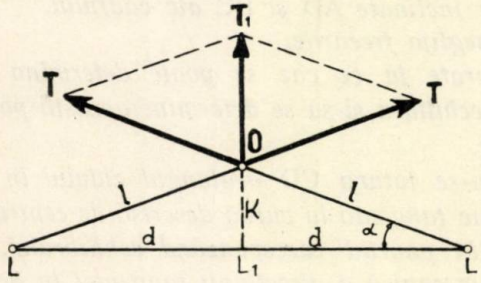


Fig. 2.

Inlocuind tensiunile T prin rezultanta lor T_1 observăm că am redus sistemul *la trei forţe* P, R_n şi T_1 toate situate în *planul median vertical* MN (fig. 1).

A) *Soluţie geometrică.*

Condiţia de echilibru este ca cele trei forţe să fie concurente, conform figurii 1.

Fie I punctul lor de întâlnire. Avem:

$$\sphericalangle NIG = \frac{\pi}{2}$$

iar din asemănarea triunghiurilor IL_1G şi NL_1O:

$$L_1I = L_1O \times \frac{L_1G}{L_1N} = \frac{kb}{a} = \text{constant}.$$

Punctul I se găseşte deci la intersecţia cercului având $NC = a + b$ ca diametru, cu cercul cu centrul în L_1 şi rază $L_1I = \frac{kb}{a}$.

Odată I astfel determinat, se unește I cu L_1, se duce paralela NO la IG și se obține punctul O la intersecția acestor două drepte. Poziția de echilibru este acum perfect determinată (fig. 3).

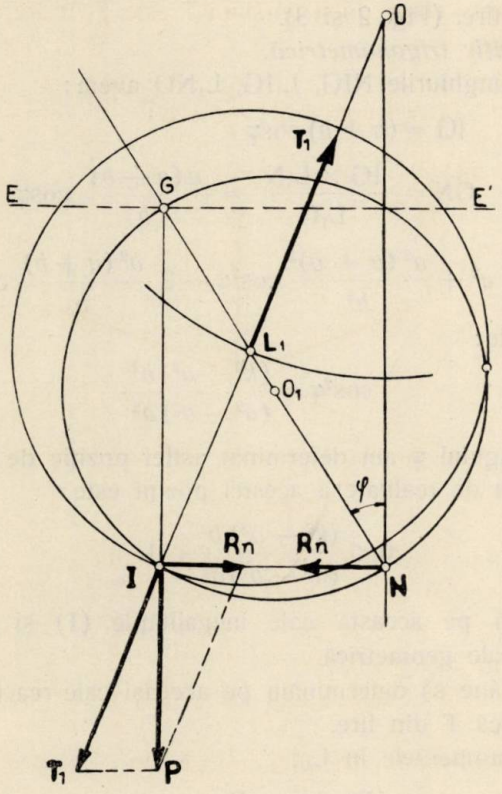


Fig. 3.

Condiția ca problema să fie posibilă este ca intersecțiile dintre cele două cercuri să fie reale. Distingem două cazuri care îndeplinesc această condiție :

(1) $$b > \frac{kb}{a} > a$$

(2) $$a > \frac{kb}{a} > b.$$

Pentru determinarea pe cale geometrică a reacţiunii R_n şi a tensiunii în fire T, se descompune greutatea P după direcţiile IN şi IO obţinându-se astfel R_n şi T_1. Descompunând la rândul său pe T_1 în două componente după direcţiile firelor se obţine tensiunea T în fire. (Fig. 2 şi 3).

B) *Soluţie trigonometrică.*

Din triunghiurile NIG, L_1IG, L_1NO avem:

$$IG = (a + b)\cos\varphi$$

$$ON = \frac{IG \times L_1N}{L_1G} = \frac{a(a+b)}{b}\cos\varphi$$

$$k^2 = a^2 + \frac{a^2(a+b)^2}{b^2}\cos^2\varphi - 2\frac{a^2(a+b)}{b}\cos^2\varphi$$

De unde:

$$\cos^2\varphi = \frac{(k^2 - a^2)b^2}{(a^2 - b^2)a^2}. \qquad (\beta)$$

Prin unghiul φ am determinat astfel poziţie de echilibru.

Condiţia de realitate a acestei poziţii este:

$$0 < \frac{(k^2 - a^2)b^2}{(a^2 - b^2)a^2} < 1.$$

Regăsim pe această cale inegalităţile (1) şi (2) obţinute anterior pe cale geometrică.

Ne rămâne să determinăm pe aceeaşi cale reacţiunea zidului R_n şi tensiunea T din fire.

Avem momentele în L_1:

$$Pb\sin\varphi = R_n\, a\cos\varphi$$

$$R_n = P\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi.$$

Dar forţele P şi R_n fiind perpendiculare una pe alta:

$$T_1 = \sqrt{P^2 + R_n^2} = P\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}^2\varphi}$$

şi ţinând seama de relaţia (α):

$$T = T_1\frac{l}{2k} = P\frac{l}{2k}\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}^2\varphi}$$

Din (β) obţinem:

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{a^4 - k^2 b^2}{(k^2 - a^2) b^2}}.$$

Introducând această valoare în egalităţile precedente căpătăm în definitiv:

$$R_n = P \sqrt{\frac{a^4 - k^2 b^2}{(k^2 - a^2) a^2}} \quad ; \quad T_1 = P \frac{k}{a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{k^2 - a^2}}$$

$$T = P \frac{l}{2a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{k^2 - a^2}}.$$

Pentru construirea tangentei cerute în enunţ observăm că dreapta MN în planul său vertical *are o mişcare plană. Se ştie că într'o astfel de mişcare, normalele la toate traiectoriile punctelor, la un moment dat, trec printr'un acelaşi punct denumit centrul instantaneu de rotaţie.*

Punctul N descriind verticala NO, normala la traiectorie va fi orizontala NI.

Punctul L_1 descriind un cerc cu centrul în O, normala la traiectorie va fi raza OI.

Rezultă că I, intersecţia acestor două normale, este centrul instantaneu de rotaţie.

Prin urmare GI este normală la curba descrisă de G, iar GE perpendiculară pe GI tangenta căutată.

Construcţia este valabilă pentru toate poziţiile lui G *compatibile cu legăturile.*

Pentru *poziţia de echilibru* GE este o orizontală (fig. 3).

Rezultatul este evident conform principiului lui TORICELI: *pentru starea de echilibru, cota centrului de greutate poate fi cea mai de sus sau cea mai de jos pe care o permite legăturile sistemului.*

Tangenta în acest punct este prin urmare orizontală.

Notă. Un caz foarte interesant pentru problemă este cazul $a = b = k$. *Echilibrul oglinzii este atunci indiferent* având loc pentru toate poziţiile compatibile cu legăturile sale.

Pentru toate aceste poziţii:

$$R_n = P \quad ; \quad T_1 = P\sqrt{2} \quad ; \quad T = \frac{P\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{l}{a}.$$

Problema a fost rezolvată, în anul propunerii ei, de N. ŢUHAI.

ALEXANDRU STOENESCU.

PROBLEMA 4052. *Să se rezolve în numere întregi ecuaţia:*

$$x^3 + y^3 + z^3 = txyz.$$

I. IONESCU.

Rezumat după soluţia D-lui I. B. FLORESCU.

Studiul acestei chestiuni a fost făcut de mulţi cercetători ai Teoriei Numerelor, fără însă a se ajunge la soluţia ei generală. O documentată bibliografie asupra ei se găseşte în cartea lui T. NAGEL, *„Analyse indéterminée d'un degré supérieur au 2-e"* publicată în colecţia de memoriale ştiinţifice a librăriei Gauthier-Villars.

In cele ce urmează voiu da două metode pentru găsirea soluţiilor ecuaţiei:

I. Ecuaţia fiind omogenă în raport cu x, y, z, să o împărţim cu z şi să punem:

$$X = x/z \quad , \quad Y = y/z, \tag{1}$$

şi găsim:

$$X^3 + Y^3 + 1 = tXY. \tag{2}$$

Ecuaţia (2) reprezintă o *cubică* care, pentru orice t trece prin punctul $X = 0$, $Y = -1$. Intersecţiile acestei cubice cu o secantă dusă prin acel punct raţional (punct cu coordonate raţionale) sunt, sau două puncte iraţionale, sau ambele cu coordonate raţionale, conform unei teoreme a lui LUCAS: *„Secanta care trece prin două puncte raţionale ale unei cubice intersectează cubica în un al treilea punct deasemenea raţional".*

Ducem prin punctul $X = 0$, $Y = -1$ secanta:

$$Y + 1 = uX, \tag{3}$$

unde u este un număr raţional. Valoarea lui Y scoasă de aci o introducem în (2) şi găsim soluţia banală $X = 0$, dela care am plecat, şi ecuaţia:

$$(u^3 + 1)X^2 - u(3u + t)X + (3u + t) = 0, \tag{4}$$

care ne dă:

$$X = [u(3u + t) \pm \sqrt{u^2(3u + t)^2 - 4(u^3 + 1)(3u + t)}]/2(u^3 + 1). \tag{5}$$

Pentru ca X să fie raţional trebue să avem:

$$u^2(3u + t)^2 - 4(u^3 + 1)(3u + t) = v^2,$$

$$\therefore \quad -3u^4 + 2tu^3 + t^2u^2 - 12u - 4t = v^2, \tag{6}$$

ecuaţie de forma generală:

$$aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = Z^2, \tag{7}$$

ale cărei soluţii se găsesc prin o metodă datorită lui FERMAT, care în rezumat este următoarea (vezi ROBERT D. CARMICHAEL: „*Analyse indéterminée. Les presses universitaires de France*").

Identificăm ecuaţiile (6) şi (7), punând

$$e = \alpha^2, \quad \text{şi} \quad Z^2 = m^2X^4 + 2mnX^3 + (n^2 + 2m\alpha)X^2 + 2n\alpha X + \alpha^2 \tag{8}$$

$$\therefore \quad n = d/2\alpha \quad , \quad m = (c/2\alpha) - (d^2/8\alpha^3), \tag{9}$$

şi rămâne:

$$aX^4 = bX^3 = m^2X^4 + 2mnX^3, \tag{10}$$

ecuaţie verificată de:

$$X = (b - 2mn)/(m^2 - a). \tag{11}$$

Pe lângă soluţia banală $X = 0$, $Z = e$, mai avem aci o soluţie unică.

Orice ecuaţie de forma (7) poate fi adusă la cazul particular studiat mai sus, dacă cunoaştem o soluţie $X = k$, $Z = p$. Inlocuim pe X cu $(t + k)$ şi găsim o ecuaţie de aceeaşi formă cu (7) în care termenul liber este de astă dată p^2 şi deci nouei ecuaţii în Z şi t i se poate aplica metoda expusă mai sus. Soluţia găsită poate servi ca punct de plecare, şi deci cu ajutorul ei obţinem o alta şi aşa mai departe.

Vom aplica cele spuse, la ecuaţia (6) pentru câteva valori particulare ale lui t.

Fie $t = -\alpha^2$. Ecuaţia devine:

$$-3u^4 - 2\alpha^2u^3 + \alpha^4u^2 - 12u + 4\alpha^2 = v^2. \tag{12}$$

Punem:

$$v = mu^2 + nu + 2\alpha$$

şi obţinem:

$$n = -12/4\alpha = -3/\alpha \quad , \quad m = (\alpha^4/4\alpha) - (144/64\alpha^2). \tag{13}$$

Cu aceasta găsim:

$$u = -8\alpha^2/(\alpha^6 + 3) \quad , \quad v = 2\alpha(\alpha^6 - 1)(\alpha^6 + 27)/(\alpha^6 + 3)^2,$$

care duc la soluţiile:

$$X = \pm\alpha(\alpha^6 + 3)/(\alpha \pm 4\alpha^3 - 1) \quad , \quad Y = -(\alpha^6 \mp 4\alpha^3 - 1)(\alpha^6 \pm 4\alpha^3 - 1),$$

care ne dau următoarele soluții ale ecuației propuse:

$$x = \alpha(\alpha^6 + 3) \quad , \quad y = -(\alpha^6 + 4\alpha^3 - 1) \quad , \quad z = \alpha^6 - 4\alpha^3 - 1,$$

$$x = \alpha(\alpha^6 + 3) \quad , \quad y = \quad (\alpha^6 - 4\alpha^3 - 1) \quad , \quad z = -\alpha^6 \pm 4\alpha^3 - 1).$$

Dacă x, y, z au factori comuni, îi putem suprima, căci prin aceasta nu se schimbă problema.

Ca exemplu numeric să facem $\alpha = 2$. Găsim $x = 134$, $y = -95$, $z = 31$ și $x = 134$, $y = 31$, $z = -95$.

Tot în cazul când $t = -\alpha^2$ avem și soluția banală $u = 0$, $v = \pm 2\alpha$, care conduce la $x = \pm\alpha$, $y = -1$, $z = 1$.

Să facem $t = 6$. Ecuația (6) devine:

$$-3u^4 + 12u^3 + 36u^2 - 12u - 24 = v^2,$$

care admite soluția $u = 1$, $v = 3$ cu care găsim $X = (9 \pm 3)/4$ care duce la soluțiile $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$ sau $x = 3$, $y = 1$, $z = 2$.

Conform metodei lui FERMAT, facem $u = u_1 + 1$ și găsim:

$$3u_1^4 + 54u_1^2 + 90u_1 + 9 = v^2.$$

Punem: $v = mu_1^2 + nu_1 + 3,$

Avem:

$$n = 90/6 = 15 \quad , \quad m = (54/6) - (8100/216) = -57/2,$$

care dă

$$u_1 = 1140/1087 \quad \text{și} \quad v = -14906193/1181569.$$

Deci ecuația admite și soluția

$$u = u_1 + 1 = 2227/1087 \quad , \quad v = 14906193/1181569.$$

Avem astfel:

$$X_1 = 22154637 \times 1087/12525515083 \quad \text{și}$$

$$X_2 = 7248444 \times 1087/12525515083$$

$Y_1 = 36812861516/12525515083$ și $Y_2 = 3616769705/12525515083$.

De aci deducem soluția problemei propuse:

$x = 22154637 \times 1087$, $y = 36812861516$, $z = 12525515083$

și

$x = 7248444 \times 1087$, $y = 3616769705$, $z = 12525515083.$

și cele ce se obțin din acestea prin permutări.

Deși nu avem certitudinea că prin procedeul de mai sus se poate obține soluția generală a problemei, totuși se vede că procedând din aproape în aproape se poate obține, cel puțin teoretic, o multiplă infinitate de soluții ale problemei.

In numărul viitor vom da a doua soluție.

(Va urma).

PROBLEMA 4368. *Să se verifice că*

$$(\sin^2 a + \sin^2 b)(\cos^2 a + \cos^2 b) = 1 - \cos^2(a+b)\cos^2(a-b).$$

N. N. MIHĂILEANU.

Soluțiunea I-a. Avem

$$\cos^2 a + \cos^2 b = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2a) + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2b)$$
$$= 1 + \cos(a+b)\cos(a-b)$$

$$\sin^2 a + \sin 2b = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2a) + \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2b)$$
$$= 1 - \cos(a+b)\cos(a-b)$$

de unde prin înmulțire, obținem relațiunea cerută.

Soluțiunea II-a. Fie E partea întâia. Avem

$$E = 1 - [1 - \sin^2 a - \sin^2 b]^2$$
$$= 1 - [(1 - \sin^2 a)(1 - \sin^2 b) - \sin^2 a \sin^2 b]^2$$
$$= 1 - (\cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b)^2$$
$$= 1 - (\cos a \cos b - \sin a \sin b)^2 (\cos a \cos b + \sin a \sin b)^2$$
$$= 1 - \cos^2(a+b)\cos^2(a-b).$$

Soluțiunea III-a. Fie F partea a doua. Avem

$$F = 1 - [\tfrac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b)]^2 = 1 - (\cos^2 a + \cos^2 b - 1)^2$$

$$= (\cos^2 a + \cos^2 b)(1 - \cos^2 a + 1 - \cos^2 b)$$

$$= (\sin^2 a + \sin^2 b)(\cos^2 a + \cos^2 b).$$

Au rezolvat problema. d-nii: C. ALEXE, I. ANDONIE, C. ANDREI, N. ANDRIEVICI, R. ANGHELICI, I. BADEA, N. BĂDULESCU, V. BÂRLEA, H. BODNĂRESCU, G. BOGDAN, ST. CETĂȚEANU, M. CHINTESCU, C. CRUCERU, P. DRĂGHICESCU, A. DRAGOMIR, C. EFTIMIE, V. FLORESCU, M. GANEA, O. GHEORGHIU, I. GLIGOR, M. IACOMI, F. IORGULESCU, C. JIPA, I. MĂNESCU, V. MANOLIU, R. MARTAC, G. MARTEȘ, G. MIHAIL, C. MIHĂILESCU, D. MUSCELEANU, I. NEGRESCU, C. NICOLAU, C. PANTELIMON, G. PETRESCU, S. PETRESCU, M. POPA, F. POPESCU, M. POPESCU, I. RADOSLAV, M. RUSU, I. SANDU, G. SBÂRNEA, M. STĂNCULESCU, M. ȘTEFANOVICI, M. STOENESCU, Ș. STOIANOVICI, M. TREFILOV, I. UNGUREANU, D. VĂDUVA, M. VĂDUVA, D. VASILIU, P. VERNESCU, R. VLĂDOIANU, G. VOICU, R. VOINEA, G. ZAHARIA.

PROBLEMA 4602. *Doi gimnastici de aceeași greutate* G *se atârnă de capetele unei funii trecute peste un scripete vertical de rază r, mobil în jurul centrului său. La un moment dat, ei încep să se urce respectiv cu iuțelile* v_1 *și* v_2 $(v_1 > v_2)$ *în raport cu funia. Să se arate că la această competițiune, gimnasticii nu se pot întrece unul pe altul dacă greutatea scripetelui este neglijabilă. Ce se va întâmpla însă dacă scripetele este considerat disc plin de greutate* Q? *Frecarea pe axul scripetelui și rezistența aerului se vor neglija.*

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluție dată de D-l ION I. INCULEȚ (elev-inginer al Școalei Politechnice din București).

Să notăm cu ω *iuțeala unghiulară* a scripetelui. Iuțelile *absolute* ale gimnasticilor vor fi respectiv:

$$u_1 = v_1 - \omega r$$

și

$$u_2 = v_2 + \omega r$$

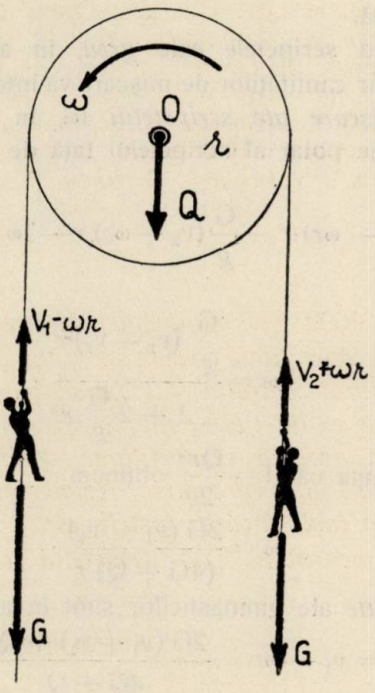
iar cantităţile lor de mişcare corespunzătoare:

$$mu_1 = \frac{G}{g}(v_1 - \omega r)$$

şi

$$mu_2 = \frac{G}{g}(v_2 + \omega r).$$

Aplicând *teorema variaţiei momentelor cantităţilor de mişcare* în raport cu axul fix O şi ţinând seama că la momentul iniţial



toate iuţelile sunt nule, avem:

$$\frac{G}{g}(v_1 - \omega r)\, r - \frac{G}{g}(v_2 + \omega r)\, r = 0.$$

Rezultă:

$$\omega = \frac{v_1 - v_2}{2r}.$$

Iuţelile *absolute* ale gimnasticilor sunt deci:

$$u_1 = v_1 - \omega r = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

$$u_2 = v_2 + \omega r = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

iar iuţeala lor *relativă* v_r:

$$v_r = u_1 - u_2 = 0.$$

Rezultă prin urmare că gimnasticii se vor găsi *în fiecare moment la acelaşi nivel deasupra solului.* Prima parte a problemei este astfel rezolvată.

In cazul când scripetele este *greu,* în aplicarea teoremei variaţiei momentelor cantităţilor de mişcare va interveni şi *momentul cantităţilor de mişcare ale scripetelui* $I\omega$, în care I reprezintă momentul de inerţie polar al scripetelui faţă de axul O.

Vom avea:

$$\frac{G}{g}(v_1 - \omega r)\, r - \frac{G}{g}(v_2 + \omega r)\, r - I\omega = 0.$$

De unde:

$$\omega = \frac{\frac{G}{g}(v_1 - v_2)\, r}{I + 2\frac{G}{g} r^2}.$$

Şi ţinând seama că $I = \frac{Qr^2}{2g}$ obţinem:

$$\omega = \frac{2G(v_1 - v_2)}{(4G + Q)\, r}.$$

Iuţelile *absolute* ale gimnasticilor sunt în acest caz:

$$u_1 = v_1 - \omega r = \frac{2G(v_1 + v_2) + Qv_1}{4G + Q}$$

$$u_2 = v_2 + \omega r = \frac{2G(v_1 + v_2) + Qv_2}{4G + Q}$$

iar iuţeala lor *relativă* v_r:

$$v_r = u_1 - u_2 = \frac{Q(v_1 - v_2)}{4G + Q} > 0.$$

Rezultă deci că în acest caz gimnasticul având iuţeala v_1 faţă de funie întrece pe cel cu iuţeala v_2.

AL. ST.

PROBLEMA 4798—4871 [1]). *Se consideră triunghiul* ABC *şi un punct* P *pe cercul circumscris. Dreapta* PA *întâlneşte înălţimile vârfurilor* B, C *în* B_a, C_a. *Analog se obţin* A_b, C_b; A_c, B_c.

Fie A′, B′, C′ *şi* A″, B″, C″ *mijloacele laturilor triunghiului* ABC *şi ale segmentelor* $C_b B_c$, $A_c C_a$, $A_b B_a$. *Să se arate că:*

1°. *Triunghiurile* A′B′C′ *şi* A″B″C″ *sunt omologice, cu centrul de omologie I pe cercul lui* EULER *al triunghiului dat;*

2°. *Cercurile* $PA_b B_a$ *şi analoagele sale au centrele pe aceeaşi dreaptă ce trece prin* I;

3°. $A_b B_a$, $A_c C_a$, $B_c C_b$ *sunt paralele;*

4°. *Triunghiul* ABC *este un triunghiu pedal al triunghiului* A″B″C″.

(Enunţ îndreptat).

LOCOT. I. GH. ZAMFIRESCU.

Soluţie dată de D-nii: MARCEL N. ROŞCULEŢ, M. AL. VASILESCU-STABU (lic. Alba-Iulia), PANTELIMON CONSTANTIN, ACHILLE PETRESCU şi MIRCEA D. POPA (lic. mil. Iaşi).

1°. Se ştie că într'un patrulater complet mijloacele diagonalelor sunt colineare, determinând dreapta lui GAUSS.

Să considerăm patrulaterul $PA_c HC_a CA$. Mijloacele diagonalelor sunt punctele: B′, B″ şi I *mijlocul lui* PH.

Deci dreapta B′B″ trece prin punctul I. In mod analog, considerând patrulaterele $PA_b HB_a AB$ şi $PCHBB_c C_b$, se arată că dreptele C′C″ şi A′A″ trec şi ele prin I.

Aşa dar triunghiurile A′B′C′ şi A″B″C″ sunt omologice; având centrul de omologie în punctul I, mijlocul segmentului PH. Se ştie însă că cercul lui EULER este omoteticul cercului circumscris faţă de centrul de omotetie H şi raportul $\frac{1}{2}$, deci punctul I se află pe cercul lui EULER.

2°. Patrulaterele $PA_c HC_a$, $PA_b HB_a$, $PHB_c C_b$ sunt inscriptibile. Intr'adevăr să luăm primul patrulater, pentru care avem:

$$\sphericalangle APC + \sphericalangle C_a HA_c = \sphericalangle ABC + \sphericalangle C_a HA_c = 180^0$$

căci patrulaterul format de două laturi AB, BC şi de înălţimile

---

1) Problema s'a publicat din eroare sub două numere.

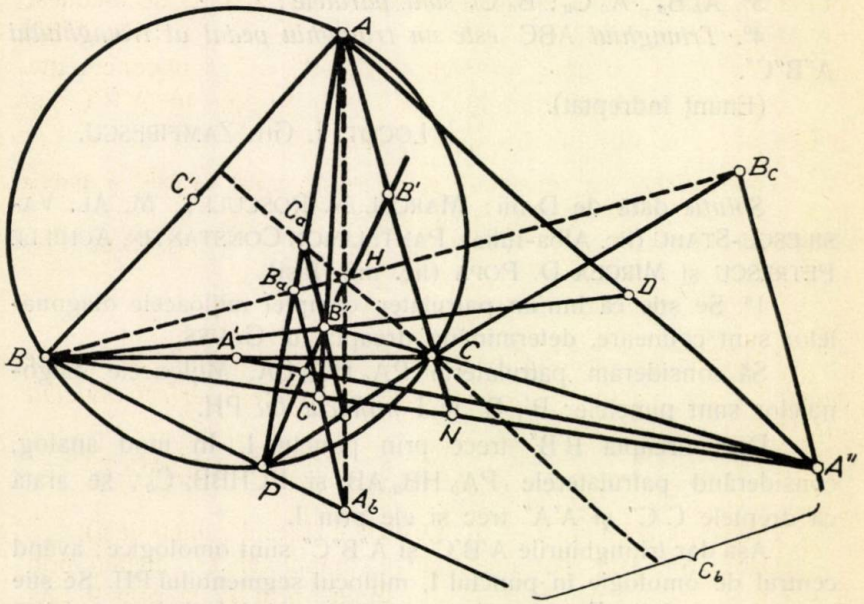
corespunzătoare e inscriptibil. La fel se arată că şi celelalte patrulatere sunt inscriptibile. Deci cercurile din enunţ trec toate prin punctele P şi H, încât au centrele pe mediatoarea segmentului PH.

3°. Din faptul că patrulaterele dela (2°) sunt inscriptibile rezultă:

$$\sphericalangle PC_a A_c = \sphericalangle PHA_c \quad ; \quad \sphericalangle PB_a A_b = \sphericalangle PHA_b$$

$$\therefore \qquad \sphericalangle PC_a A_c = \sphericalangle PB_a A_b$$

adică dreptele $A_b B_a$ şi $A_c C_a$ sunt paralele.



Apoi:

$$\sphericalangle PA_b B_a = \sphericalangle PHB_a, \quad \text{însă} \quad \sphericalangle PHB_a = \sphericalangle PC_b B_c$$

având amândouă ca suplement unghiul PHB_c, deci:

$$\sphericalangle PA_b B_a = \sphericalangle PC_b B_c$$

adică dreptele $A_b B_a$ şi $C_b B_c$ sunt paralele.

4°. Se ştie că într'un trapez dreapta ce uneşte mijloacele bazelor trece prin intersecţia laturilor neparalele şi prin intersecţia diagonalelor. De aci rezultă că punctele A, B, C se găsesc respectiv pe laturile B″C″, C″A″, A″B″. Să notăm $N \equiv (A_b B_c, B_a C_b)$. Divi-

ziunea (BNC″A″) este armonică, deoarece N şi B sunt punctele de intersecţie a diagonalelor şi a laturilor neparalele din trapezul $A_b\,C_b\,B_c\,B_a$.

De altă parte să considerăm omotetia directă ($A_b\,B_a$, $A_c\,C_a$) cu centrul în A şi omotetiile inverse ($A_c\,C_a$, $B_c\,C_b$) şi ($A_b\,B_a$, $B_c\,C_b$) cu centrele respectiv în C şi N. După o teoremă cunoscută, cele trei centre de omotetie sunt colineare. Din cele spuse mai sus rezultă că dreapta AN este polara punctului B faţă de unghiul C″AA″. Dacă D este intersecţia dreptelor AA″ şi BB″, după proprietăţile patrulaterului complet dreptele A″B″ şi C″D se întâlnesc pe AN, ceea ce arată că C″D trece prin intersecţia (AN, A″B″) adică prin C. Altfel spus, dreptele AA″, BB″, CC″ sunt concurente.

Aceasta arată că triunghiul ABC este înscris în A″B″C″ şi omologic cu el, deci un triunghiu *pedal.*

Observaţiune. Toţi rezolvitorii problemei au arătat că ABC e înscris în A″B″C″, fără a arăta că e un triunghiu pedal.

G. D. S.

PROBLEMA 4892. *Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 luate câte o singură dată, să se formeze un patrat perfect divizibil prin 77.*

V. THÉBAULT.

I. *Soluţie* dată de D-l M. D. POPA (Liceul militar Iaşi).

Dacă N^2 este patratul căutat, atunci N se divide prin $3 \times 7 \times 11 = 231$, pentrucă N^2 se divide prin 77 şi prin 9 căci suma cifrelor lui este

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45.$$

Apoi

$$123456789 \leqslant N^2 \leqslant 987654321$$

$$\therefore \quad 11111 < N < 31426.$$

Cum multiplii extremi de 231 cuprinşi între aceste limite sunt 11319 şi 31416 înseamnă că

$$11319 \leqslant N = 231 \times m \leqslant 31416$$

$$\therefore \quad 49 \leqslant m \leqslant 136.$$

Dând lui m toate valorile întregi cuprinse între aceste limite, găsim că N se găseşte printre următoarele 88 numere:

11319, 11550, 11781, 12012, 12243, 12474, 12705,
12936, 13167, 13398, 13629, 13860, 14091, 14322,
14553, 14784, 15015, 15246, 15477, 15708, 15939,
16170, 16401, 16632, 16863, 17094, 17325, 17556,
17787, 18018, 18249, 18480, 18711, 18942, 19173,
19404, 19635, 19866, 20097, 20328, 20559, 20790,
21021, 21252, 21483, 21714, 21945, 22176, 22407,
22638, 22869, 23100, 23331, 23562, 23793, 24024,
24255, 24486, 24717, 24948, 25179, 25410, 25641,
25872, 26103, 26334, 26565, 26796, 27027, 27258,
27489, 27720, 27951, 28182, 28413, 28644, 28875,
29106, 29337, 29568, 29799, 30030, 30261, 30492,
30723, 30954, 31185, 81416.

Eliminând din acest tablou numerele terminate cu 0 şi ridicând pe celelalte la patrat, găsim singura soluţie

$$29106^2 = 847159236.$$

II. *Soluţie* dată de D-l C. I. CHIRIAC.

In nota dela pag. 169 *Gazeta Matematică*, Vol. XL, D-l G-L GH. BUICLIU, a dat toate patratele perfecte care se scriu cu 9 cifre consecutive. Alegând numai pe acelea divizibile prin 77, găsim patratul dela soluţia precedentă.

Notă. 1°. Au mai rezolvat problema, găsind soluţia exactă D-nii: M. GRUMĂZESCU, TR. PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI, H. REISCHER, A. I. ROHR şi T. C. ŞTEFAN.

2°. Se poate reduce numărul ridicărilor la patrat dela soluţia I dacă se ţine seamă de corespondenţa între ultimele 3 cifre ale unui patrat perfect şi forma rădăcinii patrate, publicată sub formă de tabel în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVII, pag. 368. De exemplu, nu se vor ridica la patrat numerele 12012 şi 22638 căci fiind respectiv de formele $500n + 12$ şi $500n + 138$ patratele lor se termină în 144 şi 044, etc.

3°. Printre patratele perfecte de 10 cifre consecutive nu este niciunul divizibil prin 77.

GH. B.

PROBLEMA 4915. *Un echer de lemn având un gol triunghiular, asemenea cu conturul echerului, se așează pe un vârf de ac. In ce cazuri el poate rămâne în echilibru?*

I. IONESCU.

Vom presupune, cum se face de obiceiu, că partea de lemn are aceeași lățime α și vom cerceta când centrul de greutate al echerului se poate afla pe contur (cazul cel mai desavantajos).

Fie triunghiul dreptunghic cu vârfurile A(0, 0); B(b, 0); C(0, c). Unghiul drept este în A.

In centrul său de greutate $G\left(\frac{1}{3}b, \frac{1}{3}c\right)$ lucrează forța $F_1 = \frac{1}{2}bc$.

Fie A'B'C' triunghiul interior al echerului, ale cărui laturi sunt la depărtarea α de laturile triunghiului ABC. Coordonatele vârfurilor lui sunt:

$A'(\alpha, \alpha)$; $B'\{[bc-(a+b)\alpha]/c; \alpha\}$; $C'\{[\alpha, [bc-(a+c)\alpha]/b\}$.

Centrul său de greutate G' are coordonatele:

$$G'\{\alpha+(b/3)-(2p\alpha/3c)] \ , \ [\alpha+(c/3)-(2p\alpha/3b)]\},$$

unde $2p$ este perimetrul triunghiului ABC.

In G' lucrează o forță F_2, de sens contrar cu F_1, și anume:

$$F_2 = -\frac{1}{2}(bc-2p\alpha)^2/bc.$$

Coordonatele centrului de greutate G_2, al figurii obținute când din triunghiul ABC scoatem triunghiul A'B'C', sunt date de formulele:

$$3X = [3b^2c^2(2p-c)-12pbc(p-c)\alpha+4p^2(2p-3c)\alpha^2]/4pc(bc-p\alpha),$$
$$3Y = [3b^2c^2(2p-b)-rpbc(p-b)\alpha+4p^2(2p-3b)\alpha^2]/4pb(bc-p\alpha).$$

Pentru ca acest centru de greutate să se afle pe conturul de lemn al echerului, trebue ca:

1) $X = \alpha$, sau 2) $Y = \alpha$, sau 3) $cX + bY = bc - a\alpha$,

căci intersecțiile dreptei B'C' cu axele sunt:

$$OC'' = b - (a/\sin C) = b - (a\alpha/c), \text{ și}$$
$$OB'' = c - (\alpha/\sin B) = c - (a\alpha/b),$$

iar ecuația dreptei B'C' este $(cx+by) = (bc-a\alpha)$.

Cazul (1) dă:

$$3b^2c^2(2p-c)-12pbc(p-c)\alpha+4p^2(2p-3c)\alpha^2=12pc\alpha(bc-p\alpha)$$

adică ecuaţia:

$$8p^3\alpha^2-12p^2bc\alpha+3b^2c^2(2p-c)=0,$$

de unde:

$$\alpha=[3p\pm\sqrt{3p(2c-p)}]\times(bc)/4p^2.$$

Condiţia de posibilitate este $2c\geqslant p$, adică $3c\geqslant a+b$, sau $9(a^2-b^2)\geqslant(a+b)^2$, căci $c^2=a^2-b^2$, triunghiul ABC fiind dreptunghic. De aci deducem $9(a-b)>(a+b)$ sau $4a\geqslant 5b$ sau $b\leqslant 4a/5$ ori $b\leqslant 0{,}8a$, ceea ce dă $\sin B\leqslant 0{,}8$.

Cazul (2) dă, prin permutarea literelor b cu c:

$$\alpha=\frac{3p\pm\sqrt{3p(2b-p)}}{4p^2}bc$$

cu condiţia

$$c\leqslant 0{,}8a \quad \text{adică} \quad \sin C\leqslant 0{,}8$$

de unde:

$$\alpha=[3p\pm\sqrt{3p(3p-2b-2c)}]\,bc/4p^2,$$

care este posibil totdeauna, căci $3p>2b+2c$. In adevăr, putem scrie succesiv: $6p>4b+4c$, sau $(3a+3b+3c)>4b+4c$ sau $3a>b+c$, de unde $\sin B+\sin C<3$.

Este interesant de aflat locul geometric al centrului de greutate G″ al echerului când α variază. Pentru aceasta eliminăm pe α din ecuaţiile care ne dau pe X şi Y. Aceste ecuaţii ordonate după puterile lui α se scriu:

$$4p^2(2p-3c)\alpha^2+12pc(pX-bp+bc)\alpha+3bc^2(2bp-bc-4pX)=0,$$

$$4p^2(2p-3b)\alpha^2+12pb(pY-cp+bc)\alpha+3b^2c(2cp-bc-4pY)=0.$$

Formăm eliminantul acestor două ecuaţii de gradul II în α, simplificăm şi găsim ecuaţia în X şi Y:

$$c(2p-3b)X-b(2p-3c)Y+bc(b-c)=0,$$

care reprezintă o linie dreaptă. Ea trece prin centrul de greutate G al triunghiului ABC, cazul echerului fără goluri. Dreapta trece şi prin punctul $(bc/2p,\ bc/2p)$, care este centrul I al cercului înscris în triunghiul ABC.

Când $\alpha = 0$, obținem $X = b(2p - c)4p$, $Y = c(2p - b)/4p$, care sunt coordonatele centrului de greutate al perimetrului triunghiului ABC, adică centrul cercului înscris în triunghiul median. Acesta este cazul când echerul s'ar face din un fir foarte subțire.

Din cele expuse se verifică proprietatea cunoscută că centrul de greutate al perimetrului e pe linia GI.

PROBLEMA 5102. *Un avion* A_1 *sboară orizontal cu viteza 324 km/oră, într'o direcție dată, la înălțimea de 4000 m. De pe acest avion se trage cu un tun într'un alt avion* A_2, *care sboară orizontal cu viteza 360 km/oră, într'o direcție perpendiculară direcției de sbor a avionului* A_1 *și la înălțimea de 3000 m. Cum ar trebui îndreptată țeava tunului de pe avionul* A_1, *pentru ca proiectilul să ajungă în* A_2, *știind că:*

— *Viteza inițială a proiectilului este 1000 m/sec.*

— *Distanța (apreciată) dela* A_1 *la* A_2 *este 1000 m.*

— *In momentul tragerii, ambele avioane sunt în același plan vertical.*

— *Rezistența aerului întâmpinată de proiectil este presupusă nulă.*

CPT. C-DOR I. LINTEȘ.

Fie în general v_1 și z_1 viteza și altitudinea avionului A_1 și v_2, z_2 a avionului A_2, atunci dacă există un $x \neq 0$ avem:

— Unghiul de tragere dat de ecuația:

$$(1) \quad (z_1 - z_2) = -x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2(v_0 \pm v_1 \cos\alpha)^2 \cos^2\alpha}$$

unde v_0 este viteza inițială a proiectilului; iar

— Unghiul de direcție laterală este dat de ecuația:

$$(2) \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{v_2 \cdot t}{\sqrt{x^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

unde:

$$(3) \quad t = \frac{x}{(v_0 \pm v_1 \cos\alpha) \cdot \cos\alpha}.$$

Semnul (+) se ia când proiectilul este asvârlit în sensul de mers al avionului și (—) în sens invers.

In cazul problemei 5102 avem însă $x = 0$ în consecinţă ţeava va fi îndreptată în jos, făcând cu verticala un unghiu α' dat de relaţia:

$$(4) \qquad \operatorname{tg}\alpha' = \frac{v_1 \cdot t}{z_1 - z_2}$$

iar t se calculează din relaţia:

$$(5) \qquad z_1 - z_2 = (v_0 - v_1 \sin\alpha')\, t + \frac{1}{2} g t^2.$$

Lateral ţeava tunului va fi îndreptată în sensul de unde vine avionul A_2, făcând cu verticala un unghiu α, dat de relaţia:

$$(6) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{v_2 \cdot t}{z_1 - z_2}.$$

In cazul numeric al problemei 5102 avem:

$$(7) \qquad \operatorname{tg}\alpha' = \frac{v_1}{z_1 - z_2}\left[-\frac{(v_0 - v_1 \sin\alpha')}{g} + \sqrt{\frac{(v_0 - v_1 \sin\alpha')^2}{g^2} + \frac{2(z_1 - z_2)}{g}}\right]$$

unde

$$v_0 = 1000 \text{ m/sec.} \quad ; \quad v_1 = 90 \text{ m/sec.}$$

şi

$$z_1 - z_2 = 1000 \text{ m.}$$

Pentru simplitate vom admite în prima aproximaţie, în membrul al doilea, $\alpha' = 0$, atunci avem $\alpha_1' = 5^0\,8'$. Introducând apoi această valoare, pentru o a doua aproximaţie, la care mă opresc, obţin $\alpha' = 3^0\,40'$.

Deasemenea durata (calculată la riglă) este: $t = 0{,}72$ secunde. Atunci unghiul $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}072$ adică: $\alpha = 4^0\,8'$.

Au trimis soluţiuni însă cu oarecare erori D-nii: C. D. EFTIMIE, T. A. ŞERBAN şi P. I. TROFIN.

I. L.

PROBLEMA 5156. *Fiind date în plan: un cerc* (O) *şi punctele* A, B, C, D; *să se determine două cercuri trecând respectiv prin* A, B *şi* C, D *astfel ca intersecţiile lor să fie două puncte* M, N *pe cercul* (O).

ADRIAN GHEORGHIU.

Soluţie dată de D-nii ORIGEN MĂRCULESCU, POPA D. MIRCEA şi POPA N. AUREL.

Un cerc oarecare dus prin A, B taie cercul (O) în α, β. Dreapta $\alpha\beta$ taie dreapta AB într'un punct P. Acest punct este *centrul radical* al tuturor cercurilor ce trece prin A, B şi al cercului (O) — sau centrul radical al reţelei de cercuri determinată de fascicolul de cercuri (A, B) şi cercul (O).

Un cerc oarecare dus prin C, D taie cercul (O) în γ, δ. Dreapta $\gamma\delta$ taie dreapta CD într'un punct Q. Acest punct este *centrul radical* al tuturor cercurilor ce trece prin C, D şi al cercului (O).

Dreapta PQ, conţinând dar, două puncte ce au *puteri egale* faţă de cercurile (A, B) şi cercul (O) şi cercurile (C, D) şi cercul (O) este *axa radicală* a unui *anumit* fascicol de cercuri ce conţine cercul (O) şi *câte un cerc* din cele două fascicole (A, B) şi (C, D). Anume: dreapta PQ taie cercul (O) în două puncte M, N reale, imaginare sau confundate astfel încât acest *anumit fascicol* de cercuri este fascicolul (M, N).

Deci cu punctele M, N constituite ca mai sus obţinem ABMN şi CDMN conciclice.

Observaţiune. Dacă M, N sunt imaginare — adică dreapta PQ nu taie cercul (O) — atunci perpendiculara din centrul cercului (O) la dreapta PQ este *axa centrelor* cercurilor fascicolului (M, N) şi intersecţiile ei cu perpendicularele la mijloacele lui AB şi CD ne dau centrele cercurilor ce trece respectiv prin A, B şi C, D şi se taie pe cercul (O) în M, N imaginare.

A. G.

PROBLEMA 5239. *In războiul Germano-Polon se spune că formaţiunile de bombardament aerian executau bombardamentul descriind, înainte de a ajunge la obiectiv, un viraj cu o viteză foarte mare, aşa încât, după aruncarea bombelor, formaţiunile ocoleau la mare depărtare punctul vizat, pentru a evita puternicele mijloace de apărare antiaeriană. Admiţând că:*

— Virajul este descris după un arc de cerc, într'un plan orizontal, raza cercului şi altitudinea fiind dat;

— Rezistenţa aerului opusă bombelor este neglijabilă;

Se cere:

1. *Depărtarea în proiecţie orizontală dela care trebuesc aruncate bombele;*

2. *Depărtarea în proiecție orizontală dintre obiectiv și traiectoria virajului;*

3. *Inclinarea laterală a avioanelor pe timpul virajului.*

Aplicație pentru cazul când altitudinea ar fi 4000 m., raza virajului 2000 m. și viteza avioanelor 360 km/oră.

CPT. COMANDOR I. LINTEȘ.

Fie O obiectivul, A avionul care bombardează, C centrul cercului virajului și B intersecția dreptei OC cu cercul virajului, adică $\overline{BO}$ este depărtarea obiectivului de traiectoria virajului.

Vom nota:

$$\overline{AO} = x \quad ; \quad \overline{AC} = \overline{BC} = r$$

x este depărtarea de aruncare a bombelor și r raza virajului.

In vid traiectoria bombei este:

$$1) \qquad z = -\frac{gx^2}{2V^2}$$

unde V este viteza avionului, presupunând că merge orizontal.

Relația dintre înclinarea avionului, raza virajului și viteza lui, este:

$$2) \qquad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{F_c}{P} = \frac{V^2}{g.r}$$

unde F_c este forța centrifugală și P greutatea avionului.

Eliminând pe V din 1) și 2), deducem:

$$3) \qquad \overline{AO} = x = \sqrt{2.r.z.\operatorname{tg}\varepsilon} = \sqrt{\frac{2V^2}{g}.z}\,.$$

Observăm apoi că:

$$\overline{OB} = \overline{OC} - \overline{BC} = \sqrt{x^2 + r^2} - r.$$

Prin urmare depărtarea dintre obiectiv și traiectorie este:

$$4) \qquad y = \overline{OB} = r.\left[\sqrt{\frac{2.z.\operatorname{tg}\varepsilon}{r} + 1} - 1\right]$$

$$= \frac{V^2}{g.\operatorname{tg}\varepsilon} \cdot \left[\sqrt{\frac{2g.\operatorname{tg}^2\varepsilon}{V^2}.z + 1} - 1\right].$$

In cazul aplicaţiunii, avem:

$z = 4000$ m. ; $p = 2000$ m. ; $V = 100$ m/sec.

Prin urmare vom obţine:

1. Depărtarea în proiecţie orizontală dela cari trebuesc aruncate bombele:

$$\overline{OA} = x = \sqrt{\frac{2.100^2}{9{,}81} . 4000} = 2855 \text{ m.}$$

2. Depărtarea în proiecţie orizontală dintre obiectiv şi traiectoria virajului:

$$\overline{OB} = y = \sqrt{2855^2 + 2000^2} = 1473 \text{ m.}$$

3. Inclinarea laterală a avionului pe timpul virajului:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{100^2}{9{,}81 . 2000} = \frac{5}{9{,}81}$$

de unde:

$$\varepsilon = 27^0 25''.$$

Au rezolvat problema D-nii: EM. S. MODÂLCĂ (student-inginer, Bucureşti), MIRCEA D. POPA (cl. VIII Lc. Militar-Iaşi) şi C. D. EFTIMIE.

PROBLEMA 5263. *Să se determine* y *pentru ca ecuaţiile*

$$x^6 + x^5 + (1 - 3a)x^4 + (1 - 2a)x^3 + (3a^2 - 3a + 1)x^2 + (a - 1)^2 x - a(a - 1)^2 + 1 = 0$$

$$x^4 - (2a - 1)x^2 + x + a^2 - 2a - y = 0$$

să aibă trei rădăcini comune. Cum trebue ales a *ca ecuaţie algebrică de gradul al treilea, care admite aceste rădăcini, să aibă coeficienţi raţionali?*

TH. ANGHELUŢĂ.

Au rezolvat problema D-nii: CONST. PANTELIMON (cl. VIII-a, Lic. mil. Iaşi), MIRCEA L. RUSU (student, Cluj) şi IONEL STAMATE (student, Fac. şt. Timişoara).

Notăm primele părţi ale ecuaţiilor date respectiv cu $P(x)$ şi $P_1(x)$. Algoritmul lui EUCLID pentru căutarea c. m. m. d. c. al polinoamelor $P(x)$ şi $P_1(x)$ dă identităţile

$$P(x) = (x^2 + x - a)P_1(x) - R(x)$$

$$P_1(x) = xR(x) + R_1(x)$$

unde

$$R(x) = x^3 - yx^2 - (a + y + 1)x + ay + a - 1$$

$$R_1(x) = yx^3 + (-a + y + 2)x^2 + (-ay - a + 2)x + a^2 - 2a - y.$$

Din enunț rezultă că $R_1(x)$ este c. m. m. d. c. al polinoamelor $P(x)$ și $P_1(x)$. Prin urmare $R_1(x)$ divide pe $R(x)$, deci coeficienții acestor polinoame sunt proporționali, căci ele au același grad

$$\frac{1}{y} = \frac{-y}{-a+y+2} = \frac{a+y+1}{ay+a-2} = \frac{ay+a-1}{a^2-2a-y}$$

aceste rapoarte revin numai la condiția

$$y^2+y-a+2=0$$

sau

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-7}}{2}.$$

Pentru ca ecuația $R(x)=0$ să aibă coeficienții raționali trebue să avem

$$a = \frac{k^2+7}{4}$$

unde k este un număr rațional oarecare.

Observare. Restul împărțirii polinomului $R_1(x)$ prin $R(x)$ este

$$(x^2+x-a)(y^2+y-a+2).$$

De aici rezultă ecuația în y de mai sus [1]).

PROBLEMA 5356. *Se dă un cerc* O *și fie* P *un punct fix în planul său. Dacă* M *este un punct mobil pe cerc, să se găsească înfășurătoarea perpendicularei duse la mijlocul segmentului* PM.

LT. I. NICOLAU.

Soluție. Fie N mijlocul segmentului PM. Punctul M descriind cercul O, punctul N descrie un cerc O′ cu centrul în mijlocul segmentului OP și de rază jumătate din raza cercului O — adică un cerc omotetic celui dat față de P și în raportul $^1/_2$.

Avem deci un unghiu drept al cărui vârf N descrie cercul O′ iar una din laturi trece printr'un punct fix P. *Se știe că în acest caz cealaltă latură înfășoară o elipsă sau o hiperbolă,* după cum punctul P e interior sau exterior cercului O′ — deci și cercului dat, O; punctul P fiind unul din focare.

---

1) TH. ANGHELUȚĂ, Curs de Algebră Superioară (litografiat 1940, pag. 23, Exerc. 28).

Observaţiuni: 1°. Odată găsit locul geometric al lui N — cercul O' — problema este cunoscută (de ex. F. G. M.).

2°. Unghiul drept se poate înlocui cu un unghiu oarecare constant. (de ex. F. G. M.).

3°. S'a primit o soluţie geometrică interesantă bazată pe noţiunea de centru instantaneu de rotaţie al mişcării unghiului drept din condiţiile problemei dela D-l AUREL N. POPA (Lic. militar Iaşi).

4°. S'au primit soluţiuni analitice mai complicate dela D-nii: BARBU FRIDMAN-Câmpina, GHEORGHIU E. OCT. (Student Bucureşti), MIRCEA L. RUSU, MIREL D. STOENESCU (Şc. Of. Aviaţie-Buc.), MIHAI TREFILOV, MARIN F. VĂDUVA (elev inginer, Bucureşti).

A. G.

PROBLEMA 5378. *Să se găsească un număr de două cifre, după care scriindu-i inversatul, sporit cu o unitate, să se obţină un patrat perfect.*

G-L GH. BUICLIU.

Fie ab un număr de două cifre aşa încât:

$$N^2 = abba + 1 = 1001a + 110b + 1 = 11m + 1 \quad (1)$$

Cum

$$31 < N < 99 \quad (2)$$

N se va găsi între numerele (2) ale căror patrate sunt de forma (1). Căutând restul diviziunii unui număr N şi al patratului său N^2 prin 11, se găseşte că N^2 este de forma (1) numai dacă

$$N = 11n \pm 1$$

Sunt de această formă, în cadrul neegalităţilor (2), următoarele numere

32, 34, 43, 45, 54, 56, 65, 67, 76, 78, 87, 89, 98

dintre care 65 şi 76 sunt soluţii ale problemei căci

$$\boxed{65^2 = 4225} \quad \text{şi} \quad \boxed{76^2 = 5776}.$$

Dacă se consideră numere ab, formal de 2 cifre, adică pentru care $a = 0$, se mai găsesc pe aceeaşi cale, următoarele soluţii de formă

$$01^2 = 0001 \quad \text{şi} \quad 21^2 = 0441.$$

Notă. 1°. D-l ST. CETĂŢEANU (Elev inginer) a găsit soluţiile exacte examinând ecuaţia

$$abba = (B + 1)[aB^2 + (b - a)B + a] = (N + 1)(N - 1)$$

într'o bază oarecare B.

D-sa a pus şi problema inversă, căutând baza B în care numărul de 4 cifre *abba* + 1 este patrat perfect.

2°. Au rezolvat problema şi au găsit soluţiile exacte examinând terminaţiunile de 2 cifre ale patratelor perfecte, d-şoara LIDIA M. TUDORAN (Şc. Centrală de fete Bucureşti) şi d-nii C. D. EFTIMIE (Elev-inginer, Bucureşti); GH. D. SBÂRNEA (Lic. „D. A. Sturdza", Tecuciu); M. D. STOENESCU (Şc. de ofiţeri de aviaţie, Bucureşti); M. F. VĂDUVA (Politechnica, Bucureşti); P. P. DRĂGHICESCU (Lic. militar, laşi); P. F. ELIAS; E. GH. VIJELIE (Lic. Mănăstirea Dealului).

3°. Soluţii parţiale: câte 3 soluţii dela D-nii: D. D. BOIANGIU (T.-Severin); C. M. ANDREI (Student, Bucureşti); GH. R. PETRESCU (Lic. „I. Maiorescu", Giurgiu); N. N. ANDRIEVICI (Student, Politechnica laşi); D. VASILIU (Lic. militar, Timişoara), H. REISCHER (laşi).

Câte 2 soluţii, D-nii: I. ST. ANDONIE (Lic. „Sf. Sava", Bucureşti); C. C. BAKONYI (Lic. „Diaconovici Loga", Timişoara); C. C. MIHĂILESCU (Bacalaureat, Câmpina); D. MUSCELEANU, M. MUSCELEANU (Lic. Ioniţă Asan", Caracal); M. C. NICULESCU (Lic. „T. Maiorescu", Bucureşti); CICERONE IONESCU, I. I. POPESCU-GREACA, C. STAICU (Lic. militar, C.-Lung); R. P. VOINEA (Craiova); M. D. IACOMI, Z. C. IVAN (Lic. militar, laşi); NEGRESCU C. I. (Lic. „Sp. Haret" Bucureşti), P. F. IONESCU (Lic. „Carol I" Craiova).

Câte o singură soluţie, d-nii: V. G. BÂRLEA-SUHĂŢEANU (Colegiul „N. Filipescu"); V. C. ROLEA, G. D. VOICU (Şc. of. de aviaţie).

4°. Problema aceasta am propus-o sub No. 372 în *Foaia Matematică* Vol. III, unde nu i s'a publicat soluţia. După Vol. III acea revistă a încetat de a mai apărea.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5389. *Se cere locul geometric al vârfului* C *al unui triunghiu* ABC *ştiind că* A *este fix,* B *descrie o dreaptă dată, latura* $\overline{BC}$ *rămâne paralelă cu direcţia ei, iar raportul* $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ *este constant. Discuţie.*

ION COŞEREANU.

Luăm ca axe de coordonate:

$x'x \equiv$ perpendiculara dusă prin A la direcţia lui BC, fixă; $y'y \equiv$ normala la $x'x$ în punctul unde aceasta este întâlnită de dreapta (D) pe care o descrie B.

Rezultă:

$$A(-a, 0)\ ;\ (D) \equiv y = mx\ ;\ B(\lambda, m\lambda)\ ;$$

$$C \begin{cases} x = \lambda \\ y = m\lambda + k\sqrt{(\lambda + a)^2 + m^2\lambda^2} \quad \text{unde} \quad k = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}. \end{cases}$$

Intre aceste ultime două ecuaţiuni eliminând parametrul λ, se obţine ecuaţia locului căutat:

$$[k^2 - m^2(1 - k^2)]\, x^2 + 2mxy - y^2 + 2ak^2x + a^2k^2 = 0,$$

care este o iperbolă veritabilă întru cât avem:

$$\delta = \begin{vmatrix} AB \\ BC \end{vmatrix} = AC - B^2 = -[k^2 - m^2(1 - k^2)] - m^2 = -k^2(1 + m^2) < 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k^2 - m^2(1 - k^2) & m & ak^2 \\ m & -1 & 0 \\ ak^2 & 0 & a^2k^2 \end{vmatrix}$$

$$= a^2k^2 \begin{vmatrix} k^2 - m^2(1 - k^2) & m & 1 \\ m & -1 & 0 \\ k^2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a^2k^2[k^2 - k^2 + m^2(1 - k^2) - m^2] = -a^2m^2k^4 \neq 0.$$

Discuţie.

1. Se verifică uşor că iperbola este echilateră dacă avem

$$\eta = A + C = (1 + m^2)(k^2 - 1) = 0$$

şi deci $k = \pm 1$.

2. Direcţiile asimptotice ale iperbolei rămân aceleaşi când A descrie axa x-lor.

3. Derivând ecuaţia iperbolei-loc în raport cu a obţinem $a = -x$, rezultat care înlocuit în ecuaţie dă

$$y = mx(1 \pm k)$$

ceea ce însemnează că iperbolele rămân tangente la două drepte fixe când A descrie axa x-lor.

4. Fie $m = 0$, adică (D) perpendiculară pe BC. Locul a devenit perechea de drepte

$$y = \pm k(x + a).$$

Redactarea problemei este făcută după soluția autorului.

Rezolvitorii au ales alte sisteme de axe-coordonate, ajungând la rezultatul adevărat. Soluție foarte bună, cu discuție mai amplă a dat D-l GH. D. SBÂRNEA (cl. VIII-a lic. Tecuci). Soluție bună cu discuție mai redusă: D-l GH. BROȘTEANU (lic. mil. Iași).

D-l P. P. DRĂGHICESCU a determinat doar ecuația locului, afirmând fără justificare că este o iperbolă.

V. GH.

PROBLEMA 5398. *Fie* M_1, M_2, M_3 *trei puncte pe un segment* AB. *Să se construiască pe același segment un punct* M *astfel ca*

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{M_1A}}{\overline{M_1B}} \cdot \frac{\overline{M_2A}}{\overline{M_2B}} \cdot \frac{\overline{M_3A}}{\overline{M_3B}}.$$

IULIAN PETRESCU.

Soluție dată de D-l MIRCEA D. POPA (Școala Ofițeri Artilerie) Vom construi separat segmentele

$$x = \frac{\overline{M_1A}}{\overline{M_1B}} \cdot \overline{M_2A}, \quad y = \frac{\overline{M_3B}}{\overline{M_3A}} \cdot \overline{M_2A}$$

după regula celei de a patra proporționale. (De ex., pe o dreaptă b ce trece prin B luăm $\overline{BA_1} = \overline{M_2A}$; paralela prin A la A_1M_1 taie pe b în A'; avem $x = \overline{A'A_1}$).

Căutăm acum pe AB un punct M care să-l împartă în raportul x/y. (Pe b luăm $\overline{BP} = y$; apoi într'un sens ori într'altul $\overline{PR} = x$ și paralela din P la AR taie pe AB în M).

Observare. 1. Alte soluțiuni date de d-nii HORIA M. BODNĂRESCU, GH. GH. BROȘTEANU, PAUL P. DRĂGHICESCU.

2. D-l P. P. DRĂGHICESCU comunică că problema este cunoscută[1]).

---

1) De ex.: Ing. TEODORU, *Curs de Statică grafică*. Politehnica din București (1920—21).

PROBLEMA. 5482. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sin x + \sin 2x = \sin 3x.$$

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: BROŞTEANU TH., BUCUR N. G., CĂRUNTU D. F., MILEA C. C., PUCHIU T. G. (Elevi, Liceul militar, Iaşi); COSTIN A. şi SOTIRESCU N. (Elevi, Clasa VII-a, Liceul militar, Mihai Viteazul, Timişoara).

Din ecuaţia dată deducem succesiv:

$$\sin 3x - \sin x - \sin 2x = 0,$$

$$\therefore \quad 2\sin x \cos 2x - 2\sin x \cos x = 0,$$

$$\therefore \quad \sin x\,(\cos 2x - \cos x) = 0,$$

$$\therefore \quad \sin x \cdot \sin \frac{1}{2}x \cdot \sin \frac{1}{2}3x = 0,$$

$$\therefore \quad \sin x = 0 \quad , \quad \sin \frac{1}{2}x = 0 \quad , \quad \sin \frac{1}{2}3x = 0,$$

$$\therefore \quad x = k\pi \quad , \quad \frac{1}{2}x = k\pi \quad , \quad \frac{1}{2}3x = k\pi,$$

$$\therefore \quad x = k\pi \quad , \quad x = 2k\pi \quad , \quad x = 2k\pi/3.$$

A doua soluţie este cuprinsă în prima pentru k pereche sau în a treia pentru $k = \mathfrak{M}3$.

Soluţie analoagă, fără discernământ bun al soluţiilor, a dat şi D-l STOIANOVICI I. S. (Colegiul Naţional Nicolae Filipescu, Predeal); EFTIMIE C. D. (Elev-Inginer, Bucureşti).

Soluţie dată de D-nii: BARANGA T. G., DIACONESCU C. N., IONESCU I., OPREA G. şi OPREA M. (Liceul Mihai Viteazul, Timişoara); DRĂGHICESCU P. P. (Liceul Militar, Iaşi).

Ecuaţia dată se poate scri:

$$\sin x + 2\sin x \cos x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

Dividem ecuaţia cu $\sin x$ şi punem $\sin x = 0$, care ne dă $x = k\pi$, şi ne rămâne ecuaţia:

$$1 + 2\cos x = 3 - 4\sin^2 x = 4\cos^2 x - 1,$$

$$\therefore \quad 4\cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \quad \therefore \quad 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0,$$

$$\therefore \quad \cos x = (1 \pm \sqrt{1+8}) = (1 \pm 3)/4.$$

Deci $\cos x = 1$, care ne dă $x = 2k\pi$, soluţie care este coprinsă în precedenta, şi $\cos x = -1/2$, care ne dă

$$x = 2k\pi \pm \left(\pi - \frac{1}{3}2\pi\right) = 2k\pi \pm (2\pi/3).$$

Soluţii analoage cu aceasta, fără discernământ bun al soluţiilor a dat şi D-rele: TUDORAN M. L. (Şcoala Centrală de fete din Bucureşti) şi MIOARA CRĂCIUNESCU (Bucureşti), şi de D-nii: COMAN I. L., MUNTEANU I., UNGUREANU P. I., VĂDUVA D. (Liceul Militar Mihai Viteazul, din Timişoara), BADEA A. I., BOGDAN GH., POPA N. A. (Liceul Militar, Iaşi), ADAM N., BĂRBUŢ T., CAULA V. I., C. DUMITRESCU, DAMASCHIN C., GEORGESCU N., GHEORGHE I. M., GINGIAN D., HORIA D. I., IRIMESCU I. P., JIPA N., NESTOR I. I., POPESCU ST. G., POPESCU GREACA S., TOPÂRCEANU GH., VASILESCU A. M., VLĂDESCU I. GH., ZAVATI C. C. (Elevi Clasa VII-a, Liceul Militar Ştefan cel Mare, Câmpul Lung, Muscel), A. JILETCOVICI, C. IONESCU.

D-l GHEORGHIU E. O. (Student) a rezolvat problema luând ca necunoscută $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$.

Alte soluţii de D-nii: GHIMUŞ A. D. (Clasa VII-a, Liceul Lazăr, Bucureşti), MIHĂILESCU C. C., Student (Câmpina); MARINESCU GH. (Colegiul Naţional „N. Filipescu", Predeal), M. D. POPA, M. C. NICULESCU, GH. VASILIU.

EXERCIŢII

19. Să se găsească toate progresiile geometrice crescătoare de numere întregi:

$$a_1, a_2, a_3, a_4$$

astfel încât să avem:

$$a_1 = \sqrt{a_2} \; ; \; a_3 = a_1 . a_2 \text{ şi } a_2 = \sqrt{a_4}.$$

D. D. BOIANGIU.

R. Avem lesne:

$$a_1^2 = a_2 \; ; \; a_2^2 = a_4 \; ; \; a_3 = a_1^3 .$$

Deci şi $a_4 = a_1^4$. Progresia va fi:

$$a_1, a_1^2, a_1^3, a_1^4 .$$

PROBLEME PROPUSE

5512. Pentru ca să măsurăm aria S a unui patrulater dat pe teren, îl descompunem în două triunghiuri prin o diagonală şi ducem perpendiculare pe această diagonală din celelalte vârfuri. Care este minimul de lungime de parcurs pe teren, la măsurarea lungimilor necesare?

I. IONESCU.

5513. In ce sistem de numeraţie numerele 111 111 111 111 şi 111 sunt egale între ele?

V. THÉBAULT.

5514. Legea contribuţiilor directe prevede că anumite impozite trebuesc plătite în *patru* rate egale, fiecare rată trebuind să fie plătită în cursul trimestrului respectiv. Contribuabilul care-şi achită rata trimestrială în prima jumătate a trimestrului în care ea este exigibilă se bucură de o reducere de $5^0/_0$ la acea rată, iar dacă achită întreg impozitul anual în primul trimestru bugetar, atunci se bucură de o reducere de $7^0/_0$ din impozitul anual.

In schimb se percepe o majorare de $2^0/_0$ pentru fiecare trimestru sau fracţiune de trimestru de întârziere. Se întreabă, la ce dată sau la ce date trebue să-şi achite un contribuabil acest gen de impozite, pentru a obţine avantajul maxim ştiind că acel contribuabil îşi are banii depuşi în cont cu $p^0/_0$ la o bancă?

I. B. FLORESCU.

5515. S_m fiind suma puterilor de ordinul m a termenilor unei progresii aritmetice, să se demonstreze relaţia

$$S_{2(2m+1)} = S_{2m+1} \cdot S_d,$$

unde S_d este diferenţa dintre suma puterilor de ordinul $(2m+1)$ a termenilor de rang impar şi suma puterilor de ordinul $(2m+1)$ a termenilor de rang par.

G. G. CONSTANTINESCU.

5516. Fie un punct M fix pe un cerc de rază R şi A, B două puncte mobile pe cerc astfel că unghiul AMB variază uniform dela valoarea α, pe care o are când MA este tangentă la cerc, până la valoarea β, pe care o are când MB devine tangentă la cerc. Să se studieze variaţia ariei ABM.

Caz particular:

$$R = 1 \quad , \quad \alpha = 30^0 \quad , \quad \beta = 45^0.$$

LT. C. IONESCU-ŢIU.

5517. 1°. Să se elimine θ şi φ între relaţiile:

$$hr^2 \sin^2(\theta - \varphi) = \rho^2 \sin(\theta - \omega) \sin(\omega - \varphi)$$
$$\sin(\omega - \varphi) - a \sin(\theta - \omega) = 0$$
$$\theta + \varphi = \alpha.$$

2°. Se consideră punctul M de coordonate polare ρ şi ω; numerele a, h, r, α sunt constante. Rezultatul eliminării reprezintă locul punctului M. Se cere ecuaţia cartesiană a acestui loc.

TH. ANGHELUŢĂ.

5518. Să se demonstreze că:

$$\lim_{x \to 0} \left\{ -\frac{p}{x} + \frac{2}{R^2 x^2} [(p^2 - qx + R^2 x)^{\frac{3}{2}} - (p^2 - qx)^{\frac{3}{2}}] \right\} = \frac{R^2 - 2q}{4p}.$$

D. V. IONESCU.

5519. Fie U, un punct în planul triunghiului ABC. BU, CU retaie cercul circumscris în B', C'; B'C, BC' se taie în V. Avem

$$BUC \pm BVC = 2A.$$

Cazuri particulare. Discuție.

N. N. MIHĂILEANU.

5520. Câte prizme drepte cu baza dreptunghiulară se pot construi, având pe fețele lor nouă puncte date din spațiu ?

ULPIU FLORESCU.

5521. Fie $\overline{AB}$ o coardă fixă și M un punct mobil pe cercul fix de centru O. Diametrul paralel cu BC întâlnește pe MA și MB în A' și B'. Se cere locul intersecției bisectoarelor unghiului AMB cu perpendiculara pe mijlocul lui B'C'.

G-L GH. BUICLIU.

5522. Intr'un triunghiu, paralelele duse din picioarele fiecărei ceviene la celelalte două, taie laturile triunghiului în șase puncte pe o conică.

CPT. I. ZAMFIRESCU.

5523. Fiind dat un punct M în planul unui triunghiu ABC, să se demonstreze că există un singur punct M_1 în același plan, astfel încât

$$\frac{\overline{AM_1}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{BM_1}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{CM_1}}{\overline{CM}}.$$

Să se precizeze poziția punctului M_1.

ION C. VASILIU.

5524. Fie P un punct fix în planul conicei (C). Se asociază unui punct M din plan, un alt punct M', astfel ca hiperbola echilateră ce trece prin M, M' și intersecțiile conicei (C) cu polarele lor să treacă și prin P.

1°. Să se arate că transformarea $M' = T(M)$ este patratică.

2°. Să i se găsească punctele duble, polurile și dreptele singulare.

I. I. ȚIȚEICA.

5525. θ fiind un număr complex, să se determine în planul variabilei complexe z cea mai simplă curbă, care rămâne invariantă prin raport cu transformarea $Z = \theta z$ și care trece prin punctul M_0, de afix z_0.

RADU BĂDESCU.

5526. Să se integreze ecuația diferențială

$$xy'y''' - 3xy''^2 + 3y'y'' = 0.$$

P. SERGESCU.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Benadic Al. (N); *Bodnărescu M. Horia* (3434, 5416, 18, 20, 28); *Dobrescu Andrei* (P); *Drăghicescu P. P.* (4396, 5374, 402); *Drăghici P. P.* (5272); *Eftimie Cristea* (5511); *Jiletcovici A.* (5416); *Moscovici E. N.* (5143, 476); *Niculescu C. Mircea* (5401, 20, 77); *Petrescu Iulian* (P); *Popa D. Mircea* (4396, 5413, 16, 20, 34, 93, N); *Tilică Ştefan* (5413); *Tudoran M. Lydia* (5468); *Vasiliu Gh. D-tru* (5483); *Voinea P. Radu* (P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, III, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*

Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii

Abonamentul anual (9 numere). Lei 50

Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 72.346.

1940-1941 complet
BIBLIOTECA CENTRALĂ ASSOCIAȚIUNEA SIBIIU
C.M.R.28

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVI

NUMĂRUL 12. — AUGUST 1941

SUMARUL

1. Calculul vectorial (urmare) . *Dr. Ing. Plautius Andronescu.*
2. Asupra unui contur poligonal în legătură cu un triunghiu . . . . . *Virgil Ghițescu.*
3. Generalizarea teoremei Droz-Farny . *Ing. Ion Vasiliu.*
4. Raport pentru decernarea premiului „Spiru Haret" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
5. Note Matematice: 55 — 59.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 304.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2439, 3873, 4181, 4400, 5165, 5199, 5281, 4062, 5331, 5359, 5373, 5385, 5387, 5400, 5401, 5406, 5437.
10. Exerciții: 20.
11. Probleme propuse: 5476, 5527 — 5541.
12. Tabla de Materii.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1941

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer, şi D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1940 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLV.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **53**64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 74, 76, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 88, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 99, **4**02, 03, 04, 05, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 500, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLVI. Nr. 12 *SUPLIMENT* AUGUST 1941

RECREAȚIUNI

1. **Zero și Unu, de Gheorghe Ranetti.** Ţifra ZERO obosită | Gâfâind cum ea e grasă, | Vru'ntr'o zi să stea la masă | Căci era şi flămânzită | (Pântecu-i e veşnic gol), | Lângă UNU. Deci domol, | ZERO roagă să-l primească Un minut să s'odihnească | Şi foamea să-şi potolească. | Insă UNU | Ca nebunul | Insultă pe bietul ZERO: | — „Cum îndrăsneşti hahalero „Lângă mine să te-aşezi? | „Nu te vezi | „In ce hal eşti măi fârtate? „Un nimic, | ...„O nulitate! „Eu cu capul sus semeţ, | „Şi drept ca un făcăleţ, „Stau în fruntea tutulor | „Stau în fruntea ţifrelor... | „Să stai tu la prânz cu mine?! „Tu pe care te-am văzut | „Incă c'un altul ca tine | „Tot aşa necunoscut | „Stând pe uşi dela latrine? | „Marş d'aici!" — | „Nu fii mândru cu cei mici, „UNULE | Nebunule!" | li răspunde ZERO'ndată. | „Darnic n'ai fost niciodată | „Nici bărbat, „Probă că nici nu'mpărţeşti | „Nici nu'nmulţeşti, | „Acest fapt e demonstrat!"

Pe când cearta era'n toi | Şi era să fie lată | Ţifra DOUĂ, înarmată, | Porni dârză la războiu | Impotriva ţifrei UNU, | Şi l'ar fi distrus cu tunul | Ori, mai ştiu eu, cu ce armă. | Dacă UNU speriat, | Pe ZERO n'ar fi chemat. Cu un strigăt de alarmă | ZERO, iertând pe mişel, | Veni'ndată lângă el | Silind pe DOUĂ să plece Căci vă jur că nu-i minciună — UNU şi ZERO împreună Aveau putere cât ZECE.

Vechiu de când cu tata Noe | E-un proverb ce spune bine: | „Totdeauna ai nevoe" | De unul mai mic ca tine".

I. I.

*

2. **Teorema cutare.** La un liceu din Oltenia:

— Elevul, scos la tablă, înşiră pe tăcute calcule numerice, fără să spună un cuvânt. Profesorul, enervat îi zice.

— „Spune, Domnule, şi D-ta: aplicăm Teorema cutare...".

— Elevul. — „Aplicăm Teorema Cutare..." şi neturburat îşi vede de calcul. (Autentic).

DORU MUSCELEANU.

*

3. **Scăderea fracţiilor.** Răspunsul dat de un elev din clasa VII modernă (nu antică!):

„Scădem numărătorii între ei şi numitorii între ei!". Autentic.

DORU MUSCELEANU.

*

4. **Păcăleală.** Intrebaţi repede pe cineva: „Câte degete sunt la două mâini?"

Vi se va răspunde: „ZECE".

Tot repede, întrebaţi: „Dar la zece mâini?"

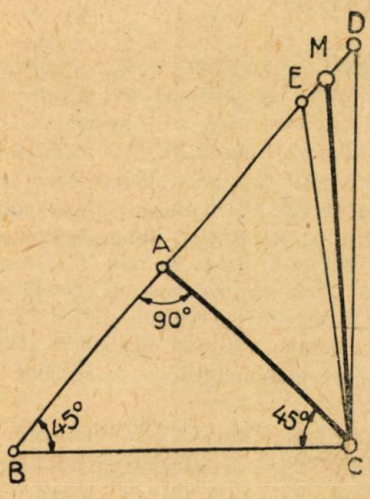
Foarte des veţi primi răspunsul: O SUTĂ.

I. I.

*

5. **Paradox geometric.** *Dintr'un punct dat se pot duce două perpendiculare pe aceiaşi dreaptă.*

Să considerăm triunghiul ABC cu A = 90°. Luăm, pe prelungirea laturii BA, o distanţă DE = AB, ducem în C perpendiculara DC pe BC, care taie în D pe AB şi unim E cu C. Segmentele CE şi CB sunt egale, ca oblice cu picioarele egal depărtate de piciorul perpendicularei CA.



In triunghiul BCD, unghiul din C are 90° şi cel din B 45°, după enunţ. Rezultă că unghiul CDB este de 45° şi deci triunghiul BCD este isoscel. Prin urmare CD = CB = CE. Triunghiul CED este deci isoscel iar dreapta care uneşte vârful său C cu mijlocul M al bazei sale ED este perpendiculară pe ED, adică pe BD. Dreapta CA este însă deasemenea perpendiculară pe BD, unghiul A fiind drept.

Rezultă deci că am dus din C două perpendiculare, CA şi CM pe aceiaşi dreaptă BD.

ALEXANDRU STOENESCU.

*

6. **Geometria politică.** In „*Candide*" din 31/VII 1930 citim:

„Si le député est *le lieu géométrique* de sa circomscription, il n'en doit pas devenir la cible constante".

V. NOVACU.

*

7. **Planuri ascuţite.** Un profesor defineşte elevilor săi în felul următor forma unui proiectil:

— „Proiectilul are forma cilindro-ogivală şi este terminat la un capăt cu un plan *orizontal* iar la celălalt cu un *plan ascuţit*".

Partea frazei dela *şi* şi până la fine este originalitatea profesorului, care a învăţat analitică, analiză, mecanică, descriptivă, etc. Şi după atâta *învăţătură (?)* a rămas cu un *plan ascuţit*... Ce era să fie dacă nu învăţa nici una din atâtea ştiinţe!

GH. B.

*

8. **Ecuaţia Românească.** (Din „*Curentul*", 9 Iulie 1940). Dela isbucnirea războiului nu au văzut decât interesele aliaţilor (astăzi învrăjbiţi) nu au urmărit decât linia acestor interese. Nici un moment nu s'au gândit să descifreze ecuaţia românească, să afle drumul cel mai potrivit al intereselor noastre.

IONEL STAMATE.

*

9. **Necunoscuta în poezia română.** In *Holera* lui AUGUSTIN PROSTU citim: „Baccilul tău i-o *virgulă* asta oricine-o ştie. Şi totuşi nu m'ar fi mirat, ca un alt semn să fie. | Aşa de pildă se putea, să fie chiar un ...punct | Care din viu te face să te pomeneşti defunct. |

Căci cine naiba a aflat origina ta din născare. | Sau şi mai nemerit, era un *parantez* | In care tu cu meşteşug, viaţa o aşezi. | Sau încă mai exact era un *Delta ix* | Ca muşuroiul unde se pun morţii la index. | In fine orice semn care nu dă chix | Afară de necunoscuta ...*x*. |

A. CIUPE.

*

Fiind vorba de *holeră* reproduc aici o reţetă matematică pentru boala holerei pe care am extras-o din un ziar de pe vremea holerei din 1831.

*

10. **„Un quartenon** d'indiférence | Autant de resolution | Dont vous ferez infusion | Avec le jus de patience | Point de procès; | Force, gaîté | Deux onces de Société. | Avec quelque peu d'exercices | Point de souci et d'avarice | Trois bons grains de diversion | Aucun exces de passion. |

„Vous melerez le tout ensemble | Autant le soir que le matin | Avec un doigt de bon vin | Et verez que cette pratique | Au cholera fera la nique".

I. I.

*

11. **Teoremă.** *Orice număr este produsul unui număr infinit de factori.*

Un număr se poate pune totdeauna ca diferenţă a două numere a şi b. Dar:

$$a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}) = \ldots$$

şi aşa mai departe.

I. MIU.

*

12. **Nedeterminare!** — Mi se pare, Domnule, că v'am văzut undeva? — Da, mă duc câte odată pe acolo.

I. I.

*

13. **Infinitul.** In „*Curgând Clepsydra*" de PIU-ŞERBAN, citim într'un loc: „I-ţi dau cuvântul meu că simţ | Uscându-mi lacrime d'argint | sărutul cald de... infinit".

E. ST. IACOB.

*

14. **Transinfinitul!** Profesorul. Ce valori sunt imposibile pentru tangenta unui unghiu:

Elevul. — Mai sus de $+\infty$ şi mai jos de $-\infty$.

I. I.

*

15. **Paradox de Geometrie analitică.** Ne propunem să găsim suprafaţa generată de o dreaptă variabilă Δ care se mişcă sprijinindu-se pe dreptele OZ ($x=0$, $y=0$) şi D($x=az+b$, $y=cz+d$) rămâind paralelă cu planul xOy ($z=0$), punctele de sprijin fiind A (o, o, α), B ($a\alpha+b$, $c\alpha+d$, α). Ecuaţia dreptei AB este: $x/(a\alpha+b)=y/(c\alpha+d)$. Prin eliminare, obţinem: $x(cz+d)=y(az+b)$, care este ecuaţia suprafeţei descrisă de Δ. Descompunerea în patrate, în baza identităţii $uv=[\frac{1}{2}(u+v)^2-\frac{1}{2}(u-v)^2]$ ne dă o ecuaţie de forma $P^2+Q^2-R^2-S^2=0$. Deci Δ descrie un iperboloid cu o pânză (!). Şi totuşi trebuia să ne iasă un paraboloid iperbolic. Unde greşim?

V. GH.

*

16. **Morala.** VINET i-a dat definiţia următoare:
Morala este aritmetica fericirii.

I. I.

*

17. **Anomalii la matematicieni.** PLATON, ARCHIMEDE şi LALANDE erau pitici.

— PASCAL scria când ca ateu, când ca un preot al Bisericii.

Despre LEIBNITZ se zicea că meditează orizontal. Nu putea medita dacă nu se aşeza în această poziţie.

— Lui LAGRANGE pulsul îi devenea neregulat când scria.

— NEWTON rămânea atât de emoţionat după terminarea unei probleme încât era incapabil să mai continue lucrul.

— CARDAN şi NEWTON deslegau probleme în vis.

I. I.

*

18. **Matematica în literatura română contimporană.** Din romanul „*Eu, Tina şi Adam*“ de T. C. STAN, redăm următoarele:

„*Patru* oameni cum se cade = *un* poker“ (pag. 80).

„Şi mereu, mereu, o vezi *echilibrându-se* tot astfel, ca un cub care se rostogoleşte şi poate rămâne *stabil* pe oricare dintre cele **opt** feţe!“ (pag. 143). (Reprodusă şi în Suplimentul No. 5).

„Copiilor nu le poţi vorbi despre *imperativul categoric*, femeilor despre *trigonometrie* şi paraliticilor despre *sport* (pag. 170).

„El rezolvă problemele prin *eliminare*. Le ignoră pur şi simplu (pag. 177).

V. GH.

*

19. **Oratoria la matematicieni.** CARDAN şi TARTAGLIA erau gângavi.

— DESCARTES şi NEWTON mai că nu se puteau exprima în public. Ultimul a fost Membru al Parlamentului din Londra. A cerut o singură dată cuvântul. Toţi parlamentarii aşteptau cu mirare discursul! A făcut atunci o cerere ca să se închidă o fereastră care-l trăgea!

I. I.

*

20. **Erată.** Autorul recreaţiei 10 din Suplimentul Nr. 8, de pe luna Aprilie 1941, este R. ZARICAN iar nu R. ZAHARIAN, cum din eroare s'a publicat.

CALCULUL VECTORIAL

(Urmare dela pag. 512)

§. 4. Aplicaţii

1. Se dau trei vectori complanari: $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ *şi se cere să se determine* λ_1, λ_2, λ_3, *în aşa fel ca relaţia:*

$$\lambda_1 \mathcal{A}_1 + \lambda_2 \mathcal{A}_2 + \lambda_3 \mathcal{A}_3 = 0$$

să fie satisfăcută.

Descompunând pe $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ după vectorii unitari ortogonali *i, j, k*, va trebui să obţinem trei ecuaţii lineare omogene în λ_1, λ_2, λ_3:

$$\lambda_1 A_{1x} + \lambda_2 A_{2x} + \lambda_3 A_{3x} = 0$$
$$\lambda_1 A_{1y} + \lambda_2 A_{2y} + \lambda_3 A_{3y} = 0$$
$$\lambda_1 A_{1z} + \lambda_2 A_{2z} + \lambda_3 A_{3z} = 0$$

λ_1, λ_2, λ_3 obţin valori diferite de zero, dacă determinantul $\Delta_1 = 0$.

Va trebui să avem:

$$\begin{vmatrix} A_{1x} & A_{2x} & A_{3x} \\ A_{1y} & A_{2y} & A_{3y} \\ A_{1z} & A_{2z} & A_{3z} \end{vmatrix} = \Delta_1 = 0.$$

Condiţia $\Delta_1 = 0$ e satisfăcută, deoarece vectorii $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ fiind complanari, rezultă $(\mathcal{A}_1 [\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3]) = \Delta_1 = 0$.

2. Ce relaţie se obţine între valorile numerice ale vectorilor din egalitatea $\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} = 0$ *?*

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ reprezint trei vectori complanari, care formează un triunghiu. Din $-\mathcal{C} = (\mathcal{A} + \mathcal{B})$, prin ridicare la pătrat, obţinem:

$$(-\mathcal{C})^2 = C^2 = A^2 + B^2 + 2\,(\mathcal{A}\,\mathcal{B}) = A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha$$

o relaţie cunoscută din trigonometrie.

3. Ce valori posed suma şi diferenţa pătratelor diagonalelor unui paralelogram ?

Din:

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^2 = \mathcal{C}^2 = C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos(AB)$$
$$(\mathcal{A} - \mathcal{B})^2 = \mathcal{E}^2 = E^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos(AB)$$

rezultă:

$$C^2 + E^2 = 2\{A^2 + B^2\}$$
$$C^2 - E^2 = 4AB\cos(AB)$$

adică: suma pătratelor diagonalelor e egală cu de două ori suma pătratelor laturilor neparalele, iar diferența lor se reprezintă prin patru ori produsul scalar al laturilor neparalele, considerate ca vectori.

4. Să se descompună vectorul $\mathcal{A}$ în două componente: una după direcția vectorului unitar $\bar{m}$ dat, iar cealaltă să se găsească într'un plan dat care nu trece prin $\bar{m}$.

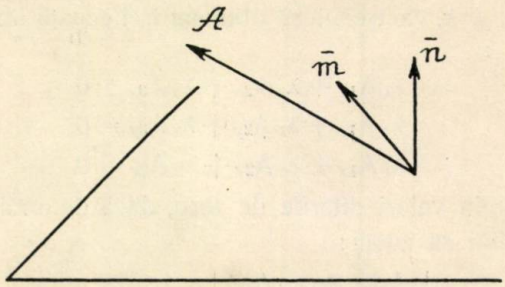


Fig. 30.

Vom pune: $$\mathcal{A} = \frac{(\bar{n}\,\mathrm{A})}{(\bar{n}\,\bar{m})}\,\bar{m} + \frac{[\bar{n}\,[\mathrm{A}\,\bar{m}]]}{(\bar{n}\,\bar{m})}$$

în care $\bar{n}$ reprezintă vectorul unitar normal la planul dat. Se constată ușor că componenta din plan se găsește pe intersecția planului dat, cu planul format din $\mathcal{A}$ și $\bar{m}$.

Când $\bar{m}$ se confundă cu $\bar{n}$, rezultă:

$$[\mathcal{A} = (\bar{n}\,\mathcal{A})\,\bar{n} + [\bar{n}\,[\mathcal{A}\,\bar{n}]]$$

se obțin proiecțiile vectorului $\mathcal{A}$ pe $\bar{n}$ și pe plan.

5. Să se determine locul geometric al vârfurilor vectorului $\mathcal{C}$ așa fel ca condiția $\frac{A_1}{\mathcal{B}_1} = \frac{A_2}{\mathcal{B}_2} = \mathcal{C}$ să fie satisfăcută.

Locul geometric al vârfului vectorului $\mathcal{C}$, reprezintă intersecția a două planuri perpendiculare pe vectorii $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ situate la distanțele $\frac{A_1}{B_1}$ și $\frac{A_2}{B_2}$ de punctul de plecare al vectorului $\mathcal{C}$. Vezi fig. 1.

Avem: $$A_1 = (\mathcal{B}_1\,\mathcal{C}) \quad , \quad A_2 = (\mathcal{B}_2\,\mathcal{C}).$$

Formând vectorii reciproci, ai vectorilor necomplanari $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ și $[\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2]$:

$$\mathfrak{B}_1' = \frac{[\mathfrak{B}_2\,[\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2]]}{(\mathfrak{B}_1\,[\mathfrak{B}_2\,[\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2]])} \qquad \mathfrak{B}_2' = \frac{[[\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2]\,\mathfrak{B}_1]}{(\mathfrak{B}_1\,[\mathfrak{B}_2\,[\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2]])} \qquad \mathfrak{B}_3' = \frac{[\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2]}{(\mathfrak{B}_1\,[\mathfrak{B}_2\,[\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2]])}$$

în care: $(\mathfrak{B}_1\,[\mathfrak{B}_2\,[\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2]]) = [\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2]^2$

rezultă:

$$\mathfrak{C} = A_1\,\mathfrak{B}_1' + A_2\,\mathfrak{B}_2' + p\,\mathfrak{B}_3'.$$

Vectorul $\mathfrak{C}$ apare ca o funcțiune lineară de scalara p.

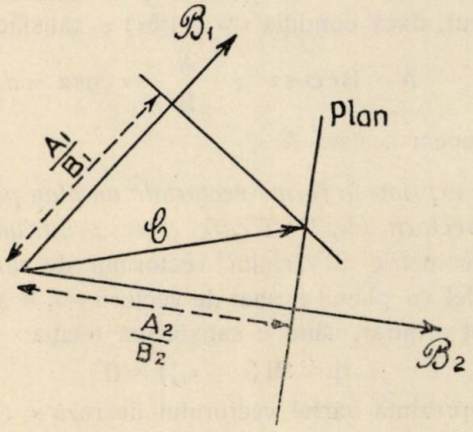


Fig. 31.

6. In care caz vectorul $\mathfrak{C}$ exprimat în forma $\frac{A}{\mathfrak{B}}$ obține o soluție unică?

Va trebui să se cunoască:

$$\frac{A_1}{\mathfrak{B}_1} = \frac{A_2}{\mathfrak{B}_2} = \frac{A_3}{\mathfrak{B}_3} = \mathfrak{C}$$

în care scalarele A_1, A_2, A_3 și vectorii necomplanari: $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ apar ca mărimi date.

Ca urmare obținem:

$$A_1 = (\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{C})$$
$$A_2 = (\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{C})$$
$$A_3 = (\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{C}).$$

Astfel că:

$$\mathfrak{C} = A_1 \mathfrak{B}_1' + A_2 \mathfrak{B}_2' + A_3 \mathfrak{B}_3'$$

în care $\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{B}_2'$, $\mathfrak{B}_3'$ reprezintă vectorii reciproci ai vectorilor $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$.

7. Să se exprime vectorial un plan perpendicular pe un vector $\mathfrak{B}$, *situat la o anumită distanță d de originea vectorului* $\mathfrak{B}$.

Introducând vectorul de rază $\mathfrak{r}$.

$$\mathfrak{r} = ix + jy + kz$$

care pornește din centrul sistemului de coordonate situat în originea vectorului $\mathfrak{B}$, rezultă că locul geometric al vârfului lui r se găsește pe planul cerut, dacă condiția $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B}\mathfrak{r})$ e satisfăcută.

Avem: $\quad A = Br\cos\alpha \quad ; \quad \dfrac{A}{B} = r\cos\alpha = d$

de unde deducem scalara A.

8. Să se exprime în formă vectorială un plan paralel cu planul format din vectorii $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *și care trece printr'un punct dat* P_1.

Locul geometric al vârfului vectorului de rază $\mathfrak{r}$, reprezintă un plan paralel cu planul format de vectorii $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ și trece printr'un punct P_1 fixat arbitrar, când e satisfăcută relația:

$$([\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]\{\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1\}) = 0$$

în care P_1 reprezintă vârful vectorului de rază $\mathfrak{r}_1$.

9. Să se exprime vectorial un plan care trece prin trei puncte date P_1, P_2, P_3.

Relația

$$(\{\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1\}\,[\{\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_2\}\,\{\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_3\}]) = 0 \qquad (1)$$

reprezintă locul geometric al vârfului vectorului de rază $\mathfrak{r}$ care se mișcă pe un plan care trece prin P_1, P_2, P_3 vârfurile vectorilor de rază $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$.

Prin efectuarea operației în (1) obținem:

$$(\mathfrak{r}\{[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2] + [\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3] + [\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1]\}) = (\mathfrak{r}_1[\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3]).$$

Când vectori $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ sunt complanari, rezultă $(\mathfrak{r}_1[\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3]) = 0$ astfel că:

$$(\mathfrak{r}\{[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2] + [\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3] + [\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1]\}) = 0$$

ceea ce ne arată că, în cazul când $[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2] + [\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3] + [\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1] \neq 0$ $\mathfrak{r}$ se găsește în același plan cu $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$.

Dacă avem:

$$[\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2] + [\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3] + [\mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1] = 0$$

ceea ce se mai poate pune în forma:

$$[\{\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1\} \{\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2\}] = 0$$

ne arată că P_1, P_2, P_3 se găsesc pe aceeaşi dreaptă.

Intr'un astfel de caz, există o infinitate de planuri care trec prin P_1, P_2, P_3.

10. Să se construiască o dreaptă care trece printr'un punct P_1 *şi e paralelă cu un vector* $\mathfrak{B}$.

Relaţia

$$[\mathfrak{B} \{\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1\}] = 0 \qquad (1)$$

reprezintă locul geometric al vârfului vectorului de rază $\mathfrak{r}$, care e o dreaptă, ce trece prin P_1 vârful vectorului de rază $\mathfrak{r}_1$, şi e paralelă cu vectorul $\mathfrak{B}$.

Când dreapta cerută e paralelă cu o dreaptă ce trece prin două puncte date P_2, P_3 relaţie (1) ia forma:

$$[\{\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_3\} \{\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1\}] = 0.$$

Se mai poate scrie:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \lambda \mathfrak{B}$$

în care λ reprezintă o scalară variabilă. In cazul acesta $\mathfrak{r}$ apara ca o funcţie vectorială lineară de λ.

11. Se dă în spaţiu repartizarea a n mărimi scalare $q_1 \ldots q_n$ *punctiforme şi se cere să se arate prin ce punct trece vectorul* r_c *în care:*

$$r_c = \frac{1}{\sum_1^n q_\nu} \Sigma q_\nu \mathfrak{r}_\nu .$$

Inlocuind pe O prin O' (vezi Fig. 32) obţinem:

$$\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu \mathfrak{r}'_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu \{a + \mathfrak{r}_\nu\} = a \sum_1^n q_\nu + \sum_1^n q_\nu \mathfrak{r}_\nu$$

astfel că:

$$\mathfrak{r}'_c = \frac{1}{\Sigma q_\nu} \Sigma q_\nu \mathfrak{r}'_\nu = a + \frac{1}{\Sigma q_\nu} \Sigma q_\nu \mathfrak{r}_\nu = a + \mathfrak{r}_c$$

ceea ce ne arată că r_c şi r'_c trec prin acelaşi punct P_c, independent de poziţia centrului sistemului de coordonate O. Punctul P_c e denumit centrul sistemului a celor n scalare punctiforme.

O mărime scalară care umple o porţiune din spaţiu, zicem că e punctiformă faţă de un punct O din spaţiu, atunci când vectorii de rază r cu originea în O şi cu vârfurile în orice element din aceea scalară, pot fi consideraţi ca constanţi.

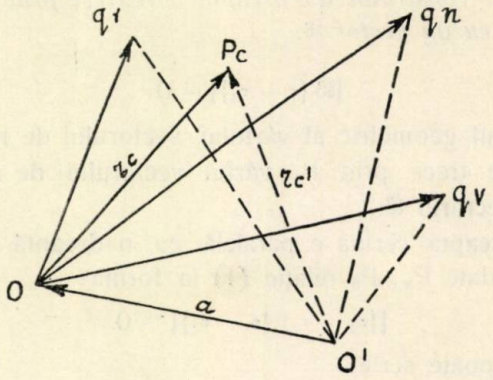


Fig. 32.

12. Să se determine vectorul de poziţie r_c care corespunde centrului P_c a două mase materiale q_1 şi q_2 asupra cărora acţionează forţe din câmpul gravităţei $q_1 g$, $q_2 g$. Vectorul g reprezintă acceleraţia în câmpul gravităţei.

Formăm:
$$r_c = \frac{r_1 q_1 + r_2 q_2}{q_1 + q_2}.$$

Forţa rezultantă $\{q_1 + q_2\} g$ acţionând în P_c, (vezi Fig. 33) ne dă momentul $\mathfrak{M}$ în raport cu P_c egal cu zero:

$$\mathfrak{M} = [\{r_1 - r_c\} q_1 g] + [\{r_2 - r_c\} q_2 g] = 0$$

de unde deducem:

$$[\{r_1 q_1 + r_2 q_2\} g] = [r_c \{q_1 + q_2\} g]$$

sau:
$$r_1 q_1 + r_2 q_2 = r_c \{q_1 + q_2\}.$$

13. Formând vectorul $\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu \ell_\nu = \mathfrak{p}$ *în care* $\sum_{1}^{n} q_\nu = 0$, *să se arate că vectorul* $\mathfrak{p}$ *e independent de poziţia centrului* O *al sistemului de coordonate.*

Ca exemplu putem considera cele n sarcini electrice dintr'o moleculă electrizată în care avem $\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu = 0$. ℓ_ν reprezintă vectorul de poziţie al sarcinei q_ν, faţă de centrul unui sistem de coordonate O. Dacă schimbăm centrul sistemului de coordonate, obţinem:

$$\Sigma q_\nu \ell'_\nu = a \Sigma q_\nu + \Sigma q_\nu \ell_\nu$$

şi ţinând seama de $\Sigma q_\nu = 0$, rezultă:

$$\Sigma q_\nu \ell'_\nu = \Sigma q_\nu \ell_\nu = \mathfrak{p}$$

ceea ce ne arată că $\mathfrak{p}$ denumit „momentul electric" e independent de poziţia lui O.

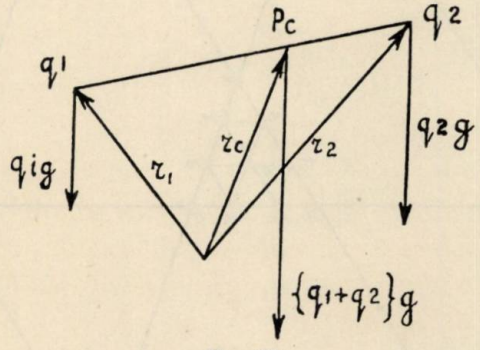


Fig. 33.

In cazul a două sarcini electrice punctiforme egale şi de semn opuse, vectorul $\mathfrak{p}$ ia forma:

$$\mathfrak{p} = q\ell_1 - q\ell_2 = q\{\ell_1 - \ell_2\}$$

ceea ce ne arată că $\mathfrak{p}$ e dirijat dela $-q$ către $+q$.

(Va urma)

DR. ING. PLAUTIUS ANDRONESCU
Profesor la Politechnica din Timişoara.

ASUPRA UNUI CONTUR POLIGONAL IN LEGĂTURĂ CU UN TRIUNGHIU

Résumé. On démontre qu'un contour polygonal, formé par des parallèles menées aux côtés d'un triangle, en partant d'un point pris sur une de ces côtés, se ferme. Après, on établit quelques propriétés de ce contour et on étudie une aire relative à celui-ci. Enfin on démontre qu'un autre contour, analogue au premier, mais formé avec des antiparallèles, se ferme aussi.

Să considerăm un triunghiu ABC (fig. 1). Fie punctul M_1 situat pe latura AB sau pe prelungirile ei. Raportul în care M_1 împarte pe AB, precum şi celelalte rapoarte pe care le vom întâlni,

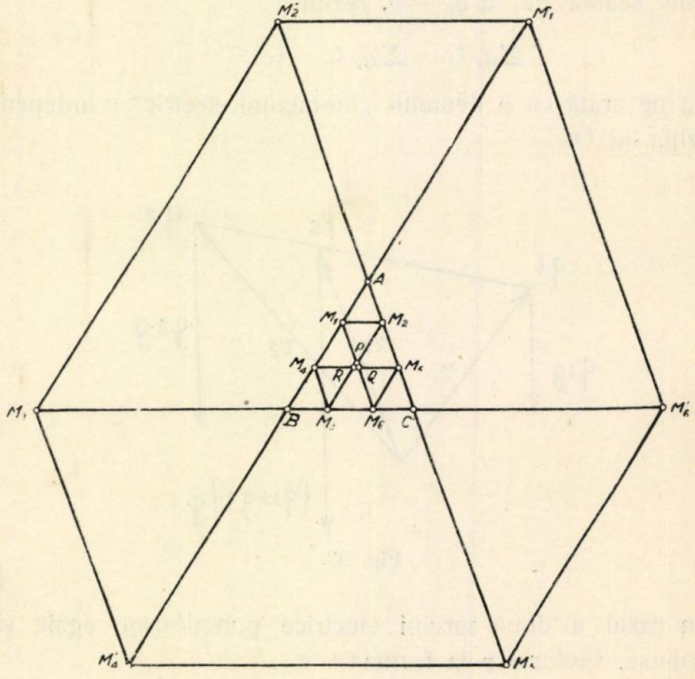


Fig. 1.

le vom considera în valoare relativă; deasemenea şi ariile. Ne propunem a semnalà un contur poligonal în legătură cu triunghiul dat, precum şi o serie de proprietăţi în legătură cu acestea.

1°. Ducem prin M_1 paralela la BC care taie pe AC în M_2. Ducem apoi paralelele M_2M_3 la AB, M_3M_4 la AC, M_4M_5 la BC etc.

Oricare ar fi poziția punctului inițial M_1 pe AB, conturul poligonal $M_1M_2M_3\ldots$ se închide în M_1. Intr'adevăr avem:

$$\frac{\overline{M_1A}}{\overline{M_1B}} = \frac{\overline{M_2A}}{\overline{M_2C}} = \frac{\overline{M_3B}}{\overline{M_3C}} = \frac{\overline{M_4B}}{\overline{M_4A}} = \frac{\overline{M_5C}}{\overline{M_5A}} = \frac{\overline{M_6C}}{\overline{M_6B}} = \frac{\overline{M_7A}}{\overline{M_7B}} = k \lesseqgtr 0.$$

Deducem:

$$\frac{\overline{M_1A}}{\overline{M_1B}} = \frac{\overline{M_7A}}{\overline{M_7B}} = k \lesseqgtr 0.$$

In consecință, punctul M_7 care împarte segmentul AB în același raport ca și M_1, este confundat cu M_1.

2°. Ne propunem apoi să exprimăm aria patrulaterului $M_1M_2M_3M_4$, în funcțiune de aria triunghiului dat și de poziția lui M_1 pe AB.

Cercetăm mai întâiu cazul $k < 0$.

Fie:

$$\text{sup. } ABC = S$$

$$\text{sup. } AM_1M_2 = \text{sup. } BM_3M_4 = s$$

$$\text{sup. } CM_2M_3 = S_1.$$

Vom avea:

$$\frac{s}{S} = \frac{\overline{AM_1}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{k^2}{(1-k)^2}\ ;\ \frac{S_1}{S} = \frac{\overline{CM_2}^2}{\overline{CA}^2} = \frac{1}{(1-k)^2},$$

deoarece:

$$\frac{\overline{AM_1}}{\overline{M_1B}} = -k\ ,\ \frac{\overline{AM_1}}{\overline{AB}} = \frac{-k}{-k+1}\ ;\ \frac{\overline{M_2C}}{\overline{M_2A}} = \frac{1}{k}\ ,\ \frac{\overline{CM_2}}{\overline{M_2A}} = \frac{1}{-k}\ ,\ \frac{\overline{CM_2}}{\overline{CA}} = \frac{1}{1-k}.$$

Apoi

$$\text{aria } M_1M_2M_3M_4 = T = S - 2s - S_1 = S - \frac{2k^2S}{(1-k)^2} - \frac{S}{(1-k)^2} =$$

$$= \frac{(1 - 2k + k^2 - 2k^2 - 1)\,S}{(1-k)^2} = \frac{-k(2+k)\,S}{(1-k)^2}.$$

Să exprimăm acum aria $T_1 = M_1M_2M_3M_4$ în cazul $k > 0$. Din figură se vede că avem:

$$T_1 = S_1 - S + 2s.$$

Insă

$$\frac{s}{S} = \frac{\overline{M_1A}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{k^2}{(1-k)^2} \quad \text{și} \quad \frac{S}{S_1} = \frac{\overline{CA}^2}{\overline{CM_2}^2} = (1-k)^2$$

deoarece

$$\frac{\overline{M_1A}}{\overline{M_1B}} = k \quad , \quad \frac{\overline{M_1A}}{\overline{M_1B} - \overline{M_1A}} = \frac{k}{1-k}$$

și

$$\frac{\overline{M_2A}}{\overline{M_2C}} = k, \quad \frac{\overline{M_2A}}{\overline{M_2A} + \overline{AC}} = k, \quad \frac{\overline{M_2A} - \overline{M_2A} - AC}{\overline{M_2C}} = \frac{k-1}{1},$$

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{M_2C}} = \frac{k-1}{1}, \quad \frac{\overline{CA}}{\overline{CM_2}} = \frac{1-k}{1}.$$

Deci:

$$T_1 = S_1 - S + 2s = \frac{S}{(1-k)^2} - S + \frac{2k^2S}{(1-k)^2} =$$

$$= \frac{1-1+2k-k^2+2k^2}{(1-k)^2} S = \frac{k(2+k)}{(1-k)^2} S.$$

Se observă că avem

$$T_1(k) = -T(-k).$$

Să cercetăm cum variază fiecare din aceste două arii când pentru T, k variază dela $-\infty$ la 0 iar pentru T_1, k variază dela 0 la $+\infty$.

Derivatele sunt:

$$T' = \frac{-2(1+2k)}{(1-k)^3} S \quad \text{și} \quad T_1' = \frac{2(1+2k)}{(1-k)^3} S.$$

Tabloul variaţiilor este:

k	$-\infty$	-4	-2	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$+\infty$
T', T_1'	$+$	$+$	$+$	$+$ 0	$-$ $-$ $-$	$+$ $+$ $+$ $+$	$+\infty$	$-$ $-$ $-$
T, T_1	$-S$ ↗	$-\frac{8}{25}S$ ↗	0 ↗	$\frac{1}{3}S$ Max. ↘	0	0 ↗	$+\infty$ ↘	S

iar diagrama următoarea:

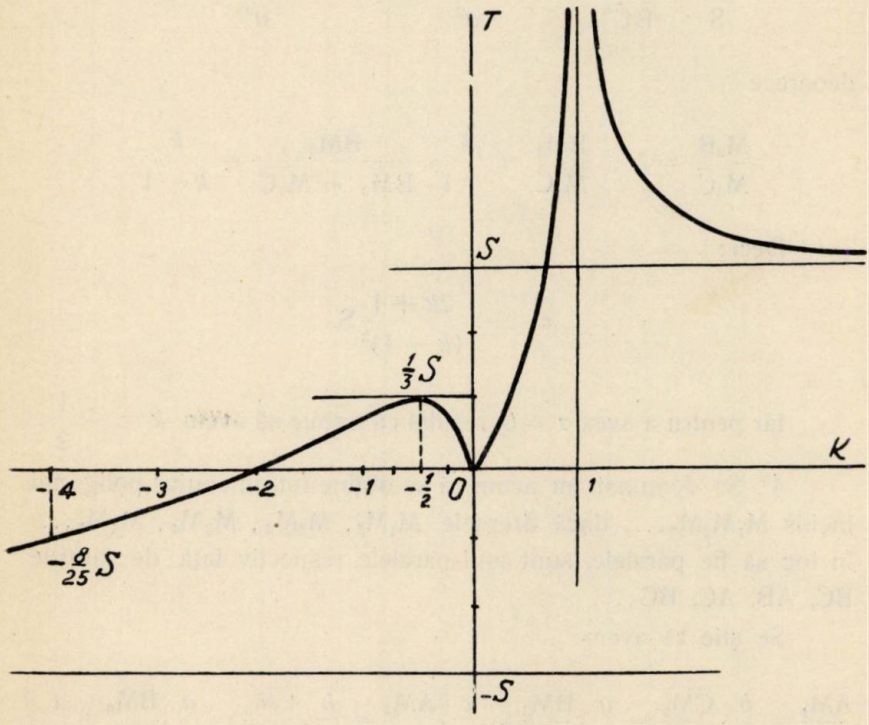


Fig. 2

3⁰. Ne propunem acum să determinăm poziţia particulară pe AB a lui M_1, astfel încât dreptele M_1M_6, M_3M_2, M_5M_4 să fie concurente.

Evident această chestiune nu poate fi pusă decât pentru cazul $k < 0$; altminteri aceste drepte închid între ele oricând o suprafață diferită de zero.

Fie P, Q, R respectiv intersecțiile (M_1M_6, M_3M_2), (M_1M_6, M_5M_4), (M_5M_4, M_3M_2). Insemnând cu σ aria triunghiului PQR, în cazul de concurență al celor trei drepte, trebue să avem $\sigma = 0$.

Triunghiurile asemenea ABC și PQR ne procură:

$$\frac{\sigma}{S} = \frac{\overline{QR}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{(a - 3\overline{BM_3})^2}{a^2} = \frac{\left(a - 3\dfrac{ak}{k-1}\right)^2}{a^2},$$

deoarece

$$\frac{\overline{M_3B}}{\overline{M_3C}} = k, \quad \frac{\overline{BM_3}}{\overline{M_3C}} = \frac{k}{-1}, \quad \frac{\overline{BM_3}}{\overline{BM_3} + \overline{M_3C}} = \frac{k}{k-1}.$$

Deci:

$$\sigma = -\frac{2k+1}{(k-1)^2} S.$$

Iar pentru a avea $\sigma = 0$, rezultă că trebue să avem $k = -\dfrac{1}{2}$.

4°. Să demonstrăm acum că se obține tot un contur poligonal închis $M_1M_2M_3\ldots$, dacă dreptele M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, $M_4M_5, \ldots$ în loc să fie paralele, sunt anti-paralele respectiv față de laturile BC, AB, AC, BC, ...

Se știe că avem:

$$\frac{\overline{AM_1}}{\overline{AM_2}} = \frac{b}{c}, \frac{\overline{CM_2}}{\overline{CM_3}} = \frac{a}{b}, \frac{\overline{BM_3}}{\overline{BM_4}} = \frac{c}{a}, \frac{\overline{AM_4}}{\overline{AM_5}} = \frac{b}{c}, \frac{\overline{CM_5}}{\overline{CM_6}} = \frac{a}{b}, \frac{\overline{BM_6}}{\overline{BM_7}} = \frac{c}{a}.$$

Fie

$$\frac{\overline{AM_1}}{\overline{AB}} = \lambda.$$

Rezultă

$$\overline{AM_1} = \frac{b}{c} \cdot \overline{AM_2} = \lambda c \quad , \quad \overline{AM_2} = \frac{\lambda c^2}{b}$$

$$\overline{CM_2} = b - \frac{\lambda c^2}{b} = \frac{b^2 - \lambda c^2}{b}$$

$$\overline{CM_3} = \frac{b \cdot \overline{CM_2}}{b} = \frac{b^2 - \lambda c^2}{a}$$

$$\overline{BM_3} = a - \frac{b^2 - \lambda c^2}{a} = \frac{a^2 - b^2 + \lambda c^2}{a}$$

$$\overline{BM_4} = \frac{a\overline{BM_3}}{c} = \frac{a^2 - b^2 + \lambda c^2}{c}$$

$$\overline{AM_4} = c - \frac{a^2 - b^2 + \lambda c^2}{c} = \frac{c^2 - a^2 + b^2 - \lambda c^2}{c}$$

$$\overline{AM_5} = \frac{c\overline{AM_4}}{b} = \frac{c^2 - a^2 + b^2 - c\lambda^2}{b}$$

$$\overline{CM_5} = b - \frac{c^2 - a^2 + b^2 - \lambda c^2}{b} = \frac{-c^2 + a^2 + \lambda c^2}{b}$$

$$\overline{CM_6} = \frac{b \cdot \overline{CM_5}}{a} = \frac{a^2 - c^2 + \lambda c^2}{a}$$

$$\overline{BM_6} = a - \frac{a^2 - c^2 + \lambda c^2}{a} = \frac{c^2 - \lambda c^2}{a}$$

$$\overline{BM_7} = \frac{a\overline{BM_6}}{c} = c - c\lambda$$

$$\overline{AM_7} = c - (c - c\lambda) = \overline{AM_1}.$$

Aceasta probează că punctele M_7 şi M_1 sunt confundate.

* * *

Ne oprim aci cu cercetările. Desigur că se mai pot da la iveală încă multe alte proprietăţi şi rezultate relative la arii, perimetre etc. Se pot face şi extinderi în spaţiu. Apoi putem privi lucrurile din punct de vedere al Mecanicei, deoarece vectorii M_1M_2, M_2M_3,... al căror contur se închide, reprezintă un sistem de forţe în echilibru. Deci un domeniu vrednic de explorat pentru cine îşi va da puţină osteneală a o face.

VIRGIL GHIŢESCU.

GENERALIZAREA TEOREMEI DROZ-FARNY

Cu ocazia rezolvării problemei 3385 (G. M., XXXVII, 73), am enunţat teorema:

„Doi diametrii conjugaţi ai unei conici conjugate unui triunghiu ABC, taie laturile acestuia după trei segmente ale căror mijloace sunt colineare".

Mai general să găsim perechile de drepte trecând printr'un punct M şi satisfăcând condiţia DROZ-FARNY.

Fie:

$$M(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$$

$$D_1 \equiv p\alpha + q\beta + r\gamma = 0$$

$$D_2 \equiv l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$$

cele trei elemente, şi:

$$(1) \qquad p\alpha_0 + q\beta_0 + r\gamma_0 = 0$$

$$(2) \qquad l\alpha_0 + m\beta_0 + n\gamma_0 = 0$$

condiţiile ca (D_1) şi (D_2) să treacă prin punctul M. Aceste două drepte taie latura BC în punctele: $[o, -r, q]$ şi $[o, -n, m]$, al căror mijloc e:

$$[o, -n(q-r) - r(m-n) \quad , \quad m(q-r) + q(m-n)].$$

Condiţia ca aceste trei puncte să fie pe o dreaptă (D) se scrie final:

$$(3) \qquad [\Sigma p(m-n)]\left[\sum \frac{1}{l}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)\right] = 0.$$

Care se descompune în două condiţii:

$$(4) \qquad \Sigma p\,(m-n) = 0 \quad (D_1) \text{ şi } (D_2)$$

sunt paralele.

Trecând însă prin acelaşi punct M, ele se confundă

$$(5) \qquad \sum \frac{1}{p}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) = 0$$

(Δ_1) şi (Δ_2) isotomicele dreptelor (D_1) şi (D_2) sunt paralele.

„Condiția necesară și suficientă ca mijloacele segmentelor determinate de două drepte pe laturile unui triunghiu să fie colineare, este ca isotomicele dreptelor să fie paralele".

Mergem mai departe: Fiind dat punctul M și dreapta (D_1) să determinăm pe (D_2). Eliminăm pe l din ecuațiile (2) și (5) și căutăm valoarea raportului $\left(\frac{m}{n}\right)$.

Se găsește:

$$\left(\frac{m}{n}\right)_1 = \frac{q}{r}$$

(D_1) și (D_2) se confundă

$$\left(\frac{m}{n}\right)_2 = \frac{\gamma_0(r-p)}{\beta_0(p-q)}.$$

De unde:

$$(6) \qquad \frac{l\alpha_0}{q-r} = \frac{m\beta_0}{r-p} = \frac{n\gamma_0}{p-q}$$

și dreapta (D_2) e determinată:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0}(q-r) + \frac{\beta}{\beta_0}(r-p) + \frac{\gamma}{\gamma_0}(p-q) = 0$$

diametrul conjugat al dreptei (D_1) față de conica (Γi) $\sum \frac{\alpha^2}{\alpha_0^2} = 0$, conjugată lui ABC și de centru M. Generalizarea dată la locul citat.

Fie:

$$(\Delta_1) \equiv \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} + \frac{\gamma}{r} = 0$$

$$(\Delta_2) \equiv \alpha\left(\frac{1}{p} + \lambda\right) + \beta\left[\frac{1}{q} + \lambda\right] + \gamma\left[\frac{1}{r} + \lambda\right] = 0$$

două drepte paralele, isotomice ale dreptelor (D_1) și (D_2). Când (Δ_2) variază odată cu coeficientul λ, (D_2) înfășoară parabola

$$(\Gamma) \qquad \Sigma \sqrt{\alpha p(q-r)} = 0$$

înscrisă triunghiului ABC. Centrul (dela infinit) ale acestei parabole fiind punctul:

$$\frac{\alpha}{p(q-r)} = \frac{\beta}{q(r-p)} = \frac{\gamma}{r(p-q)}$$

care verifică pe (Δ_1), rezultă că axa parabolei (Γ) e paralelă cu direcţia comună a dreptelor (Δ_1) şi (Δ_2). Rezultă:

„Două tangente unei parabole înscrisă într'un triunghiu taie laturile acestuia după trei segmente ale căror mijloace sunt colineare".

Directoarele parabolelor (Γ) trec prin ortocentrul H, două drepte perpendiculare duse prin H sunt deci tangente unei aceleaşi parabole înscrise. Regăsim astfel teorema particulară DROZ-FARNY.

Comparând cele două căi pentru a găsi drepte (D_1) şi (D_2), rezultă metoda de a construi direcţiunile axelor conicelor conjugate şi de centru dat.

Ducem dreapta HM. Simetrica dreptei HM faţă de latura BC taie cercul ABC: unul pe înălţimea AH şi altul în focarul F al parabolei (Γ) de directoare HM. [F e punctul a cărui dreaptă a lui SIMSON e paralelă cu HM]. Insă tangentele duse dintr'un punct la o parabolă fac unghiuri egale cu dreapta ce uneşte acest punct cu focarul parabolei. Dacă ducem deci din M drepte înclinate cu 45^0 pe MF, acestea vor fi axele conicei (Γi) conjugată lui ABC şi de centru M.

Considerând transformarea isotomică, se poate enunţa mai general:

„Dacă mijloacele segmentelor determinate de două drepte pe laturile unui triunghiu sunt colineare, atunci şi punctele care împart aceste segmente în acelaşi sens şi raport sunt colineare. Când raportul variază, dreapta celor trei puncte înfăşoară parabola înscrisă triunghiului şi tangentă celor două drepte".

Problema se poate privi şi din alt punct de vedere. Perechile de drepte (D_1) şi (Δ_1), (D_2) şi (Δ_2) sunt asimptotele a două hiperbole circumscrise triunghiului ABC. Deci:

„Dacă două hiperbole circumscrise triunghiului ABC au câte o asimptotă paralele între ele, celelalte două taie laturile triunghiului după trei segmente ale căror mijloace sunt colineare".

Mai departe: când (D_1) şi (D_2) trec prin punctul $M(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, (Δ_1) şi (Δ_2) înfăşoară conica $\Sigma \sqrt{\alpha\alpha_0} = 0$ înscrisă triunghiului ABC şi de centru:

$$\frac{\alpha}{\beta_0+\gamma_0} = \frac{\beta}{\gamma_0+\alpha_0} = \frac{\gamma}{\alpha_0+\beta_0}.$$

Dreptele (Δ_1) şi (Δ_2) fiind paralele, sunt tangente conicei pe care o înfăşoară, la extremităţile unui diametru. Dreapta (Δ) a celor trei mijloace determinate de (Δ_1) şi (Δ_2) va trece prin centrul conicei de mai sus. Isotomica lui (Δ), care e dreapta DROZ-FARNY a segmentelor determinate de (D_1) şi (D_2), va înfăşura deci conica:

$$\Sigma \sqrt{\alpha(\beta_0+\gamma_0)} = 0$$

înscrisă triunghiului ABC şi de centru:

$$\frac{\alpha}{2\alpha_0+\beta_0+\gamma_0} = \frac{\beta}{\alpha_0+2\beta_0+\gamma_0} = \frac{\gamma}{\alpha_0+\beta_0+2\gamma_0}.$$

Rezultate deja obţinute pentru cazul dreptelor (D_1) şi (D_2) perpendiculare şi trecând prin H.

Dacă p_1, q_1, r_1 şi p_2, q_2, r_2 sunt distanţele vârfurilor A, B, C la dreptele (D_1) şi (D_2), în afară de relaţia ce face obiectul problemei 3385, mai avem:

$$(7) \qquad \frac{\overline{BC}}{p_1\overline{A_1A_2}} + \frac{\overline{CA}}{q_2\overline{B_1B_2}} + \frac{\overline{AB}}{r_1\overline{C_1C_2}} = 0$$

şi analoaga ei.

Enunţul just al teoremei particulare indicată de subsemnatul în locul citat este:

„Dându-se două drepte ale lui SIMSON perpendiculare şi trecând prin M, dreptele (D_1) şi (D_2) trecând prin M şi simetrice faţă de primele, taie laturile triunghiului ortic după trei segmente ale căror mijloace sunt colineare. Dacă δ_1, δ_2, δ_3 sunt trei segmente, avem relaţia:

$$(8) \qquad \frac{\overline{BC}}{\delta_1}\cos A + \frac{\overline{CA}}{\delta_2}\cos B + \frac{\overline{AB}}{\delta_3}\cos C = 0.$$

Pentru a termina, dau următoarea relaţie generală care poate deschide alte căi de cercetare:

Fie conica

$$p\alpha^2 + q\beta^2 + r\gamma^2 + 2l\beta\gamma + 2m\gamma\alpha + 2n\alpha\beta = 0$$

şi A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, punctele unde aceasta taie laturile triunghiului ABC. Condiţia ca mijloacele segmentelor A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 să fe colineare, e:

$$(9) \quad (p-n)(q-l)(r-m) + (p-m)(q-n)(r-l) = 0.$$

ING. ION VASILIU.

RAPORT

PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „SPIRU HARET"

Subsemnaţii membri în Comisiunea pentru premiul „Spiru Haret", cercetând ultimul volum al *Gazetei Matematice* dela 15 Septemvrie 1939 la 15 Septemvrie 1940, nu am găsit nici un articol şi nici o notă de Mecanică.

In concluzie, conform articolului 4 al regulamentului premiului, decidem ca valoarea premiului să se adauge la premiul anului sau anilor viitori.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „SPIRU HARET"

G. G. CONSTANTINESCU, C-DOR I. LINTEŞ,
ING. AL. STOENESCU.

Acest raport a fost citit şi aprobat în Adunarea Generală din 20 Februarie 1941.

NOTE MATEMATICE

55. *Asupra problemei 1146.* D-l Locotenent SILVIU M. ŢILENSCHI ne atrage atenţiunea că soluţia publicată problemei 1146, dată la pag. 77 din Anul XLVI, nu este complectă şi ne trimite o notă în acest sens. Nici soluţia D-sale nu este complectă.

Autorul acelei probleme, D-l GHEORGHE VASILE, mi-a trimis mie enunţul acestei probleme, pe care eu l'am modificat în modul cum a fost publicat, fixând anume puncte pe pământul ţării noastre, şi cum coordonatele geografice ale celor trei oraşe nu le-am găsit la fel în diferite isvoare ce am consultat şi mai ales altitudinile lor, am pus în enunţ ca rezolvitorii să se adreseze pentru ele corespondenţilor *Gazetei Matematice* din acele localităţi.

Această problemă îmi fusese repartizată mie pentru cercetarea soluțiunilor, pe măsură ce veneau. Pe toate le-am respins căci nu corespundeau enunțului, neținând în special seama de altitudinile localităților, adică de înălțimea lor deasupra nivelului mării. In acest caz condițiunile problemei se schimbă cu totul. Așa de exemplu, în București, se pot găsi puncte în albia Dâmboviței, din care să se vază trei biserici fără a ne ridica deasupra turlelor lor în aer.

De câțiva ani soluțiile acestei probleme se repartizează altui redactor al *Gazetei Matematice*, bătrânețea cerându-mi să las din ce în ce din obligațiunile ce-mi luasem la *Gazeta Matematică*.

Soluția problemei trebue așteptată în sensul în care a fost propusă; altfel se nedreptățesc numeroși rezolvitori anteriori cu soluții mai complecte decât cele primite acum în urmă. Dacă enunțul nu a fost destul de clar, răspunderea nepreciziunii rămâne în seama mea, care am modificat enunțul inițial al autorului.

I. IONESCU.

56. *Asupra problemei 3235.* Cu ocaziunea rezolvării acestei probleme, VASILE CRISTESCU ceruse o soluție pur geometrică. Urmând indicațiunile sale voiu da aci soluția cerută. Voiu rezolva mai întâiu următoarea problemă:

Se dau două drepte AB *și* CD *și pe ele respectiv punctele* M *și* N *așa că* AM/BM = CN/DN. *Pe dreapta* MN *se ia punctul* P *care împarte* MN *în același raport k, adică* PM/PN = *k. Se cere locul geometric al punctului* P.

Ducem CB′ egal și paralel cu AB și luăm M′ pe CB′ așa ca CM′/B′M′ = AM/BM. Ducem M′N și luăm pe el punctul P′ așa să dividă NM′ ca și P pe NM_0, PP′ e evident paralelă cu MM′ și în același raport ca NP către NM. Când M și N se mișcă, MM′ rămâne constant ca egală cu BB′ și deci și PP′ rămâne constantă ca fiind în raport dat cu MM′. De aci reese că locul lui P′ este locul lui P deplasat paralel cu BB′ și cu aceeași distanță. Cunoscând locul lui P′ putem dar deduce pe al lui P. Chestiunea s'a redus astfel la înlocuirea segmentelor neconcurente AB, CD cu segmentele concurente CB′, CD.

I. I.

57. *Numere interesante cu 10 cifre diferite* [1]). Pentru N_6 începând cu 7 am găsit următoarele 103 soluţiuni:

N_6	N	N_6	N
701 528 943	4 209 173 658	728 304 195	4 369 825 170
705 294 183	4 231 765 098	728 504 931	4 371 029 586
705 294 318	4 231 765 908	728 510 493	4 371 062 958
705 298 431	4 231 790 586	728 549 301	4 371 295 806
705 329 418	4 231 976 508	728 549 310	4 371 295 860
708 495 231	4 250 971 386	729 304 851	4 375 829 106
709 451 823	4 256 710 938	729 310 485	4 375 862 910
709 452 183	4 256 713 098	729 850 431	4 379 102 586
709 452 318	4 256 713 908	729 851 043	4 379 106 258
709 453 218	4 256 719 308	729 854 301	4 379 125 806
709 485 123	4 256 910 738	729 854 310	4 379 125 860
709 845 231	4 259 071 386	730 428 195	4 382 569 170
710 528 493	4 263 170 958	730 429 851	4 382 579 106
710 849 523	4 265 097 138	730 492 851	4 382 957 106
710 984 523	4 265 907 138	730 849 521	4 385 097 126
712 309 485	4 27 [illegible] 856 910	730 945 182	4 385 671 092
715 028 943	4 290 173 658	730 948 512	4 385 691 072
715 289 430	4 291 736 580	730 984 521	4 385 907 126
718 094 532	4 308 567 192	731 042 985	4 386 257 910
718 209 453	4 309 256 718	731 049 285	4 386 295 710
718 309 452	4 309 856 712	731 084 952	4 386 509 712
719 283 045	4 315 698 270	731 098 452	4 386 590 712
719 328 045	4 315 968 270	731 209 485	4 387 256 910
719 504 283	4 317 025 698	731 809 452	4 390 856 712
719 504 328	4 317 025 968	731 928 045	4 391 568 270
719 542 830	4 317 256 980	731 950 428	4 391 702 568
720 849 531	4 325 097 186	731 954 280	4 391 725 680
720 945 183	4 325 671 098	732 804 195	4 396 825 170
720 945 318	4 325 671 908	780 423 195	4 682 539 170
720 948 513	4 325 691 078	780 432 195	4 682 593 170
720 984 531	4 325 907 186	781 923 045	4 691 538 270
721 084 953	4 326 509 718	781 950 423	4 691 702 538
721 098 453	4 326 590 718	781 954 230	4 691 725 380
721 309 485	4 327 856 910	782 195 043	4 693 170 258
728 043 195	4 368 259 170	782 304 195	4 693 825 170
728 195 043	4 369 170 258	783 042 195	4 698 253 170

1) Urmare la Nota dela pag. 527, *Gazeta Matematică*, Vol. XLVI.

N_6	N	N_6	N
784 920 531	4 709 523 186	792 310 485	4 753 862 910
784 921 053	4 709 526 318	794 182 053	4 765 092 318
784 931 052	4 709 586 312	794 183 052	4 765 098 312
785 049 231	4 710 295 386	794 205 183	4 765 231 098
785 104 923	4 710 629 538	794 205 318	4 765 231 908
785 492 301	4 712 953 806	794 318 052	4 765 908 312
785 492 310	4 712 953 860	794 320 518	4 765 923 108
789 420 153	4 736 520 918	798 420 531	4 790 523 186
789 420 315	4 736 521 890	798 421 053	4 790 526 318
789 421 503	4 736 529 018	798 430 521	4 790 583 126
789 421 530	4 736 529 180	798 431 052	4 790 586 312
789 430 152	4 736 580 912	798 504 231	4 791 025 386
789 430 215	4 736 581 290	798 510 423	4 791 062 538
789 431 502	4 736 589 012	798 542 301	4 791 253 806
789 431 520	4 736 589 120	798 542 310	4 791 253 860
792 304 851	4 753 829 106		

G-L GH. BUICLIU.

58. *Asupra problemei 2552.* Se poate rezolva această problemă fără a mai aplica criteriul lui RAABE-DUHAMEL. Păstrând notaţiile din G. M. Vol. XLIV, p. 430, relaţia

$$(1) \qquad mS_n = 1 - [m + r(p + n)]\, u_{n+1}$$

ne arată că

$$mS_n < 1 \quad \text{sau} \quad S_n < \frac{1}{m}$$

căci seria e cu termeni pozitivi. Sumele parţiale fiind mărginite seria e convergentă. Dar, pentru o serie convergentă cu termeni pozitivi avem totdeauna

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = 0 \quad , \quad \underline{\lim}\; nu_{n+1} = 0$$

şi

$$\overline{\lim}\, S_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Din (1) se deduce deci că

$$S = \overline{\lim}\, S_n = \frac{1}{m}\cdot$$

Am ţinut să fac această observaţie deoarece la soluţia acestei probleme din G. M. loc. cit. se afirmă că *seria fiind convergentă avem*

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} nu_n = 0$$

ceea ce nu e adevărat în general. De ex. (2) nu are loc pentru seria în care

$$u_n = \frac{1}{n^2}, \qquad \text{dacă } n \text{ nu este un patrat perfect}$$

$$u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \qquad \text{dacă } n \text{ este patrat perfect.}$$

Relaţia (2) este adevărată pentru orice serie convergentă cu termenii pozitivi şi *nedescrescători.*

T. P.

59. *Asupra problemei 4232.* 1. In soluţia acestei probleme, G. M. — XLIV — 198, când s'a determinat condiţia de divizibilitate a expresiei E prin P^2, s'a afirmat că derivata sa E′ trebue să se dividă prin derivata lui P. Or această afirmaţie este inexactă, şi dacă totuşi ea a fost verificată în cazul problemei 4232, aceasta se datoreşte unor împrejurări fericite.

Intr'adevăr, trebuind să avem

$$E = P^2Q$$

rezultă prin derivare

$$E' = P\{2P'Q + PQ'\}$$

ceea ce arată că E′ trebue să se dividă prin P iar nu prin derivata patratului acestui polinom.

2. In al doilea rând trebue observat că odată determinate condiţiunile de divizibilitate prin $t - \alpha$ nu mai trebuiau căutate cele prin $t - \alpha^2$, căci α şi α^2 fiind numere imaginare conjugate, iar expresia E având coeficienţi reali, dacă este divizibilă prin $t - \alpha$, ea va fi divizibilă şi prin $t - \alpha^2$.

3. Condiţiunile de divizibilitate se mai pot obţine şi pe altă cale, care are avantajul că furnizează şi expresia polinomului cât atunci când ea e dorită.

Astfel dacă admitem că n este par de forma $2m$, expresia E se poate scrie

$$(P + xy)^m + x^{2m} + y^{2m}$$

şi ea va fi evident divizibilă prin P dacă şi expresia

$$x^{2m} + x^m y^m + y^{2m}$$

va fi divizibilă prin acest polinom.

Or această ultimă expresie se poate scrie

$$P\{x^{2m-2} - x^{2m-3}y - xy^{2m-3} + y^{2m-2}\} + x^{2m-3}y^3 + x^m y^m + x^3 y^{2m-3}$$

şi din aproape în aproape se deduce că este necesar a se determina p astfel ca expresia

$$x^{2m-3p}y^{3p} + x^m y^m + x^{3p}y^{2m-3p}$$

să fie egală cu P amplicat printr'o putere a produsului xy. Se obţine $m = 3p \pm 1$ ceeace ne dă condiţia de divizibilitate

$$\boxed{n = 6p \pm 2}.$$

Dacă însă n este impar de forma $2m + 1$, faptul că expresia E se scrie

$$(x + y)[P + xy]^m - (x^{2m+1} + y^{2m+1})$$

ne arată că va trebui să căutăm condiţia de divizibilitate prin P a expresiei

$$-(x^m - y^m)(x^{m+1} - y^{m+1})$$

care va fi evidentă divizibilă prin p dacă numărul termenilor din una oricare din expresiile

$$x^{m-1} + x^{m-2}y + \ldots + xy^{m-2} + y^{m-1}$$
$$x^m + x^{m-1}y + \ldots + xy^{m-1} + y^m$$

este un multiplu de 3. Rezultă deci că

$$\boxed{n = 6p \pm 1}$$

este condiţiunea de divizibilitate căutată.

4. In privinţa determinării condiţiilor de divizibilitate prin P^2 socot interesant de a determina în primul rând forma generală a puterilor polinomului P, cât şi forma lui n pentru ca divizibilitatea să fie posibilă.

Observând că E va fi divizibil prin $P^{\lambda+1}$ dacă derivata de ordinul λ a expresiei E, luată în raport cu t va fi divizibilă prin P.

Expresia acestei derivate, este

$$A_n^{\lambda}\{(t+1)^{n-\lambda}+(-1)^n t^{n-\lambda}\}$$

A_n^{λ} fiind simbolul aranjamentelor.

Dacă avem în vedere că

$$\alpha+1=-\alpha^2 \quad , \quad \alpha^3=1$$

α fiind rădăcina cubică a unității, această expresie se scrie

$$(-1)^{n-\lambda} A_n^{\lambda} \alpha^{n-\lambda}\{\alpha^{n-\lambda}+(-1)^{\lambda}\}$$

așa încât conchidem că ordinul de derivare λ trebue să fie impar iar $n-\lambda$ un multiplu de 3. Rezultă deci că

$$\boxed{n=2p+3r+1} \quad , \quad \boxed{\lambda=2p+1} \; .$$

Pentru cazul primei derivate, trebue să luăm $p=0$ și atunci apropiind rezultatul de cel precedent, găsim condițiunile căutate

$$\boxed{n=6p+1} \quad , \quad n=\boxed{6p-2} \; .$$

Este bine de observat că valorile lui n pentru cari expresia E este divizibilă prin o putere pară a polinomului P, formează o progresie aritmetică al cărei prim termen este unitatea, iar rația este 3.

Puterile impare ale polinomului P nu divid expresia E decât dacă este vorba de prima putere.

G. G. CONSTANTINESCU.

BIBLIOGRAFIE

D. BARBILIAN. *Zur Axiomatik der projektiven ebenen Ringgeometrien.* I. Teil. (Erweiterte Fassung eines Vortrages auf der Jahresversammlung in Baden-Baden). Lipsca 1940.

D. BARBILIAN. Idem. II Teil. Lipsca 1941.

Boletin Matematico. Iunie 1940. Buenos-Aires, 1940. Complimentul datorii către țară, de B. BAIDAFF. Considerațiuni practice asupra dreptei lui SIMSON, de C. BORȘ. Propietățile triunghiului care se conservă în limita colineară, de V. G. CAVALLIERO. Privire istorică asupra teorii numerelor, de T. LALESCU.

Idem. Iulie 1940. Renovare de istorie intensă, de B. BAIDAFF. Un punct mediu de paralelă certă, de B. I. BAIDAFF.

Idem. August 1940. ARCHIMEDE, de D. E. SMITH, tradus de B. I. B. Celor slabi, de B. I. BAIDAFF. Ecuaţii diferenţiale de primul ordin invariant de M. O. GONZALES. Distanţa dela un punct la o dreaptă, de B. I. BAIDAFF. Cum se rezolvă ecuaţiile de gradul III şi IV, de O. CATANEV.

Idem. Septemvrie 1940. NICOLAS COPERNIC, de D. E. SMITH (tradus de B. I. B.). Suma produselor formate cu combinări de numere date, de T. BANUL SOUTO.

Idem. Octomvrie 1940 FRANCIS VIÈTE de D. E. SMITH (tradus de B. I. B.). Propoziţiile lui GOLDBACH şi WARING, de R. NOGUERA. Un exemplu de cuartificare a mecanicii clasice şi mişcarea pe o cardioidă, de T. VESCAN. Divizibilitatea numerelor terminate cu 1, 3, 7, 9, de B. I. BAIDAFF.

Idem. Noemvrie 1940. GALILEU GALILEI, de D. E. SMITH (tradus de B. I. B.). Privitor la o demonstrare a celei de a doua teoremă a lui PICARD, de C. C. DASEN. Asupra funcţiunilor întregi, de A. C. M. OVERIM.

Idem. Decemvrie 1940. JEAN NEPER, de D. E. SMITH (tradus de B. I. B.). Anul al 13-lea al revistei Boletin Matematico, de B. I. BAIDAFF. Opera Buletinului Matematic în numere. Asupra celei de a doua teoremă a lui PICARD, de C. BIGGERI. Egalitate între funcţiuni şi medie.

Idem. Martie 1941. Curenţi circonferenţi R. DESCENT, de D. E. SMITH (tradus de B. I. B.). Prima aniversare a Revistei de Matematică, de B. I. BAIDAFF.

Idem. Mai 1941. G. G. LEIBNITZ, de D. E. SMITH, traducere de T. G. GONZALES. Deducere elementară a funcţiei lui RODRIGUEZ, de E. T. BENEDICT. Cercuri în un triunghiu, de B. I. BAIDAFF. Relaţiuni între elementele unui tetraedru, de G. ŢIŢEICA, traducere de B. I. B.

Revista Matematică din Timişoara. Iulie 1941. Anumite configuraţii liniare date reprezentate practic, de V. ALACI.

CERERI

304. De când egalitatea a două rapoarte într'o proporţie s'a început a se arăta în Aritmeticile noastre prin semnul = în loc de semnul cu patru puncte :: ?

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

PAUL MANSION. Esquises biografiques, extraites du Liber Memorialis de l'Université de Gand. Gand 1913.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PAUL MANSION. Notice sur JOSEPH-MARIE DE TILLY. Gand 1913.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE [1])

PROBLEMA 2439. *Să se demonstreze prin coordonate grafostatice, că orice diagonală a unui patrulater complect este divizată armonic de celelalte două diagonale.*

P. TH. IONESCU.

Pentru definiția coordonatelor grafostatice, a se vedea nota D-lui I. IONESCU din *Gazeta Matematică*, Vol. XXI, pag. 212.

Să considerăm triunghiul ABC și un punct P de coordonate grafostatice α, β, γ, considerate pe laturile BC, CA, AB. Acestui punct îi corespund trei puncte P_a, P_b, P_c de coordonate grafostatice respectiv $(-\alpha, \beta, \gamma)$. $(\alpha, -\beta, \gamma)$, $(\alpha, \beta, -\gamma)$. Presupunând că P este interior triunghiului ABC, se vede că $P_a P_b P_c$ este circumscris acestui triunghiu. In adevăr, rezultantele eforturilor $(-\beta, \gamma)$ și $(\beta, -\gamma)$, de exemplu, sunt egale și direct opuse. Aceste rezultante având direcția transversalelor AP_b și AP_c, urmează că punctele P_b, A, P_c sunt colineare. La fel și celelalte grupe de puncte P_b, B, P_a și P_a, C, P_b.

Să considerăm acum, invers, un triunghiu $P_a P_b P_c$ circumscris triunghiului ABC și omologic cu el, centrul de omologie fiind P. Dacă coordonatele grafostatice ale lui P față de triunghiul ABC sunt (α, β, γ), atunci P_a, P_b, P_c au drept coordonate grafostatice respectiv $(-\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha, -\beta, \gamma)$, $(\alpha, \beta, -\gamma)$. In adevăr, să considerăm punctele P_b, P_c ale căror coordonate grafostatice să le însemnăm cu $(\alpha, \beta_1, \gamma)$ și $(\alpha, \beta, \gamma_1)$; rezultantele eforturilor β_1, γ și β, γ_1 sunt egale, căci le face echilibru o aceeași forță. Pe de altă parte eforturile β_1 și β, γ și γ_1 având aceleași direcțiuni, urmează că ele sunt egale și de sens contrare. Deci

$$\beta_1 = -\beta \quad \text{și} \quad \gamma_1 = -\gamma$$

ceea ce demonstrează că coordonatele grafostatice ale punctelor P_a și P_c sunt $(\alpha, -\beta, \gamma)$ și $(\alpha, \beta, -\gamma)$.

Laturile triunghiului ABC *și transversalele care pleacă din același vârf formează un fascicol armonic.* Fie A' intersecția lui AC cu BP_b. Luăm momentele eforturilor (β, γ) și $(-\beta, \gamma)$ față de punctele P și P_b.

1) Intre rezolvitorii problemei 5389, publicată în numărul trecut, se adaugă și D-nii: I. BADEA (Brașov) și R. VOINEA (Craiova).

Avem

$$\overline{PA} \cdot \beta = \overline{PB} \cdot \gamma \quad ; \quad \overline{P_b A} \cdot \beta = \overline{P_b B} \cdot \gamma$$

$$\therefore \quad \frac{\overline{P_b A'}}{\overline{P_b B}} = \frac{\overline{PA'}}{\overline{PB}}$$

care arată că punctele B, P, A', P_b formează o diviziune armonică. Dar $P_b P$ este o diagonală în patrulaterul complect $P_b CAP_c P_a P$ în care AC și $P_a P_c$ sunt celelalte diagonale. Deci proprietatea din enunțul problemei este demonstrată.

Această soluție este redijată, după soluția care a fost dată de propunătorul problemei în anul 1916. S'a mai primit o soluție cam confuză și semnată cu inițiale, care nu ne dau putința de a identifica pe autor.

G-L GH. B.

PROBLEMA 3873. *Să se rezolve în numere întregi ecuația*

$$x^3 + y^3 = z^2.$$

I. B. FLORESCU.

Ecuația de rezolvat se mai scrie

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = z^2$$

de unde se deduce că sunt de examinat 2 cazuri, după cum sumele $x + y$ și $x^2 - xy + y^2$ sunt sau nu, prime între ele.

Cazul 1°. $x + y$ *este prim cu* $x^2 - xy + y^2$. Problema revine la a rezolva în numere întregi sistemul

$$x + y = z'^2 \qquad (1)$$

$$x^2 - xy + y^2 = z''^2 \qquad (2)$$

unde produsul numerelor z', z'', prime între ele, este egal cu z.

Soluțiile întregi ale ecuației (2) sunt [1]):

$$x = m^2 - n^2 \qquad (3)$$

$$y = 2mn - n^2 \qquad (4)$$

$$z'' = m^2 - mn + n^2 \qquad (5)$$

In aceste formule x, y, z'' sunt presupuse prime între ele, altfel divizorul comun dispare în (2) prin simplificare.

Ducând pe (3) și (4) în (1), rămâne de rezolvat în numere întregi ecuația

$$m^2 + 2mn - 2n^2 = z'^2 \qquad (6)$$

---

1) *Mathesis*. LI, pag. 274 și 332.

Soluțiile întregi ale ecuației de forma

$$x^2 + axy + by^2 = z^2 \qquad (7)$$

sunt date de [1]):

$$x = m^2 - bn^2 \ ; \ y = 2mn + an^2 \ ; \ z = m^2 + amn + bn^2.$$

Aplicând aceste formule găsim că soluțiile întregi ale ecuației (6) sunt

$$m = p^2 + 2q^2 \ ; \ n = 2pq + 2q^2 \ ; \ z' = p^2 + 2pq - 2q^2 \qquad (8)$$

Ducând aceste valori în (3), (4), (5), urmează că soluțiile ecuației date sunt

$$x = p^4 - 8pq^3$$

$$y = 4p^3q + 4q^4$$

$$z = z'z'' = (p^2 + 2pq - 2q^2)(p^4 + 6p^2q^2 + 4q^4 + 4pq^3 - 4p^3q).$$

Exemple numerice. $p = 3, q = 1$ și $p = 7, q = 1$ dau respectiv

$$57^3 + 112^3 = 1261^2 \quad \text{și} \quad 2345^3 + 1376^3 = 124501^2.$$

Cazul 2°. Fie

$$x + y = kz'^2 \quad \text{și} \quad x^2 - xy + y^2 = kz''^2.$$

Din prima se scoate

$$x \equiv -y \qquad (mod.\ k)$$

care dusă în a doua, dă

$$x^2 - xy + y^2 \equiv 3y^2 \equiv 0 \qquad (mod.\ k)$$

de unde rezultă $k=3$, și deci sistemul de rezolvat în cazul 2° este

$$x + y = 3z'^2 \qquad (9)$$

$$x^2 - xy + y^2 = 3z''^2 \qquad (10)$$

Ecuația (10) este un caz particular al ecuației generale

$$ax^2 + bxy + cy^2 = dz^2 \qquad (11)$$

ale cărei soluțiuni întregi sunt cunoscute [2]) și date de:

$$x = m(-2n^2 + 2np + p^2)$$

$$y = m(-n^2 - 2np + 2p^2)$$

$$z'' = m(n^2 - np + p^2)$$

n și p fiind întregi, primi între ei.

---

1) *Mathesis* LI, pag. 332.

2) DIKSON-BODEWIG. *Einführung in die Zahlentheorie*, 1931, pag. 39, 40.

Ducând pe x şi y în (9) unde x, y, z' sunt primi între ei mai trebue avut

$$x + y = 3p^2 - 3n^2 = 3z'^2$$

de unde se scoate

$$p^2 - n^2 = z^2$$

ecuaţie bine cunoscută.

Exemple numerice. $p = 5\ ;\ n = 3$ găsim $37^3 + 11^3 = 228^2$

$p = 5\ ;\ n = 4\ :\ 33^3 + (-6)^3 = 189^2$

$p = 13\ ;\ n = 5\ :\ 249^3 + 183^3 = 4644^2$

$p = 13\ ;\ n = 12\ :\ 193^3 + (-118)^3 = 2355^2.$

A. GLODEN
(Profesor, Luxemburg).

Notă. 1. D-l I. B. FLORESCU, propunătorul problemei a dat pentru cazul 1° soluţiile

$$x = x_1 d\ ,\ y = y_1 d\ ,\ z = z_1 d$$

$$\therefore \quad x_1^3 + y_1^3 = dz_1^2.$$

La un x_1 şi un y_1 dat se poate face totdeauna să corespundă un d şi un z_1, care în orice caz poate fi 1. Exemplu:

$$x_1 = 7\ ;\ y_1 = 5\ \therefore\ x_1^3 + y_1^3 = 343 + 125 = 468 = 4 \times 9 \times 13.$$

Se poate lua

$z_1 = 1$ cu $d = 468$; $z_1 = 2$ cu $d = 117$; $z_1 = 3$ cu $d = 52$ şi

$z_1 = 6$ cu $d = 13$

care conduc la soluţiile

$$(448 \times 7)^3 + (468 \times 5)^3 = (468^2)^2$$
$$(117 \times 7)^3 + (117 \times 5)^3 = (117^2 \times 2)^2$$
$$(52 \times 7)^3 + (52 \times 5)^3 = (52^2 \times 3)^2$$
$$(13 \times 7)^3 + (13 \times 5)^3 = (13^2 \times 6)^2.$$

D-sa a stabilit şi formulele

$$x = a^4 - 8ab^3\ ,\ y = 4b^4 + 4a^3b\ ,\ z = a^6 + 20a^3b^3 - 8b^6$$

a impar şi prim cu b, sau

$$x = 4a^4 - 4ab^3\ ,\ y = b^4 + 8a^3b\ ,\ z = 8a^6 + 20a^3b^3 - b^6$$

b impar şi prim cu a.

Pentru cazul 2°, a dat următoarele 2 grupe de formule:

$$x = 9m^4 - 12m^3n + 6m^2n^2 - 4mn^3 + n^4$$

$$y = 12m^3n - 12m^2n^2 + 4mn^3$$

$$\pm z = 27m^6 - 54m^5n + 45m^4n^2 - 15m^2n^4 + 6mn^5 - n^6$$

şi

$$x = 3m^4 + 6m^2n^2 - n^4$$

$$y = -3m^4 + 6m^3n^2 + n^4$$

$$z = 6mn(3m^4 + n^4).$$

2. O soluţie parţială şi particularizată s'a primit la 2 Iulie 1930 dela D-l M. VELEA (pe atunci student la Universitatea din Cluj).

3. D-l A. GLODEN, dă următoarele formule

$$x = 4m(m^3 + \lambda n^3)$$

$$y = n(\lambda n^3 - 8m^3)$$

$$z = \lambda^2 n^6 + 20\lambda m^3 n^3 - 8m^6$$

pentru rezolvarea în numere întregi a ecuaţiei

$$x^3 + \lambda y^3 = z^2.$$

4. Problema 3873 şi cea dela 3. precedent, sunt cazuri particulare a rezolvării în numere întregi a ecuaţiei

$$x^3 + ax^2y + bxy^2 + cy^3 = t^2 \qquad (12)$$

a cărei soluţie este dată la pag. 58 a lucrării *Analyse Indéterminée* par. R. D. CARMICHAEL (1924), unde se găseşte:

$$t = h(\alpha, 2mn, 2m)$$

$$x = \alpha^2 + 8cm^2n + 4acm^2$$

$$y = 4\alpha m - 8bm^2n + 4cm^2 - 4abm^2$$

$$\alpha = bm - a^2m - 2amn - mn^2$$

$$h(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^3 + a\alpha^2\beta + b\alpha\beta^2 + c\beta^3 + (a^2 - 2b)\alpha^2\gamma + (b^2 - 2ac)\alpha\gamma^2 + ac\beta^2\gamma + bc\beta\gamma^2 + c^2\gamma^3 + (ab - 3c)\alpha\beta\gamma.$$

5. Ca o aplicaţie a celor dela 4 precedent, se poate rezolva în numere întregi ecuaţia

$$x^3 - y^3 = z^2$$

propusă de D-l G. FISTIÉ sub numărul 3119, la pag. 52, Vol. LIII din *Mathesis*, şi nerezolvată încă.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4181. *La 1879, pentru a putea populariza iluminatul electric,* EDISON *a fixat prețul de vânzare al unui bec la 40 cenți, independent de costul de fabricație. In primul an costul de fabricație al unui bec a fost de 1 dollar și 10 cenți. In al doilea an costul de fabricație a scăzut la 70 cenți, dar producția a crescut, așa că,* EDISON *a pierdut de 2 ori mai multe parale ca în primul an. In al treilea an prețul de fabricație a scăzut la 50 cenți; producția crescând și mai mult,* EDISON *a pierdut cu 50% mai mult decât pierduse la un loc în primii 2 ani. In al patrulec an însă a scăzut prețul de fabricație la 37 cenți și a reușit într'un an să-și scoată toată paguba celor trei ani precedenți.*

Se întreabă câte becuri a fabricat EDISON *anual, în cei patru ani, știind că a cheltuit în total 3.055.200 dollari pentru fabricarea becurilor?*

(Enunț completat). ION S. ANTONIU.

Soluție dată de Domnul C. I. CHIRIAC (Școala Navală).

Din enunț rezultă că EDISON pierde de fiecare bec

70 cenți în primul an

30 cenți în al doilea an

10 cenți în al treilea an

și câștigă 3 cenți la fiecare bec în al patrulea an.

Dacă notăm cu $2a$ pierderea din primul an, atunci pierderea în al doilea an va fi $4a$, iar în al treilea an $9a$; câștigul în cel de al patrulea an este $15a$.

Fie n_1, n_2, n_3, și n_4 numărul becurilor fabricate în fiecare an. Avem imediat

$$n_1 = \frac{2a}{70}\ ,\quad n_2 = \frac{4a}{30}\ ,\quad n_3 = \frac{9a}{10}\ ,\quad n_4 = \frac{15a}{3}\cdot$$

Cum numărul de becuri fabricate în fiecare an trebue să fie un întreg, rezultă că a va trebui să fie un multiplu comun al numitorilor acestor expresii. Vom avea deci

$$a = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times k = 210k$$

k fiind un întreg pe care trebue să-l determinăm.

Pentru a determina pe k, trebue să evaluăm, pentru fiecare an, costul total de fabricaţie a becurilor. Deducem imediat:

$$C_1 = 110n_1 = 660k \text{ cenţi}$$
$$C_2 = 70n_2 = 1960k \text{ „}$$
$$C_3 = 50n_3 = 9450k \text{ „}$$
$$C_4 = 37n_4 = 38850k \text{ „}$$

sau
$$\frac{C_1}{660} = \frac{C_2}{1960} = \frac{C_3}{9450} = \frac{C_4}{38850} = k,$$

unde, făcând suma numărătorilor către suma numitorilor, deducem

$$\frac{\Sigma C_1}{50920} = \frac{305520000}{50920} = 6000 = k,$$

sumele fiind evaluate în cenţi. Deducem imediat

$$n_1 = 36000 \text{ becuri}$$
$$n_2 = 168000 \text{ „}$$
$$n_3 = 1134000 \text{ „}$$
$$n_4 = 6300000 \text{ „}$$

Observaţiuni. 1°. Enunţul iniţial al problemei nu conţinea suma totală a cheltuelilor de fabricaţie a becurilor, astfel că problema era nedeterminată şi nu se putea obţine decât forma numerilor care exprimă numărul total de becuri fabricat anual.

2°. Au stabilit aceasta Domnii: MARTIN S. ZIFF (aritmetic), JUSTIN A. AURIAN, MIHAIL M. CHIRIŢĂ, VASILE V. GHIOCEL, DIMITRIE MAVRODIN şi PANAIT C. MAZILU (algebric).

I. S. A.

PROBLEMA 4400. *Intre patru puncte* A, B, C, D, *pe o dreaptă avem relaţia*

$$\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} + \frac{1}{\overline{BC}} + \frac{1}{\overline{BD}} = 0.$$

Ce se poate spune despre poziţia relativă a acestor patru puncte?

MIRON NICOLESCU.

Soluţie.

1°. Fie ABCD o cuartă de puncte, care satisface relaţiei date şi pe care s'o presupunem întâi nesingulară. Notăm cu A' şi B' respectiv conjugatele punctelor A şi B faţă de CD. Cuartele AA'CD şi BB'CD, fiind armonice, avem:

$$\frac{2}{\overline{AA'}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} \qquad \frac{2}{\overline{BB'}} = \frac{1}{\overline{BC}} + \frac{1}{\overline{BD}}$$

astfel că relaţia iniţială devine:

$$(r) \qquad \frac{1}{\overline{AA'}} + \frac{1}{\overline{B'B}} = 0.$$

Şi cum $\overline{AA'} \neq \infty$, căci în caz contrar am avea şi $\overline{BB'} = \infty$ şi cuarta ar fi singulară, rezultă:

$$(r') \qquad \overline{AA'} + \overline{BB'} = 0.$$

Acum construcţia efectivă a cuartei este imediată. Luăm punctele A, B oricum, apoi A', B' satisfăcând relaţiei (r'). Un cerc ortogonal cercurilor de diametre AA', BB' determină pe dreaptă punctele C şi D. Punctele C şi D sunt reale, dacă cercurile (AA'), (BB') sunt în situaţie hiperbolică.

Se observă că avem două poziţii relative distincte. Una corespunde cazului, când cercurile (AA') şi (BB') sunt diferite. Cercurile fiind egale, segmentele AB şi CD au acelaşi mijloc. Cealaltă se obţine, când $A' = B$ şi $B' = A$. Cercurile se confundă, iar punctele C, D sunt două puncte oarecare conjugate faţă de AB. Relaţia dată caracterizează astfel — în cazul nesingular — cuarta simetrică şi cea armonică.

2⁰. In cazul singular trebue să observăm că nu putem avea decât $A = B$ sau $C = D$. Vom considera numai cazul $A = B$, celălalt reducându-se la acesta printr'o schimbare de notaţie. Relaţia iniţială devine pentru cuarta singulară:

$$\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = 0.$$

Dacă cuarta nu are puncte la înfinit ea este de natura simetricei: un punct dublu şi două puncte simetrice faţă de el. Dacă are şi puncte la infinit atunci avem două cazuri: o cuartă cu un punct dublu la infinit A şi două puncte C, D la distanţă finită şi distincte, iar o altă cuartă cu un punct dublu A la infinit şi alt punct dublu la distanţă finită. In cazul singular se obţine deci cuarte de rangul I şi II.

ION ILIE-ŢIŢEICA
Student.

PROBLEMA 5165. *La alegerea pentru Camera Deputaţilor, se prezintă* c *candidaţi, pentru* l *locuri de deputat. Numărul alegătorilor este* a. *Fiecare alegător votează* l *candidaţi. Sunt proclamaţi aleşi primii* l *candidaţi, în ordinea numărului de voturi obţinute. Candidaţii care au obţinut acelaşi număr de voturi, sunt traşi la sorţi.*

Să se găsească cel mai mare număr de voturi pe care-l poate obţine un canditat fără a putea fi ales nici chiar prin tragerea la sorţi.

N. V. K.

Soluţie dată de D-nii: ST. CETĂŢEANU (Elev-inginer), IULIAN PETRESCU (Liceul Lazăr, Bucureşti), REISCHER L. HERMANN (Iaşi).

Vom presupune că fiecare alegător votează l candidaţi, cum cere enunţul, iar nu cum se face în practică, când un candidat îşi dă numai votul sie însuşi, ca să pună în inferioritate pe adversari. Numărul voturilor exprimate este atunci al, care să presupunem că se repartizează la cei l aleşi şi la primul căzut căruia, să-i zicem P. Să presupunem că ceilalţi $(c-l-1)$ candidaţi nu au nici un vot în plus peste votul lui, aşa ca să revină un număr cât mai mare de voturi celor aleşi şi lui P. Acestora le rămâne astfel $[la-(c-l-1)]=(la+l+1-c)$ voturi. Presupunând că aceste voturi se repartizează la cei $(l+1)$ candidaţi în mod egal, revenind fiecăruia un număr egal cu întregii cuprinşi în fracţia $(a+l+l+1-c)/(l+1)$. Pentru ca P să ia eventual parte la o tragere la sorţi, el trebue să aibă cel puţin 1 vot mai puţin decât acest număr, deci $[(a+l+l+1-c)/(l+1)-1]$ voturi. La aceste fracţii, luându-se numai partea întreagă, restul de voturi neutilizate se vor da celor aleşi.

Exemplu. Fie 20 000 alegători, şi 16 candidaţi pentru 8 locuri de deputat. Cei aleşi vor avea

$$(20\ 000\times 8+8+1-16)/9=159\ 993/9=17\ 777.$$

Primul căzut va avea 17 776, aşa că are mai puţin decât toţi cei aleşi deputaţi şi prin urmare nu poate participa nici la tragere la sorţi. Votul care se pierde se va da unuia din cei aleşi. Rezultatul votului este: un ales cu 17 778 voturi, şapte aleşi cu câte 17 777 voturi, unul căzut cu 17 776 voturi şi 7 căzuţi cu câte un vot.

PROBLEMA 5199. *Fie* ABCD *un patrulater înscris într'un cerc de centru* O *şi a, b, c, d mijloacele laturilor* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$. *Să se arate că cercurile* AOC, BOD, *aOc, bOd se întâlnesc încă într'un punct.*

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţia I-a dată de D-l PAUL DRĂGHICESCU (lic. mil. Iaşi). Fie E, F intersecţiile tangentelor la cercul O din A, C; respectiv B, D; fie încă G, H intersecţiile perechilor de laturi opuse AB, CD; AD, BC; cercul AOC trece prin E şi are centrul în mijlocul OE; la fel observăm că centrele tuturor cercurilor sunt mijloacele segmentelor $\overline{OE}$, $\overline{OF}$, $\overline{OG}$, $\overline{OH}$. Dar E, F, G, H sunt colineare [1]) deci şi centrele celor patru cercuri; ele fac parte dintr'un fascicol; trecând prin O trec şi prin simetricul lui faţă de linia centrelor.

Soluţia II-a dată de D-nii: IULIAN PETRESCU (lic. Lazăr, Bucureşti); MIRCEA L. RUSU (student, Bucureşti); GHEORGHE D. SBÂRNEA (lic. Tecuci); EUGEN VIJELIE (C. N. N. Filipescu, Predeal). Facem o transformare prin inversiune în raport cu cercul O; *a* devine *a'* diametral opus lui O în cercul AOB, deci polul laturei AB; A, B, C, D sunt atunci punctele de contact ale patrulaterului *a'b'c'd'* circumscris cercului O; dar dreptele AC, BD, *a'c'*, *b'd'* sunt concurente [2]); rezultă prin inversiune că cercurile AOC, BOD, *a'Oc'*, *b'Od'* mai au un punct comun.

Observare. 1. D-l M. AL. VASILESCU-STABU (lic. mil. Craiova) a dat o foarte bună soluţie directă.

2. D-l MIHAIL I. TREFILOV (lic. Brăila) demonstrează foarte bine problema, direct, arătând că toate cercurile considerate trec prin punctul MIQUEL al patrulaterului inscriptibil ABCD complectat. Se ştie că acest punct se află pe a treia diagonală şi că cercul MIQUEL conţine şi centrul O [3]). Prin soluţia D-lui M. TREFILOV, problema 5199 adaugă noui proprietăţi acestei figuri.

---

1) *Culegere de Probleme de Geometrie*, XI, 29.
2) C. d. P. XII, 63.
3) *Mathesis*, 1925–160 (V. CRISTESCU, J. NEUBERG).

PROBLEMA 5281. *Să se rezolve sistemul*

$$(1)\qquad \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ ax+by+cz+dt=0 \\ a^2x+b^2y+c^2z+d^2t=0 \\ a^5x+b^5y+c^5z+d^5z=0 \end{cases}$$

unde a, b, c, d *sunt rădăcinile ecuației*

$$(2)\qquad 4u^4-20u^3+33u^2+mu+4=0$$

iar m *un parametru. Se vor da soluțiile sistemului după valorile lui* m.

TH. ANGHELUȚĂ.

Soluție dată de D-nii: MIRCEA D. POPA (Lic. mil. Iași) și IONEL STAMATE (Student matematici, Timișoara).

Determinantul sistemului

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^5 & b^5 & c^5 & d^5 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)\times (d-b)(d-c)(\Sigma a^2+\Sigma ab)$$

este diferit de zero, dacă ecuația (1) are rădăcinile diferite, fiindcă factorul $\Sigma a^2+\Sigma ab=\frac{67}{4}\neq 0$. Prin urmare sistemul (1) are numai soluția zero, când ecuația (2) are rădăcinile distincte.

Rămâne de cercetat cazul când această ecuație are rădăcini multiple. Atunci ecuația (2) pusă sub forma

$$4u^3-20u^2+33u+m+\frac{4}{u}=0$$

și cu ecuația derivată

$$12u^2-40u+33-\frac{4}{u^2}=0$$

au rădăcini comune. Ultima ecuație este echivalentă cu următoarea

$$(u-2)(2u-1)(6u^2-5u-2)=0.$$

1°. 2 și $\frac{1}{2}$ sunt rădăcini comune deodată, pentru $m=-20$. In acest caz ecuația (2) devine

$$(u-2)^2(2u-1)^2=0$$

Luând $a=2,\ b=2,\ c=\frac{1}{2},\ d=\frac{1}{2}$, sistemul (1) este de rangul doi, adică determinantul principal are ordinul doi. Soluţiile sistemului sunt

$$x=-y\ ,\quad z=-t$$

sau soluţii analoage obţinute prin permutarea coeficienţilor a, b, c, d între ei.

2°. Ecuaţia (2) are o rădăcină dublă una din rădăcinile ecuaţiei $6u^2-5u-2=0$ şi două rădăcini simple. Coeficienţii a şi b fiind două rădăcini simple, iar c şi d egali cu rădăcina dublă, sistemul (1) este de rangul trei, căci putem lua ca determinant principal

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

soluţiile sistemului sunt $x=0,\ y=0,\ z=-t$, sau soluţii analoage atunci când permutăm rădăcinile a, b, c, d între ele [1]).

PROBLEMA 4062. *Să se rezolve în numere întregi ecuaţia:*

$$x^3+y^3+z^3=txyz.$$

I. IONESCU.

(Urmare dela pag. 593). Soluţia rezumată după a D-lui I. B. FLORESCU.

II. Metoda pe care o voiu expune aci dă numai soluţii particulare ale problemei, dar conduce la ele pe un drum mult mai rapid. Din ecuaţia dată deducem că (x^3+y^3) trebue să se împartă cu z. Să vedem dacă nu există soluţii în care $(x+y)$ să se dividă cu z.

Punem:

$$x+y=\beta z\ ,\quad \therefore\ y=\beta z-x,$$

---

1) TH. ANGHELUŢĂ, Curs de Algebră Superioară (litografiat 1940, pag. 116, Exerc. 25).

așa că ecuația dată devine:

$$(\beta^3 + 1)\, z^3 - 3\beta xz\,(\beta z - x) = tx\,(\beta z - x)\, z,$$

sau:

$$(\beta^3 + 1)\, z^3 - 3\beta xyz = txyz.$$

Această din urmă relație nu poate avea loc decât dacă $(\beta^3 + 1)$ se divide cu xy și în acest caz are loc totdeauna. Pentru a găsi soluții, procedăm astfel: Luăm o valoare pentru β, calculăm pe $(\beta^3 + 1)$ astfel în cât alegând doi divizori ai lui $(\beta^3 + 1)$ suma lor să fie divizibilă cu β. Astfel deducem imediat:

$$x = \beta^3 + 1 \quad , \quad y = -1 \quad , \quad z = 1,$$

caz particular al unei soluții generale găsite în partea I. Apoi

$$x = \beta^2 - \beta + 1 \quad , \quad y = -1 \quad , \quad z = \beta - 1,$$

$$x = \beta^2 - \beta + 1 \quad , \quad y = -(\beta + 1) \quad , \quad z = (\beta - 2).$$

Insă în afară de aceste soluții se găsesc o mulțime de altele când dăm valori particulare lui β. D-l I. B. FLORESCU a dat toate soluțiile pentru $\beta \leqslant 12$.

PROBLEMA 5331. *In actualul războiu bombardamentele aeriene de mare precizie se execută aproape numai în picaje foarte accentuate. Admitem că o navă merge cu 36 noduri, iar un avion inamic urmărind-o, o atacă în picaj, sub un unghiu de 80^0 față de orizontală, evoluția executându-se în sensul mersului navei și în planul de simetrie al ei.*

Presupunând că asvârlirea bombei se face când avionul e la o altitudine de 500 m., viteza de picaj fiind de 700 km./oră, se pune întrebarea, care va fi unghiul de vizare utilizat de aviator?

Rezistența aerului opusă bombei se va neglija.

CPT. C-DOR I. LINTEȘ.

Fie în general V_a viteza avionului pe panta de picaj, V_n viteza navei, α unghiul de pantă și h altitudinea dela care se asvârle bomba. In condițiunile problemei avem:

$$1) \quad \begin{cases} x = V_a \,.\, \cos\alpha \,.\, t \\ -h = -V_a \,.\, \sin\alpha \,.\, t - \dfrac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

Din a doua deducând pe t, vom determina pe x.

Dar în timpul duratei t nava va înainta cu:

2) $$x' = V_n \cdot t.$$

Prin urmare, vizarea trebueşte astfel făcută încât în clipa asvârlirei bombei, nava să se găsească cu x' înainte de punctul de cădere al bombei. Cu alte cuvinte, unghiul făcut de dreapta care uneşte avionul şi nava cu verticala β vor fi:

3) $$\operatorname{tg}\beta = \frac{x - x'}{h}.$$

Atunci unghiul de vizare va fi:

4) $$\varepsilon = 90^0 - \alpha - \beta.$$

In cazul problemei 5331 avem:

$V_a = 700$ km/oră $= 194{,}40$ m/sec.
$V_n = 36$ noduri $= 18{,}52$ „
$\alpha = 80^0$
$h = 500$ m.

Cum avem:

5) $$t = -\frac{V_a \cdot \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{V_a \cdot \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}}$$

urmează că:

$$t = 2{,}46 \text{ secunde}$$

apoi:

$$x = 82{,}9437 \quad \text{şi} \quad x' = 45{,}5592.$$

Prin urmare:

$$\operatorname{tg}\beta = 0{,}07477 \quad ; \quad \beta = 4^0\,17'.$$

Ceea ce ne dă:

$$\varepsilon = 90^0 - 80^0 - 4^0{,}17' = 5^0.43'.$$

* * *

A rezolvat complect problema D-l T. A. ŞERBAN (student-inginer).

D-nii: C. D. EFTIMIE şi M. STĂNCULESCU (elevi-ingineri) au rezolvat problema calculând numai unghiul β, care nu este cel de vizare, aşa cum se cere în enunţ.

In ultimul timp primim o soluţie complectă dela D-l EM. S. MODÂLCĂ (student-inginer, Bucureşti).

I. L.

PROBLEMA 5359. *Fie* D *şi* D_i *determinanţii ce se formează din matricea:*

$$M \equiv \begin{Vmatrix} \alpha_1 & x & x \ldots & x & x \\ x & \alpha_2 & x \ldots & x & x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\ x & x & x \ldots & \alpha_{n-1} & x \\ x & x & x \ldots & x & \alpha_n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Dacă notăm cu:

$$f(x) \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$$

avem relaţia:

$$f(x) \equiv (-1)^n \left[D - x \sum_1^n D_i \right].$$

CPT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

I°. Vom avea:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & x \ldots x & x \\ x & \alpha_2 \ldots x & x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ x & x \ldots \alpha_{n-1} & x \\ x & x \ldots x & \alpha_n \end{vmatrix} \text{ şi } D_i = \begin{vmatrix} \alpha_1 & x \ldots x & x\ x \ldots\ldots & x & x \\ x & \alpha_2 \ldots x & x\ x \ldots\ldots & x & x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\ x & x \ldots \alpha_{i-1} & x\ x \ldots\ldots & x & x \\ x & x \ldots x & x\ \alpha_{i+1} \ldots & x & x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\ x & x \ldots x & x\ x \ldots\ldots & x & \alpha_n \\ 1 & 1 \ldots 1 & 1\ 1 \ldots\ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Membrul 2 al relației de demonstrat devine:

$$(-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1 & x & \dots & x & x \\ x & \alpha_2 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & x_{n-1} & x \\ x & x & \dots & x & \alpha_n \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^n \sum_1^n (-1)^i \begin{vmatrix} x & \alpha_1 & x & \dots & x & x & \dots & x \\ x & x & \alpha_2 & \dots & x & x & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & \alpha_{i-1} & x & \dots & x \\ x & x & x & \dots & x & \alpha_{i+1} & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x & x & \dots & \alpha_n \\ x & x & x & \dots & x & x & \dots & x \end{vmatrix}$$

sau încă, dacă observăm că este tocmai desvoltarea determinantului

$$\Delta = (-1)^n \begin{vmatrix} x & \alpha_1 & x & \dots & x & x & \dots & x & x \\ x & x & \alpha_2 & \dots & x & x & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & \alpha_{i-1} & x & \dots & x & x \\ x & x & x & \dots & x & \alpha_i & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x & x & \dots & x & \alpha_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

avem:

$$\Delta = (-1)^n \begin{vmatrix} x & \alpha_1 - x & 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ x & x & \alpha_2 - x & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots \alpha_{n-1} - x & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & \alpha_n - x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n (\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x) \dots (\alpha_n - x) = f(x).$$

Q. E. D.

MIHAIL I. TREFILOV
Bacalaureat-Brăila.

II°. *Soluția II-a.* Să plecăm dela identitatea [1]):

$$(-1)^n D = f(x) - xf'(x).$$

Din care obținem

$$f(x) = (-1)^n D + xf'(x).$$

Avem însă

$$f'(x) = (-1)^{n-1} \sum_1^n D_i .$$

Q. E. D.

CPT. M. I. F.

PROBLEMA 5373. *Să se demonstreze că, dacă într'un triunghiu avem simultan relațiile:*

$$\cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{p}{a} + \frac{1}{2}$$

$$a(2b - a) \operatorname{tg} 67°30' = 2b^2$$

triunghiul este triunghiu dreptunghiu isoscel.

Să se dea o interpretare relației a doua.

VIRGIL GHIȚESCU.

1. *Soluția 1-a* dată de D-l HORIA M. BODNĂRESCU (student Șc. Politehnică din București).

Aplicând formulele cunoscute

$$\cos^2 \frac{B}{2} = \frac{p(p-b)}{ac} \quad , \quad \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{p(p-c)}{ab}$$

relația 1-a devine

$$\frac{p}{a}\left(\frac{p-b}{a} + \frac{p-c}{b}\right) = \frac{p}{a} + \frac{1}{2}.$$

Inlocuind semiperimetrul p prin valoarea sa, desvoltând și efectuând toate calculele, ajungem la

$$a^2(b+c) - (b^3 + c^3) - bc(b+c) = 0,$$

care simplificată cu $(b+c)$ devine

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

---

1) B. NIEWENGLOWSKI. Cours d'Algèbre II, pag. 255.

Triunghiul este deci dreptunghic.

In relaţia a 2-a facem înlocuirea

$$\operatorname{tg} 67^0 30' = 1 + \sqrt{2}.$$

Obţinând succesiv:

$$a(2b - a)(1 + \sqrt{2}) = 2b^2$$

$$2b^2 - 2(1 + \sqrt{2})ab + (1 + \sqrt{2})a^2 = 0$$

$$2\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2(1 + \sqrt{2})\left(\frac{b}{a}\right) + (1 + \sqrt{2}) = 0.$$

Această ecuaţie de gr. al 2-lea în $\left(\frac{b}{a}\right)$ rezolvată ne procură

$$\left(\frac{b}{a}\right)_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \left(\frac{b}{a}\right)_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}.$$

Rădăcina a 2-a este însă inacceptabilă întrucât $b > a$. Ne rămâne doar

$$a = b\sqrt{2}.$$

Deci triunghiul nostru dreptunghic este şi isoscel.

Soluţiuni foarte bune, asemănătoare cu precedenta, au dat D-nii: N. EUG. MOSCOVICI, MIR. NEGREA, C. PANTELIMON, MARIN GH. POPESCU, şi MIREL D. STOENESCU.

2. *Soluţia a 2-a* dată de D-nii: MIREL STOENESCU, elev Şc. de ofiţeri de aviaţie; PAUL P. DRĂGHICESCU şi AUREL N. POPA (elevi Lic. mil. Iaşi).

Prima relaţie se transformă succesiv ştiind că:

$a = 2R\sin A, \ldots$; $2p = a + b + c$; $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

în

$$\frac{\cos B + \cos C + 2}{2} = \frac{p}{a} + \frac{1}{2}$$

$$\cos B + \cos C = \frac{2p - a}{a}$$

$$\cos B + \cos C = \frac{\sin B + \sin C}{\sin A}$$

$$\sin A(\cos B + \cos C) = \sin(A + C) + \sin(A + B)$$

$$\cos A(\sin B + \sin C) = 0.$$

De aci:

$$\cos A = 0 \quad , \quad A = 90^0$$

iar

$$\sin B + \sin C = 0$$

este inacceptabilă, B şi C fiind unghiuri ale unui triunghiu. Restul, ca la prima soluţie.

3. *Interpretări ale relaţiei a 2-a.*

a) In triunghiul dreptunghic şi isoscel ABC să calculăm pe r_a. Obţinem

$$r_a = \frac{S}{p - a} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} 67^0 30'$$

$$\frac{\frac{1}{2} b^2}{\frac{a + 2b}{2} - a} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} 67^0 30',$$

care simplificată conduce la relaţia a 2-a a enunţului.

P. DRĂGHICESCU, A. POPA.

b) Să considerăm triunghiul dreptunghic şi isoscel ABC precum şi cercul (A) de centru A şi de rază b. Fie A' piciorul înălţimei vârfului A şi D punctul unde AA' taie cercul.

Exprimând în două feluri puterile lui A' faţă cu cercul considerat, avem:

$$\overline{A'B} \cdot \overline{A'C} = -\left[\frac{a}{2} \times \left(b - \frac{a}{2}\right) \operatorname{tg} 67^0 30'\right]$$

$$\overline{AA'}^2 - b^2 = \frac{b^2}{2} - b^2.$$

Scriind că aceste ambe rezultate sunt egale, am obţinut relaţia a 2-a.

H. M. BODNĂRESCU.

c) Celelalte interpretări primite se refereau la bisectoarea exterioară a unghiului B în triunghiul ABC.

4. Soluţie bună dar fără interpretare a dat D-l IANCU ANDONIE.

Două soluţiuni au fost greşite.

V. GH.

PROBLEMA 5385. *Fie* M *un punct pe una din cele trei diagonale ale unui patrulater complect. Dreptele ce trec prin* M *şi prin extremităţile uneia din celelalte două diagonale determină pe laturile patrulaterului un alt patrulater, iar cele care trec prin* M *şi prin extremităţile celeilalte diagonale, un al doilea patrulater. Complectând aceste două patrulatere, vom obţine celelalte două vârfuri al fiecăruia.*

Unul din aceste două vârfuri este comun celor două patrulatere, la intersecţia celorlalte diagonale, iar celelalte două rămase se găsesc pe diagonala pe care este situat şi punctul M.

IULIAN PETRESCU.

Soluţiune. Fie patrulaterul ABCD, iar O intersecţia diagonalelor. Luăm un punct M pe EF, diagonala a treia a patrulaterului ABCD. MD taie pe AB în A_1 iar pe BC în C_1; MB taie pe CD în B_1, iar pe AD în D_1. Trebue să arătăm că A_1B_1 şi C_1D_1 se întâlnesc în O, iar B_1C_1 şi A_1D_1 se întâlnesc pe EF.

Triunghiurile ADA_1 şi BCB_1 sunt omologice, căci intersecţiunile laturilor lor sunt colineare. Deci A_1B_1 trece prin O. Analog C_1D_1 trece prin O. Deci unul din vârfuri se găseşte în O.

Fie N intersecţiunea dreptelor B_1C_1 şi EF. Triunghiurile DFM şi OB_1C_1 sunt omologice, cu centrul de omologie B. Deci A_1, N şi D_1 sunt colineare. Deci al doilea vârf se găseşte pe diagonala EF.

Analog arătăm că patrulaterul determinat pe laturile patrulaterului ABCD de dreptele ce unesc M cu A şi C are un vârf în O iar celălalt pe EF.

PAUL P. DRĂGHICESCU
Clasa VII-a Liceul militar, Iaşi.

PROBLEMA 5387. *Unei conice i se circumscrie două triunghiuri omologice.*

1°. *Triunghiurile de contact ale celor două triunghiuri date sunt deasemenea omologice.*

2°. *O tangentă la o conică taie laturile unui triunghiu în trei puncte care unite cu vârfurile opuse laturilor omoloage din cel'lalt triunghiu, determină trei drepte. Cele trei drepte concură pe axa de omologie a triunghiurilor date.*

CPT. I. G. ZAMFIRESCU.

Soluție dată de D-nii: PAUL P. DRĂGHICESCU (lic. mil. Iași), VICTOR L. FLORESCU (București), IULIAN PETRESCU (lic. Lazăr, București), MIRCEA D. POPA (lic. mil. Iași).

1°. Fie ABC și $A_1B_1C_1$ cele două triunghiuri omologice date și A'B'C', $A_1'B_1'C_1'$ respectiv triunghiurile lor de contact, Δ axa de omologie, ω centrul. Punctele M(BC, B_1C_1); N(CA, C_1A_1); P(AB, A_1B_1) se găsesc pe Δ. Se observă însă că dreptele A_1A_1', $B'B_1'$, C_1C_1' sunt respectiv polarele punctelor M, N, P față de conica considerată. Ori se știe că polarele punctelor colineare (pe dreapta Δ) concură într'un punct, polul dreptei Δ față de conică.

2°. Fie α, β, γ intersecțiunile tangentei arbitrare cu laturile triunghiului ABC. După teorema BRIANCHON, diagonalele exagonului circumscris format de tangentele: B_1C_1, C_1A_1; AC, $\alpha\beta\gamma$, AB, A_1B_1, sunt concurente, deci $B_1\beta$, $C_1\gamma$ se taie pe NP și analog $A_1\alpha$ va trece prin același punct de pe MNP.

Observare. 1°. Grupele de triunghiuri ABC, $A_1B_1C_1$ și A'B'C', $A_1'B_1'C_1'$ au același centru și aceeași axă de omologie fiindcă ele se corespund dual față de conică.

2°. Punctul 2° al problemei este transformata prin dualitate a teoremei AUBERT.

3°. Observațiile precedente au fost făcute de corespondenții citați.

PROBLEMA 5400. *Fie* M *și* N *două puncte fixe pe o parabolă și* Δ *o dreaptă fixă paralelă cu axa;* Q *un punct mobil pe* Δ; NQ *retaie parabola în* P. *Paralela din* Q *la* MP *trece printr'un punct fix.*

N. N. MIHĂILEANU.

1. *Soluție geometrică.* Fie R punctul unde Δ taie parabola și S punctul de intersecție al dreptei MR cu paralela dusă din N la axa parabolei. Vom arăta că QS este paralelă cu MP, deci că dreapta dusă prin Q paralelă la MP trece prin S, fix. Considerăm exagonul înscris în parabolă ale cărui laturi sunt: (1) = SN; (2) = NP; (3) = PM; (4) = MR; (5) = Δ; (6) = dreapta dela infinit. După teorema PASCAL, dreptele (1), (4); (2), (5); (3), (6) se taie în trei puncte colineare. Deci punctele S, Q și punctul dela infinit al dreptei MP sunt colineare. Aceasta înseamnă că SQ este paralelă cu MP. c. t. a.

PAUL P. DRĂGHICESCU
Liceul Militar, Iași.

2. *Soluție analitică* dată de d-nii: CONSTANTIN PANTELIMON (Șc. Of. A. C. A.), AUREL N. POPA (Lic. Mil. Iași), MIREL D. STOENESCU (Șc. Of. Aviație, București).

Fie parabola $y^2 = 2px$ și punctele

$$M\left(\frac{a^2}{2p}, a\right), N\left(\frac{b^2}{2p}, b\right), P\left(\frac{\lambda^2}{2p}, \lambda\right)$$

ecuația dreptei NP

$$2px - y(b + \lambda) + b\lambda = 0$$

intersecția cu $\Delta(y = c)$, dă punctul Q

$$Q\left[\frac{c(b + \lambda) - \lambda b}{2p}, c\right].$$

Paralela din Q la MP este

$$\lambda(y - b) - (2px + ac - bc - ay) = 0$$

și se observă că trece prin punctul fix

$$S\left[\frac{a(b - c) + bc}{2p}, b\right]$$

așezat pe paralela din N la Δ.

Bune soluții analitice au dat și d-nii: IOAN A. BADEA (Lic. Șaguna, Brașov), HORIA M. BODNĂRESCU (Politehnica, București), IOAN C. NEGRESCU (Lic. Haret, București), MIRCEA C. NICULESCU (Lic. T. Maiorescu, București), RADU P. VOINEA (Lic. Buzești, Craiova).

PROBLEMA 5401. *Se consideră cisoida dreaptă și fie* (C) *simetricul cercului fundamental față de punctul dublu* O. *Se ia* M *arbitrar pe cercul* (C); *fie* N *proiecția lui* M *pe diametrul ce trece prin* O; *cercul de centru* N *și rază dublă lui* (C) *taie tangenta în* O *la* (C) *în* P, Q. *Paralelele din* M *la* NP, NQ *taie cisoida în* P_1, P_2, P_3 *respectiv* Q_1, Q_2, Q_3. *Să se arate că*

$$\overline{MP_1} \cdot \overline{MP_2} \cdot \overline{MP_3} = \overline{MQ_1} \cdot \overline{MQ_2} \cdot \overline{MQ_3} = \text{const.},$$

când M *descrie cercul* (C).

HORIA M. BODNĂRESCU.

Soluție dată de D-nii: G. G. BROȘTEANU (Lic. mil. Iași) și C. D. EFTIMIE (elev-inginer, București).

Fie

(1) $$y^2(2a - x) = x^3$$

ecuaţia cisoidei şi

(2) $$x^2 + y^2 + 2ax = 0$$

ecuaţia cercului (C) pe care luăm punctul $M(x_0, y_0)$. O dreaptă ce trece prin M are ecuaţia

$$x = x_0 + r\cos\alpha \quad , \quad y = y_0 + r\sin\alpha$$

valorile lui r le aflăm înlocuind în (1)

$$(y_0 + r\sin\alpha)^2 (2a - x_0 - r\cos\alpha) = (x_0 + r\cos\alpha)^3$$

o ecuaţie de al treilea grad în r; rădăcinile ei sunt $\overline{MP_1}$, $\overline{MP_2}$, $\overline{MP_3}$; produsul rădăcinilor, dat de câtul termenului liber pe coeficientul lui r^3, este

$$\frac{x_0^3 - y_0^2(2a - x_0)}{\cos\alpha}$$

expresiune care conform cu (2) se reduce la

$$\frac{x_0(x_0^2 + y_0^2) - 2ay_0^2}{\cos\alpha} = \frac{-2x_0(x_0^2 + y_0^2)}{\cos\alpha} = 4a^2 \frac{x_0}{\cos\alpha}$$

ţinând seamă de construcţiunile făcute

$$\overline{MP_1} \cdot \overline{MP_2} \cdot \overline{MP_3} = 4a^2 \cdot NP$$

deci constant dacă NP este constant; se observă că nu era necesar să se ia dublul cercului (C).

PROBLEMA 5406. *Un vehicul de greutate* G *în mişcare rectilinie uniformă frânează. Din această cauză, un corp situat în vehicul alunecă cu frecare în lungul vehiculului. Un observator din vehicul constată că susnumitul corp a parcurs o distanţă* d_0 *până la oprirea vehiculului şi o distanţă* d_1 *după această oprire.*

Coeficientul de frecare se va lua f, *iar frânarea se va presupune că acţionează ca o forţă constantă contrară sensului mişcării. Se cere iuţeala iniţială a vehiculului, distanţa pe care s'a efectuat frânarea, timpul necesar frânării şi forţa de frânare.*

AL. STOENESCU.

Soluţia I-a dată de Domnii: BĂDULESCU P. NICOLAE şi MIRCEA STĂNCULESCU (Elevi-Ingineri ai Şcoalei Politehnice din Bucureşti).

Să notăm cu:

w acceleraţia constantă a vehiculului datorită frânării.
a iuţeala iniţială a vehiculului
s distanţa pe care s'a efectuat frânarea
t_0 *timpul în care vehiculul a fost frânat*
P *greutatea corpului care alunecă.*

In timpul frânării, corpul din vehicul este supus acţiunii a două forţe orizontale: *forţa de inerţie* $\frac{P}{g}w$ datorită frânării şi îndreptată în sensul mişcării şi *forţa de frecare* fP îndreptată în sensul contrar mişcării. Acceleraţia corpului din vehicul va fi prin urmare:

$$\frac{\frac{P}{g}w - fP}{\frac{P}{g}} = w - fg$$

iuţeala sa în raport cu vehiculul la timpul t:

$$v = (w - fg)\ t$$

şi spaţiul d străbătut în timpul t:

$$d = \frac{1}{2}(w - fg)\ t^2.$$

Dar pentru $t = t_0$, $d = d_0$ rezultă:

$$v_0 = (w - fg)\ t_0 \quad ; \quad d_0 = \frac{1}{2}(w - fg)\ t_0^2.$$

De unde:

$$(1) \qquad t_0 = \sqrt{\frac{2\ d_0}{w - fg}} \quad ; \quad v_0^2 = 2\ d_0\ (w - fg).$$

După ce vehiculul s'a oprit, asupra corpului din vehicul nu mai lucrează decât o singură forţă orizontală: *frecarea* fP.

Acceleraţia corpului din vehicul va fi prin urmare:

$$\frac{-fP}{\frac{P}{g}} = -fg$$

iuţeala sa la timpul t:

$$v = v_0 - fgt$$

şi spaţiul d străbătut în timpul t:

$$d = v_0 t - \frac{1}{2} fgt^2.$$

Corpul se opreşte însă când:

$$v = 0 \quad ; \quad t = t_1 = \frac{v_0}{fg}$$

după ce parcurge distanţa $d = d_1$:

$$d_1 = v_0\, t_1 - \frac{1}{2} fg\, t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{fg}.$$

Sau ţinând seamă de (1).

$$d_1 = \frac{d_0\,(w - fg)}{fg}$$

Rezultă:

$$w = \frac{(d_0 + d_1)}{d_0} fg.$$

Timpul în care vehiculul este frânat este dat de (1):

$$t_0 = \sqrt{\frac{2d_0}{w - fg}} = d_0 \sqrt{\frac{2}{fgd_1}}$$

iar forţa de frânare:

$$F = \frac{G}{g} w = \frac{Gf\,(d_0 + d_1)}{d_0}.$$

Mişcarea vehiculului făcându-se sub acţiunea forţei constante F, cu acceleraţia w, ecuaţiunea s'a va fi:

$$d = at - \frac{1}{2} wt^2$$

$$v = a - wt.$$

Dar pentru $t = t_0$, vehiculul se opreşte $v = 0$ iar $d = s$.
Rezultă pentru iuţeala iniţială a vehiculului valoarea:

$$a = wt_0 = \frac{d_0 + d_1}{d_0} fg \cdot d_0 \sqrt{\frac{2}{fgd_1}} = \sqrt{\frac{2fg}{d_1}} \cdot (d_0 + d_1)$$

iar pentru distanţa de frânare valoarea:

$$s = at_0 - \frac{1}{2} wt_0^2 = \frac{1}{2} wt_0^2 = \frac{(d_0 + d_1)\, d_0}{d_1}.$$

Soluția II-a.

Vom păstra notațiunile întrebuințate în soluția I-a.

Lucrul mecanic al corpului alunecător în timpul frânării este un *lucru mecanic motor* și are valoarea:

$$L_0 = \frac{P}{g}(w - fg)\, d_0$$

iar lucrul mecanic după oprirea vehiculului este un *lucru mecanic rezistent* și are valoarea:

$$L_1 = -\frac{P}{g} fg d_1 = -fPd_1 .$$

Corpul alunecător *plecând din repaos și ajungând în stare de repaos, aceste două lucruri mecanice* conform teoremei energiei trebue *să se compenseze.*

Vom avea:

$$L_0 + L_1 = \frac{P}{g}(w - fg)\, d_0 - fPd_1 = 0.$$

De unde:

$$w = \frac{(d_0 + d_1)}{d_0} fg$$

Forța de frânare cerută este:

$$F = mw = \frac{Gf(d_0 + d_1)}{d_0} .$$

Dar:

$$d_0 = \frac{1}{2}(w - fg)\, t_0^2$$

(mișcare uniform accelerată)

$$t_0 = \sqrt{\frac{2d_0}{w - fg}} = d_0 \sqrt{\frac{2}{fgd_1}} .$$

Pentru vehicul: $a = wt_0$; $s = \frac{a^2}{2w}$.

Rezultă:

$$a = \sqrt{\frac{2fg}{d_1}} . (d_0 + d_1) \quad ; \quad s = \frac{d_0 (d_0 + d_1)}{d_1} .$$

AL. ST.

PROBLEMA 5437. *Pe latura* AB *a unui triunghiu* ABC *se ia un punct mobil* M. *Fie* P *proiecţia lui* M *pe* AC *şi* R *proiecţia lui* P *pe* BC. *Care este maximul ariei triunghiului* MPR?

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: T. A. ŞERBAN (Student, Inginer), PAUL P. DRĂGHICESCU (Liceul Militar, Iaşi), RADU P. VOINEA (Liceul Fraţii Buzeşti, Craiova).

Fie $AM = x$. Avem:

$AP = x\cos A$, $PC = b - x\cos A$, $PR = PC\sin C = (b - x\cos A)\sin C$.

Unghiul MPR este egal cu C, căci are laturile perpendiculare pe AC şi BC şi sunt ascuţite. Dacă S este aria triunghiului MPR, avem:

$$S = \frac{1}{2} MP \cdot PR\sin C = \frac{1}{2} x(b - x\cos A)\sin A\sin C$$

$$= \frac{1}{2}(x\cos A)(b - x\cos A)\frac{\sin A\sin C}{\cos A}.$$

Suma parentezelor fiind b, maximul are loc când $x\cos A = b - x\cos A$, de unde $x = \frac{1}{2} b\sec A$. Deci M este pe mediatoarea laturii AC. Aria maximă este $\frac{b^2 \operatorname{tg} A\sin C}{8}$.

Au dat soluţii trigonometrice cu ajutorul derivatelor D-nii: A. E. M. DRAGOMIR (Colegiul naţional „N. Filipescu, Predeal), IANCU ST. ANDONIE (Colegiul naţional Sf. Sava), O. E. GHEORGHIU (Student), GH. D. SBÂRNEA (Liceul Tecuci), POPA N. AUREL (Liceul Militar, Iaşi).

D-l I. C. NEGRESCU (Clasa VIII-a, Liceul Spiru Haret, Bucureşti) a dat o soluţie analitică.

Notă. Problema este susceptibilă de o soluţie geometrică simplă. Ducem înălţimile AA', CC'. Unghiul MPR fiind necontenit egal cu C, când M se mişcă pe AB, aria triunghiului MPR rămâne proporţională cu produsul (MP × PR). Triunghiurile dreptunghice APM, AA'C au unghiul A comun şi sunt deci asemenea. La fel, triunghiurile CPR, CAA' au unghiul C comun şi sunt şi ele asemenea. Punând $AP = x$, $CP = b - x$; avem dar:

$$MP/CC' = AP/AC = x/b \quad , \quad PR/AA' = CP/CA = (b - x)/b,$$

de unde:

$$MP \times PR/CC' \times AA' = x(b - x)/b^2.$$

Partea a doua este maximă pentru $x = \frac{1}{2} b$, adică P la mijlocul lui AC.

I. I.

EXERCIŢII

20. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia

$$x^2 - y^2 = a^n$$

în care a şi n sunt numere întregi date.

G-L GH. BUICLIU.

R. Se găseşte că

$$x = a^{\alpha-1} + a^{\beta-1} \quad \text{şi} \quad y = a^{\beta-1} - a^{\alpha-1}$$

unde $\alpha + \beta = n$.

PROBLEME PROPUSE

5476 [1]) Se consideră cercul de rază a cu centrul în origina axelor de coordonate dreptunghiulare Ox, Oy. Pe tangenta în $A(a, o)$ la cerc se ia un punct variabil M prin care se duce a doua tangentă la cerc, care întâlneşte axa Oy în N. Când M variază punctul P, de întâlnire al diagonalelor trapezului OANM descrie o curbă Γ. Prin A se duce o secantă variabilă care întâlneşte curba Γ în două puncte P' şi P''. Să se demonstreze:

1°. Că dreptele OP', OP'' sunt egal înclinate pe bisectoarea unghiului xOy.

2°. Că locul geometric al mijlocului lui P'P'', când secanta dusă prin A variază, este curba simetrică a curbei Γ faţă de dreapta $2x = a$.

D. V. IONESCU.

5527. Câte fracţii subunitare ireductibile se pot scrie cu termenii de două cifre?

I. IONESCU.

5528. Să se demonstreze că există $n = 6^{s-1} a_1 a_2 \ldots a_s + 2^{s-1}$ grupe de câte *trei* numere, astfel încât numerele din fiecare grupă să aibă *codivizorul* maxim D şi *comultiplul* minim DM. Numerele $a_1, a_2, \ldots, a_s$ sunt exponenţii celor s numere prime ce intervin în descompunerea în factori primi a lui M.

I. B. FLORESCU.

1) Înlocueşte problema 5476 propusă la pag. 447, XLVI care se găseşte în partea II Culegere de Probleme de Trigonometrie XX, 14 de V. CRISTESCU, revăzută de GH. TH. GHEORGHIU.

5529. Peste câți ani dela apariția *Gazetei Matematice*, numărul format de anul respectiv scris după anul de apariție, se va împărți exact cu numărul anilor de apariție?

COMANDOR I. LINTEȘ.

5530. Să se găsească un patrat de trei cifre a cărui rădăcină se obține scriind una după alta *una din cifrele sale* și *suma celorlalte două cifre.*

G-L GH. BUICLIU.

5531. Se consideră șirul cu termenul general u_n, astfel ca

$$u_n = pu_{n-1} + u_{n-2} \quad ; \quad u_0 = 0 \quad ; \quad u_1 = p,$$

p fiind un număr dat. Să se demonstreze relația:

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = \frac{1}{p} u_n u_{n+1}.$$

M. GHERMĂNESCU.

5532. Considerăm punctele P, A, B și C situate în același plan. Fie punctele: α(PA, BC), β(PB, CA), γ(PC, AB), apoi U conjugatul armonic al punctului A față de P și α; V conjugatul punctului B față de P și β; iar W conjugatul punctului C față de P și γ. Să se arate că triplele de drepte (PA, BW, CV), (PB, CU, AW), (PC, AV, BU) sunt triple concurente.

RADU P. VOINEA.

5533. Fie o piramidă cu vârful S și baza un exagon plan oarecare ABCDEF. In ce condiții pot fi tăiate muchiile SA, SB, ..., SF ale acestei piramide cu un plan pentru ca secția făcută în piramidă să fie un exagon cu laturile opuse paralele?

ADRIAN GHEORGHIU.

5534. Fie tetraedrele VABC și V'ABC cu fața comună ABC; fie asemenea punctele: α(VA, V'BC), β(VB, V'CA), γ(VC, V'AB); α'(V'A, VBC), β'(V'B, VCA), γ' V'C, VAB), de intersecție ale muchii unui tetraedru cu o față a celuilalt.

Să se arate că dreptele $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, VV' sunt concurente și că planele ABC, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ trec prin aceiași dreaptă.

A. DOBRESCU.

5535. Paralelele, duse prin vârfurile unui triunghiu la laturile corespunzătoare ale triunghiului pedal al unui punct de pe prima elipsă a lui STEINER, întâlnesc laturile opuse în trei puncte aşezate pe o tangentă la cea de-a doua elipsă a lui STEINER.

IULIAN PETRESCU.

5536. Fie I, I_a centrele cercurilor înscris şi exînscris triunghiului ABC şi $A_1B_1C_1$ triunghiul anticomplementar. Dreapta B_1I taie pe BC în A_c. Punctele I_a, A_c, C_1 sunt în linie dreaptă; analoagele lor sunt deasemenea puncte în linie dreaptă.

HORIA M. BODNĂRESCU.

5537. Să se demonstreze că ecuaţia

$$\sum_{\lambda=0}^{4} (-1)^{\lambda} x^{4-\lambda} \sin[(4-\lambda)\alpha_1 + \lambda z] = 0$$

admite rădăcinile:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}, \quad \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1}, \quad \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{4}\right)}, \quad \frac{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

V. ALACI.

5538. Fie cercul C şi doi diametri ai lui, OA şi BD, perpendiculari unul pe altul; fie apoi o coardă variabilă AM şi N mijlocul ei. Să se găsească şi să se construiască locul punctului P de intersecţie al dreptelor ON, BM. Discuţie.

O. N. ŢINO.

5539. Un unghiu drept rigid se mişcă în planul său, astfel încât o latură trece printr'un punct fix, iar alta rămâne tangentă la un cerc fix de rază dată. Se cere:

1. Traiectoria unui punct de pe latura ce trece prin punctul fix.
2. Baza mişcării sistemului.
3. Rostogolitoarea mişcării sistemului.

CPT. I. GH. ZAMFIRESCU.

5540. Pe un plan, înclinat cu unghiul α faţă de orizontală, se află aşezată o bară omogenă AB de lungime $2l$, de greutate G, care este în contact cu planul în cele două capete ale sale prin două picioruşe fără greutate, punctul cel mai de jos, A, fiind articulat fix de plan.

Ţinând seama de coeficientul de frecare μ între piciorul B şi planul înclinat, să se determine:

1. Regiunea în care bara va fi în echilibru.

2. Dând barei aflată în poziţia limită de echilibru o viteză unghiulară iniţială ω_0, care este viteza unghiulară ω în momentul trecerii prin poziţia ei aşezată pe linia de cea mai mare pantă.

GABRIELA ŢIŢEICA.

5541. Dintr'un punct O se asvârle o bilă. Să se determine *iuţeala iniţială* şi *direcţia de asvârlire* astfel încât bila să intre într'un tub de lungime l, înclinat cu unghiul φ pe orizontală, având capătul său inferior situat pe orizontala lui O la o distanţă a de acesta.

Tubul are diametrul interior corespunzător diametrului bilei şi se află într'un plan vertical trecând prin O.

Rezistenţa aerului se va neglija.

Aplicaţie:

$$a = 8{,}00 \text{ m} \quad ; \quad \varphi = 30^0 \quad ; \quad l = 1{,}20 \text{ m}$$

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ. 1°. In enunţul problemei 3713, propusă la pag. 119, Vol. XXXIV, se va înlocui $n > 3$ prin $n > 5$.

2°. Numărul problemei rezolvată la pag. 590 este 4062 în loc de 4052.

3°. In enunţul problemei 5521, propusă la pag. 616, se înlocueşte: *Diametrul paralel cu* BC . prin *Diametrul paralel cu* AB...

4°. La problema Nr. 5260 (pag. 557), rândul 7 se va citi „Trecându-se" în loc de „Frecându-se".

5°. Problema rezolvată la pag. 494 are numărul 4926, iar nu 4929.

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE

1. Geometria

		Pag.
Ad. Gheorghiu	Asupra unei teoreme a Domnului G-l GH. BUICLIU	135
Ad. Gheorghiu	O definiţie a cuarticelor unicursale	568
V. Ghiţescu	Asupra unui contur poligonal în legătură cu un triunghiu	624
R. Goormaghtigh	Asupra unor cercuri asociate triunghiului	187
Al. I. Guţu	O altă demonstraţie a unei chestiuni clasice elementare cu ajutorul geometriei şi mecanicei	190
I. Ilie	Insemnări asupra punctului lui MIQUEL	299
C. Ionescu-Bujor	Asupra unor transformări într'un triunghiu	563
G. D. Simionescu	O problemă de geometrie a triunghiului	130, 185
I. C. Vasiliu	Generalizarea teoremei Droz-Farny	630

2. Algebra

G. G. Constantinescu	Asupra criteriilor de convergenţă RAABE şi BERTRAND	293
M. Ghermănescu	Asupra problemei 4385	64
M. Ghermănescu *)	Asupra problemei 3209	453
Iul. Petrescu **)	O extindere relativ la modulele rădăcinelor ecuaţiilor algebrice	519
T. Popoviciu	Asupra problemei 3209	122, 179
T. Popoviciu	Asupra problemei 4385	237
T. Popoviciu	Soluţia şi generalizarea problemei 1876	345, 512

3. Geometria Analitică şi infinitezimală

N. Abramescu	Proprietăţi ale conicelor osculatoare la o curbă plană	23, 59

*) Cu o notă în continuare de D-l *T. Popoviciu* şi o *Notă a redacţii* de D-l *I. Ionescu.*
**) Cu o notă adăugată de D-l *P. Sergescu* la finele articolului.

Pag.

Cpt. M. Focşeneanu . . O construcţie a centrelor de curbură la unele curbe plane 241
I. Ionescu . . . . . Algebra ornamentală 115, 171, 225
C. Ionescu-Bujor . . . . Extindere analitică a tangentelor la o curbă . . 245

4. Calculul şi geometria vectorială

Pl. Andronescu . . . . Calculul vectorial 281, 337, 401, 505, 617
D. V. Ionescu . . . . . Aplicaţiuni ale calculului vectorial 230, 337

5. Balistica

C-dor I. Linteş . . . . Asupra alterării traiectoriilor balistice sub influenţa perderilor de viteză iniţială 289

6. Istoria Matematicilor

Florica Câmpan . . . . Despre curbele sincrone în legătură cu o lucrare a lui E. BACALOGLU 68
V. Marian . . . . . PHILIPP MELANCHTON şi matematica . . 396, 460

7. Diverse

Delegaţii Societăţii . . GH. HAGIOPOL 301
I. Ionescu . . . . . Errave humanum est 393

8. Necrologuri

D. Barbilian . . . . . † ION BANCIU 57
P. Sergescu . . . . . † PREDUŢA BUNGEŢEANU 21
Gabriela Ţiţeica . . . . † Profesorul DAVID EMMANUEL 561

B. CHESTIUNI IN LEGĂTURĂ CU REDACŢIA ŞI SOCIETATEA „GAZETA MATEMATICĂ“

1. Diverse

*** . . . . . Lista membrilor Societăţii «*Gazeta Matematică*» 5
*** . . . . . Membrii decedaţi 20
G-l Gh. Buicliu, Al. Pantazi, Ing. D. Stoica . . Raport asupra lucrării D-lui Prof. I. IONESCU „Maxime şi minime geometrice“ 350

2. Premii şi concursuri

		Pag.
I. Buşilă, D. A. Stan	Premii, burse şi publicaţii din veniturile Societăţii *«Gazeta Matematică»*	27
***	Regulamentul bibliotecii „GEORGE ŢIŢEICA"	113
C-dor I. Linteş, O. Onicescu, P. Sergescu	Raport asupra premiului „V. CONTA"	137
Delegaţia Societăţii	Concursul *«Gazeta Matematică»* din 1941	169
***	Programa analitică hotărâtă pentru concursul *«Gazeta Matematică»* din anul 1941	193
Ing. E. G. Botea, C. Ionescu-Bujor, Ing. D. Stoica	Raportul comisiunei pentru acordarea premiului „N. G. BOTEA"	195
Delegaţia Societăţii	Concursul *«Gazeta Matematică»*	303, 353
G-l Gh. Buicliu, I. Ionescu, C-dor I. Linteş	Raportul comisiunei pentru premiul de aritmetică	352
Gh. I. Dumitrescu, Al. Al. Roşu, D. Stoica	Premiul „Ing. AL. ROŞU"	409
O. N. Ţino	Rezultatul concursului *«Gazeta Matematică»* din anul 1941	449
Th. Angheluţă, M. Ghermănescu, Al. Bunescu	Raport asupra premiului de algebră	466
C. Ionescu-Bujor, D. Stoica, O. N. Ţino	Raport asupra premiului „V. CRISTESCU"	524
C. Ionescu-Bujor, D. Stoica, O. N. Ţino	Raport pentru acordarea premiului „GEORGE ŢIŢEICA"	574
G. G. Constantinescu, C-dor I. Linteş, Ing. Al. Stoenescu	Raport pentru decernarea premiului „Spiru Haret".	634

C. NOTE MATEMATICE

1. Aritmetica şi teoria numerelor

37[1]).	*G-l Gh. Buicliu*	Numere interesante cu 10 cifre diferite	411
46.	*G-l Gh. Buicliu*	Numere interesante cu 10 cifre diferite	527
57.	*G-l Gh. Buicliu*	Numere interesante cu 10 cifre diferite	636
21.	*I. B. Florescu*	Rectificare	251
6.	*A. Gloden*	Problemă diofantiană	73
16.	*A. Gloden*	Notă de analiză determinată multigradă	197
4.	*I. Ionescu*	Asupra mediei aritmetice şi geometrice	70

1) Numerile din această coloană indică numărul de ordine al notei în Vol. XLVI.

			Pag.
45.	*I. Ionescu*	Asupra problemei 2580	526
9.	*C-dor I. Linteş*	Asupra articolului « *Extinderi în legătură cu indicatorii* »	74
12.	*C-dor I. Linteş*	Relaţiuni între divizorii numerelor	142
31.	*C-dor I. Linteş*	Relaţiuni cu indicatorii	355
39.	*C-dor I. Linteş*	Numere perfect pare	414
51.	*V. I. Postolachi*	Asupra problemei 4918	577
29.	*M. L. Rusu*	Asupra problemei 4474	311
35.	*M. F. Văduva*	Asupra exerciţiului 262 T. C. din Suplimentul „*Gazeta Matematică*"	362

2. Geometria

47.	*I. S. Antoniu*	Asupra problemei 5260	529
10.	*G-l Gh. Buicliu*	Asupra problemei de construcţie din nota 55, Vol. XLV, G. M.	138, 196
40.	*St. Cetăţeanu*	Asupra trisecţiunei unghiului	415
28.	*C. Coşniţă*	O soluţie a problemei 3825	310
54.	*R. Georgescu*	Asupra problemei 4709	580
22.	*Al. I. Guţu*	Asupra articolului meu	252
2.	*D. V. Ionescu*	Asupra problemei 2735	31
56.	*I. Ionescu*	Asupra problemei 3235	635
3.	*C. Ionescu-Bujor*	Asupra unor lanţuri de cercuri ortogonale	32
13.	*N. N. Mihăileanu*	Notă asupra inversiunei	142
14.	*M. D. Popa*	Soluţia geometrică a exercţiului 84 Vol. XXXII	144
17.	*Gh. D. Simionescu*	Asupra problemei 4479	200
38.	*V. Thébault*	Asupra conicelor înscrise unui triunghiu	412
25.	*I. C. Vasiliu*	Complimentarulşi anticomplimentarul de ordinul n	307
48.	*I. C. Vasiliu*	Asupra triunghiului automedian	531

3. Algebra

41.	*G-l Gh. Buicliu*	O rectificare	467
59.	*G. G. Constantinescu*	Asupra problemei 4232	638
7.	*Otilia Georgescu-Roegen*	Asupra problemei 3167	73
8.	*Gh. Th. Gheorghiu*	Asupra *Culegeri de Probleme de Algebră* partea I ediţia IV	74
24.	*M. Ghermănescu*	Asupra problemei 5096	306
30.	*A. Gloden*	Problemă diofantiană	355
26.	*C. Ivănescu*	Asupra unei Note	308
1.	*T. Popoviciu*	Asupra formelor hermitiene	29
11.	*T. Popoviciu*	Observaţii asupra problemei 3365	140
32.	*T. Popoviciu*	Asupra problemei 2337	356
58.	*T. Popoviciu*	Asupra problemei 2552	637
27.	*V. I. Postolache*	Asupra problemei 4800	309

4. Trigonometria

Pag.

49. *P. Boldescu* . . . . Asupra problemei 4761 532
53. *V. Metea* . . . . . Asupra problemei 4423 579
15. *I. I. Stamate* . . . . Asupra problemei 5251 145

5. Geometria Analitică şi Infinitezimală

33. *V. Ghiţescu* . . . . Asupra exerciţiului 84 XXXII, G. M. 358
52. *A. Şcodranu* . . . . Asupra problemei 4782 578
18. *I. C. Vasiliu* . . . . Ecuaţia tangenţială a hipocicloidei cu trei rebrusmente în coordonate baricentrice 203
34. *I. C. Vasiliu* . . . . Asupra problemei 2796 *Mathesis*, 1933 359

6 Mecanica

43. *Em. S. Modâlcă*. . . Notă asupra problemei 5314 468
50. *Al. Stoenescu* . . . Asupra unei probleme de mecanică 575
43. *Gabriela Ţiţeica* [1]. . Mişcarea după ce Q s'a ridicat cu înălţimea *h* . 470

7. Istoria Matematicelor

19. *I. Ionescu* . . . . . Aritmetica spătarului NICULAE MILESCU CÂRNU. 249
44. *I. Ionescu* . . . . . Media şi extrema raţie 524
5. *D. I. Mangéron* . . Acum o sută de ani în lumea matematică . . 71
20. *D. I. Mangéron* . . Acum o sută de ani în lumea matematică . . 251
23. *D. I. Mangéron* . . Acum o sută de ani în lumea matematică . . 304

8. Diverse

36. *I. Ionescu* . . . . . Terminologia ştiinţifică. 410
55. *I. Ionescu* . . . . . Asupra problemei 1146 634
42. *P. Sergescu* . . . . Asupra ecuaţiei funcţionale
$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\varphi(y)$ 468

D. CHESTIUNI DE EXAMEN

Concursul *Gazeta Matematică* din 1941. Enunţul problemelor date la proba scrisă 471

E. BIBLIOGRAFII

1. Lucrări şi reviste recenzate

V. Ghiţescu . . . . . M. GHERMĂNESCU. Equilibre avec frottement sur une surface fixe 204
I. Ionescu . . . . . Pozitiva 76
Cpt. C. Ionescu-Ţiu . . I. C. DUMITRIU. Exerciţii şi probleme de algebră elementară pentru clasele IV, V şi VI de liceu . 416

1) Continuarea notei 43 dela pag. 468.

Pag.

V. Marian . . . . . K. REIDEMEISTER. Die Arithmetik der Griechen. 314
V. Marian . . . . . P. SERGESCU. Mathématiciens français du temps de la révolution française 417
V. Vâlcovici . . . . . FRANCIS PERRIN. Mecanique statistique quantique 312

2. Lucrări nerecenzate

N. Abramescu . . . . . Expunere de titluri, activitate didactică şi ştiinţifică 254
Academia Română . . . Terminologia ştiinţifică românească 416
D. Barbilian . . . . . Zur Axiomatik der projectiven ebenen Ringgeometrien 640
Gh. Th. Gheorghiu . . . Probleme de analiză matematică 76
C-dor I. Linteş . . . . Memoratorul inginerului de armament 364
C-dor I. Linteş . . . . Tablele de trageri pentru bombardamentul aerian 254
N. N. Mihăileanu . . . Transformarea prin polare reciproce 204
I. Plăcinţeanu . . . . . Electromagnetismul. Teoria lui MAXWELL . . . 482
P. Sergescu . . . . . Mathématiciens français du temps de la révolution française 140
Gabriela Ţiţeica şi Al. Stoenescu . . . . Probleme de calcul vectorial 364
Th. Vahlen . . . . . Abstrakte Geometrie 534

3. Extrase, Suplimente, Teze

E. Arghiriade . . . . . Geometria axială diferenţială a curbelor strâmbe 534
R. Bădescu . . . . . Sur l'équation fonctionnelle de POINSOT, généralisée 314
Maior M. Bănulescu, Cpt. Ed. Dragomirescu-Buzne Studiul reculului în construcţia unei guri de foc . 482
D-ra Brătilă F. şi P. Sergescu . . . . . Combinări generalizate 583
Florica Câmpan . . . . Note biografice în legătură cu activitatea matematică a lui EMANOIL BACALOGLU 416
N. Donici . . . . . Adeziunea României la uniunea astronomică internaţională 416
Cpt. Ed. Dragomirescu-Buzne . . . . . Proiectilele ghintuite 482
Cpt. Ed. Dragomirescu-Buzne . . . . . Sintetizarea progreselor în domeniul explozivelor 482
Cpt. Ed. Dragomirescu-Buzne, Lt. A. I. Stan . Avionul armă anticar 482
M. Ghermănescu . . . Equilibre avec frotement sur une surface fixe . 33
Caius Iacob . . . . . Asupra unor funcţiuni armonice de două variabile 482
Caius Iacob . . . . . Despre amortizarea împrumuturilor 482
Caius Iacob . . . . . Sur quelques propriétés de la correspondance de M. TCHAPLIQUINE en dynamique des fluides compressibles 482

		Pag.
Caius Iacob	Sur un problème de M. SLIOSKINE	482
C-dor I. Linteş	Aeronautica în războiul actual	254
C-dor I. Linteş	Asupra concentrărei focurilor	254
C-dor I. Linteş	Balistica antiaeriană	254
C-dor I. Linteş	Bombardamentul în picaj	254
C-dor I. Linteş	Cercetări în domeniul balisticei exterioare	482
G. Macovei	Profesorul G. ŢIŢEICA	416
Gr. Moisil	Sur un algorithme généralisant la théorie des fonctions monogâmes, qui peuvent être utiles pour l'integration des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur	482
Lt.-Col. Tr. N. I. Panaitescu	Siguranţa transporturilor militare	364
N. Praporgescu	Sur une classe d'équations intégrales et leurs applications à la statistique	76
Gh. D. Simionescu	Asemănare-Ortologie-Omologie	33
D. A. Stan	Cartea unui strălucit profesor	146
T. Vescan	Introduction à l'étude statistique des équations du mouvement des fluides	33
E. Vişa	Funcţiuni pseudo-hiperbolice	33
Cpt. I. Gh. Zamfirescu	Proiectile şi ţevi centrifugale	482

4. Reviste, periodice

Boletin Matematico 312, 583, 640, 641
Buletinul cadastral „Sintec" 481
Buletinul „I. R. E." 75, 312, 534
Buletinul Societăţii Politechnice din România 253, 312, 482
Buletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine . . 416, 481, 583
Bulletin de mathématiques et de phisiques pures et appliquées de l'école Politechnique de Bucarest 481
Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences 75, 480
Bulletin of the American Mathematical Society 76
Deutsche Mathematik 253, 363, 534
Disquisitiones Mathematicae et Physicae 253, 481
Gazeta Matematică. Supliment cu exerciţii 146, 312, 364, 534
Pozitiva 146, 253, 363, 482, 534, 583
Revista Matematică din Timişoara . . . 33, 76, 146, 204, 253, 312, 363, 416, 482, 534, 583, 641
Revista Matematică Hispano-Americană 583
Revista ştiinţifică „V. Adamachi" 33, 363, 482, 583
România Aeriană 312, 482
Sphinx 482
Universidad nacional de La Plata 76, 364, 416, 482

F. CERERI *)

Nr. Cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
1	24 (XXI)	?
4	24 „	?
5	24 „	?
7	59 „	?
8	59 „	?
10	91 „	?
11 **)	144 „	?
12	145 „	?
13	145 „	219 (XXI) ?
14	183 „	?
15	219 „	?
16	254 „	?
17	294 „	264 (XXXVIII) ?
20	420 „	?
23	17 (XXII)	?
24	75 „	?
26	161 „	?
27	187 „	?
28	213 „	?
29	231 „	?
30	258 „	?
31	277 „	?
32	277 „	259 (XXIII) 39, 186 (XXIV) ?
33	308 „	?
34	40 (XXIII)	?
35	40 „	?
36	65 „	?
37	86 „	211 (XXIII) ?
38	112 „	?
39	137 „	?
40	157 „	?
41	185 „	?
42	211 „	?
43	235 „	?
44	259 „	?
45	275 „	?
46	13 (XXIV)	?
49	57 „	?
50	70 „	?
51	88 „	?
52	103 „	?
55	168 „	?
56	168 „	?
58	16 (XXV)	?
59	36 „	?
60	58 „	?
61	58 (XXV)	?
62	71 „	146
63	71 „	?
64	122 „	?
65	122 „	?
66	155 „	?
67	175 „	?
68	199 „	?
70	223 „	?
71	251 „	?
73	45 (XXVI)	?
74	45 „	?
75	94 „	?
77	198 „	?
78	227 „	?
80	263 „	?
81	27 (XXVII)	?
82	27 „	160 (XXVII)?
83	160 „	?
84	197 „	?
85	197 „	?
86	240 „	?
87	283 „	?
88	329 „	?
89	361 „	?
91	26 (XXVIII)	?
92	57 „	?
93	57 „	?
95	136 „	?
96	136 „	?
97	213 „	?
98	213 „	?
100	297 „	?
101	342 „	?
102	458 „	?
103	458 „	?
104	24 (XXIX)	?
105	58 „	?
107	145 „	?
108	226 „	?
109	298 „	?
112	419 „	?
113	454 „	?
115	22 (XXX)	?
116	102 „	?
117	102 „	?
118	140 „	?
119	218 „	?

*) In această tabelă semnul ? arată că nu s'a primit răspuns sau că se mai aşteaptă răspuns dacă e pusă după răspuns.

**) A se vedea nota matematică dela pag. 249, Vol. XLVI.

Nr. Cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
120	261 (XXX)	?
122	306 „	?
123	337 „	?
124	383 „	?
126	423 „	?
128	33 (XXXI)	?
129	55 „	?
130	56 „	?
131	100 „	?
134	184 „	?
142	53 (XXXII)	?
143	102 „	?
144	142 „	?
146	216 „	?
148	296 „	?
149	343 „	?
152	19 (XXXIII)	19(XXXIII)?
153	51 „	?
154	51 „	?
157	146 „	?
158	185 „	?
159	217 „	?
162	295 „	?
163	341 „	?
166	457 „	?
179	385 (XXXIV)	?
181	24 (XXXV)	?
186	216 „	?
193	466 „	?
196	57 (XXXVI)	?
201	221 „	?
207	414 „	?
208	462 „	?
210	62 (XXXVII)	?
211	98 „	?
212	137 „	?
214	217 „	?
215	260 „	?
219	425 „	?
220	448 „	?
223	94 (XXXVIII)	?
227	57 (XXXIX)	?
235	222 „	?
237	360 „	?
238	409 „	?
239	458 „	?
243	212 (XL)	?
244	266 „	?
245	309 (XL)	?
247	499 „	?
248	553 „	?
250	148 (XLI)	?
251	189 „	?
252	241 „	?
253	292 „	?
254	343 „	?
255	384 „	?
256	485 „	?
257	533 „	?
259	629 „	?
262	251 (XLII)	?
263	307 „	?
264	368 „	?
265	422 „	?
266	530 „	?
267	588 „	?
268	639 „	?
269	34 (XLIII)	?
270	90 „	?
271	138 „	?
273	255 „	?
274	304 „	?
275	423 „	?
276	477 „	?
277	539 „	?
279	639 „	?
280	32 (XLIV)	?
282	309 „	34
284	479 „	?
286	647 „	534
289	248 (XLV)	?
290	306 „	?
291	419 „	?
292	479 „	?
294	530 „	?
295	584 „	77, 417
296	638 „	?
297	205 (XLVI)	?
298	254 „	?
299	315 „	?
300	364 „	?
301	483 „	?
302	534 „	?
303	583 „	?
304	641 „	?

G. DIVERSE

Pag.

1. Şedinţele Societăţii *«Gazeta Matematică»* 34, 365
2. Şedinţele Societăţii Române de Matematică. 418, 483, 535
3. Sporirea Bibliotecii *«Gazeta Matematică»* . . 35, 77, 147, 205, 254, 315, 364, 418, 483, 535, 536, 584, 641
4. Teza de doctorat a D-lui ARGHIRIADE 484

H. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE

a) Repartizarea pe materii a problemelor propuse în acest an

Aritmetica şi teoria numerelor . . . . . 5362, 3, 4, 78. 9, 82, 3, 4, 407, 8, 9, 23, 4, 37, 8, 9, 52, 3, 68, 75, 83, 4, 5, 97, 8, 9, 500, 13, 4, 27, 8, 9, 30.

Geometria . . . . . 2717, 4396, 452, 516, 5365, 6, 77, 80, 4, 5, 90, 8, 9, 413, 4, 5, 8, 22, 6, 8, 9, 30, 1, 40, 1, 3, 54, 5, 6, 7, 8, 9, 67, 9, 74, 6, 87, 8, 9, 91, 504, 12, 9, 20, 3, 32, 3, 4, 5, 6, 8, 9.

Algebra . . . . . 5369, 70, 1, 80, 1, 2, 3, 95, 7, 410, 1, 2, 25, 7, 46, 7, 8, 9, 61, 2, 3, 5, 6, 70, 1, 2, 4, 83, 6, 501, 2, 3, 8, 15, 8, 31, 7.

Trigonometria . . . . . 4368, 5333, 72, 3, 96, 402, 19, 34, 73, 82, 507.

Geometria analitică şi diferenţială . . . . . 3420, 5367, 8, 84, 6, 7, 8, 9, 400, 1, 3, 4, 5, 16, 7, 20, 32, 42, 4, 5, 60, 4, 77, 8, 9, 90, 2, 3, 505, 6, 17, 21, 2, 4, 5.

Mecanica . . . . . 4280, 602, 5260, 374, 5, 6, 406, 36, 50, 1, 80, 94, 5, 509, 10, 1, 40, 1.

Analiza . . . . . 5391, 421, 35, 81, 96, 526.

b) Repartizarea pe autori a problemelor propuse în acest an

N. Abramescu. 3920, 5505
V. Alaci 5473, 507, 37
Th. Angheluţă. . 5449, 61, 81, 96, 503, 17
I. S. Antoniu 5260
R. Bădescu. 5479, 525
Gh. I. Balaban 5429
H. M. Bodnărescu · 5401, 31, 55, 536
P. Boldescu 5366
M. St. Botez 5404
G-l Gh. Buicliu. . . 5365, 78, 416 26, 41, 58, 68, 86, 506, 21, 30
D. D. Buznea. 5414
G. Călugăreanu. 5465
St. Cetăţeanu 5363
Th. Gh. Cocea . . . 5384, 428, 54
G. G. Constantinescu . . 5370, 82, 427, 515
T. Coşereanu 5389
Lt. C. Costăchescu 5494
A. Dobrescu 5534
I. B. Florescu . 5423, 85, 500, 14, 28
U. Florescu. 5520
Cpt. M. Focşeneanu 5403, 44, 502
Otilia Georgescu-Roegen . . 5399, 411, 90
Ad. Gheorghiu 5533
Gh. Th. Gheorghiu 5435
Şerb. Gheorghiu . . 5415, 32, 48, 64, 87
M. Ghermănescu . . 5376, 81, 408, 46, 63, 70, 95, 509, 31
V. Ghiţescu. 5373
M. Grumăzescu, S-lt. . . 5372, 418
D. V. Ionescu. . . . 5412, 76, 518
I. Ionescu . . 5362, 77, 92, 407, 22, 37, 52, 67, 82, 97, 512, 27
C. Ionescu-Ţiu, Cpt. 5388, 97, 410, 62, 516
B. Lascu 5488
Linteş I., C-dor . . . 5364, 79, 94, 409, 24, 51, 3, 69, 84, 99, 529
Emil Mereuţă. 5369, 90, 5
N. N. Mihăileanu. · 2717, 4368, 96, 516, 5386, 400, 17, 42, 60, 77, 519
C. Mihu 5380, 96
Iul. Petrescu 5385, 98, 535
M. D. Popa 5457

Ad. Popescu, S-lt., ... 5425
Gh. Popescu-Botoşani. . 5391, 447
Tib. Popoviciu. . . 5371, 83, 405, 21, 39, 66, 72, 508
M. Il. Predoescu 5440
Oct. Gh. Rădulescu 5430
C. Săndulache 5438
I. C. Savin 5419
P. Sergescu . . . 5471, 83, 501, 26
Gh. D. Simionescu 5393, 433, 50, 6, 78
N. D. Ştefănescu 5489
Al. Stoenescu 4280, 602, 5375, 406, 36, 80, 511, 41
H. Teodoru 5498
V. Thébault 4452, 5459, 75, 93, 513
O. N. Ţino . . . 5413, 34, 538
Gabriela Ţiţeica . . 5420, 510, 40
I. I. Ţiţeica 5367, 491, 524
I. C. Vasiliu . . 5368, 402, 45, 523
E. C. Vijelie 5474
R. P. Voinea 5532
I. Gh. Zamfirescu, Cpt., 5374, 87, 443, 92, 504, 22, 39

c) Indicarea paginei la care problemele au fost propuse sau rezolvate

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
485	104 (V), 198 (XVI)	NR
585 *)	172 (VI), 238 (XVI)	
676	148 (VII)	
887	172 (IX), 358 (XVI)	NR
914	267 (IX)	
1000 **)	220 „, 438 (XVI)	NR
1008	244 (X), 462 (XVI)	NR
1056	100 (XI)	NR
1146 ***)	76 (XII)	NR
1156	100 „	
1180	172 „	
1188	228 „	. . . 80
1214	296 „	
1236	64 (XIII)	
1270	192 „	NR
1297	288 „	NR
1299	319 „	NR
1310	352 „, 372 (XXXI)	NR
1342	64 (XIV)	
1367	128 „	NR
1398	224 „	
1412	256 „	NR
1424	288 „	
1450	352 „	NR
1497	128 (XV)	
1533	224 „	
1553	288 „	NR
1577	352 „	
1591	39 (XVI)	
1632	159 „	
1637	160 „	
1650	200 „	NR
1656	239 „	
1676	279 „	
1679	280 „	
1690	320 „	
1702	360 „	
1711	399 „, 372 (XXXI)	NR
1735 ****)	464 (XVI)	
1753	80 (XVII)	
1764	120 „	NR

1) Numărul latin din paranteză indică volumul în care problema este propusă. Problemele care au în coloana a doua mai multe numere, au fost publicate sau rectificate de mai multe ori în volumul şi la pagina respectivă.

2) NR însemnează că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru celelalte probleme redacţia posedă soluţiuni care nu au fost publicate.

*) Soluţia problemei 585 s'a publicat la pag. 88. Vol. VII. Se mai aşteaptă discuţia la punctele cerute în nota de la finele acelei soluţii.

**) A se vedea lămuriri la pag. 291, Vol. XXXI.

***) A se vedea nota matematică dela pag. 634, Vol. XLVI, în baza căreia problema rămâne nerezolvată. soluţia dela pag. 77 neräspunzând adevăratei înterpretări a enunţului.

****) Vezi erata pag. 168, Vol. XLV.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
1790	240 (XXII)	
1823	400 „	NR
1831	439 „	
1835	440 „	
1840	466 „	
1898	199 (XVIII)	
1911	239 „	
1914*)	239 „	NR
1922	278 „	
1929	279 „	NR
1944	319 „	
1945**)	320 „	
1958	359 „	NR
1959	360 „	NR
1969	399 „	NR
2004	40 (XIX)	NR
2016	79 „	
2018	80 „	
2024	118 „	
2025	119 „	
2032	120 „	
2038	159 „	
2048	198 „	
2055	200 „	
2056	200 „	
2058	200 „	
2065	239 „	
2070***)	240 „	NR
2074	278 „	NR
2079	279 „	
2083	280 „	
2106	358 „	
2108	359 „	
2110	359 „	
2112	360 „	484
2118	399 „	
2130****)	460 „	
2133	439 „	
2144	461 „	35
2145	462 „	
2147	462 „	
2170	119 (XX)	NR
2176	120 „	
2197	198 „	
2217	239 „	
2222	240 „	
2227	279 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
2235	280 (XX)	
2240	318 „	
2247	320 „	
2248	320 „	
2249	320 „	
2250	320 „	
2263	359 „	
2264	360 „	NR
2265	360 „	
2266	360 „	
2274	398 „	
2284	439 „	
2290	439 „	
2301	462 „	
2302	462 „	
2311	40 (XXI)	
2330	118 „	206
2332	119 „	
2338	120 „ / 422 (XXXI)	NR
2343	157 (XXI)	
2344	158 „	
2353	159 „	585
2357	199 „	
2365	200 „	
2370	239 „	
2375	240 „	
2381	278 „	
2394	318 „	
2422	399 „	
2423	399 „	
2430	439 „	NR
2435	440 „	
2436	440 „	
2439*****)	440 „	642
2461	32 (XXII)	
2462	62 „	
2466	63 „	
2477	95 „	NR
2497	144 „	
2500	144 „	
2537	287 „	
2539	288 „	
2545	312 „	
2553	47 (XXIII)	
2560	72 „	
2566	120 „	

*) Vezi erata pag. 280, Vol. XVIII.

**) Vezi erata pag. 360, Vol. XVIII.

***) Vezi erata pag. 280, Vol. XIX.

****) Inlocueşte problema 2130 propusă la pag. 430, Vol. XIX.

*****) Pentru definiţia coordonatelor grafostatice, a se vedea nota dela pag. 212, Vol. XXI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
2569	120 (XXIII)	
2573	144 „	
2575	168 „	
2577	168 „	NR
2586	216 „	
2587	216 „	NR
2591	240 „	
2593	264 „	
2599	288 „	
2602*)	318 (XXXI)	
2607	31 (XXIV)	NR
2631	112 „	
2638	127 „	NR
2645	143 „	
2647	143 „	
2655	191 „	NR
2660	191 „	
2664	24 (XXV)	
2665	24 „	NR
2675	63 „	
2684	80 „	
2688	80 „	
2692	108 „	
2713	143 „	NR
2717 **)	164 (XLVI)	536
2731	191 (XXV)	
2752	264 „	
2758	56 (XXVI)	
2769	79 „	NR
2778	104 „	
2789	135 „	
2814	192 „	NR
2818	216 „	
2820	216 „	
2822	216 „	
2827	247 „	
2850	335 „	
2865	70 (XXVII)	
2886	104 „	NR
2906	184 „	
2909	221 „	NR
2912	222 „	NR
2922	263 „	
2926	264 „	NR
2936	343 „	NR
2947 ***)	376 „	NR
2953	416 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
2955	416 (XXVII)	
2960	448 „	82
2969	39 (XXVIII)	
2971	39 „	
2983	79 „	
2985	80 „	
2993	119 „	
2999	120 „	
3000	120 „	
3003	159 „	
3005	159 „	
3013	199 „	
3019	200 „	
3041	319 „	
3054	360 „	
3069	400 „	NR
3070	400 „	
3071	439 „	
3073	439 „	
3075	439 „	
3081	479 „ / 454 (XXXI)	NR
3085	480 (XXVIII)	
3086	480 „	
3091	39 (XXIX)	
3095	40 „	
3108	80 „	
3118	120 „	
3127	159 „	419
3134****)	199 „	
3150	240 „	
3160	280 „	147
3161	318 „	NR
3167	320 „	37
3173	358 „	
3177	359 „	
3178	360 „	
3180	360 „	
3189	400 „	
3198	440 „	
3208	480 „	423
3220	40 (XXX)	
3227	80 „	
3228	80 „	
3230	80 „	
3232	119 „	
3239	120 „	

*) Inlocueşte problema 2602 propusă la pag. 16, Vol. XXIV.

**) Inlocueşte problema 2717 propusă la pag. 143, Vol. XXV.

***) Vezi rectificarea pag. 448, Vol. XLIII.

****) A se vedea soluţia parţială dela pag. 254 şi nota dela pag. 300, Vol. XLII. Se aşteaptă completarea soluţiei.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3245	160 (XXX)	
3249	160 „	
3251*)	198 „	
3253	199 „	
3255	199 „	NR
3260	200 „	
3267	239 „	
3277	280 „	
3287	320 „	
3288	320 „	
3291	358 „	
3296	359 „	
3298	359 „	NR
3300	360 „	
3304	399 „	NR
3308	400 „	
3309	400 „	
3310	400 „	NR
3311	438 „	
3312	439 „	
3316	439 „	NR
3318	440 „	NR
3320	440 „	
3332	119 (XXXI)	
3340	40 „	
3341	79 „	
3350	80 „	NR
3360	120 „	
3389	240 „	
3405	319 „	NR
3412	358 „	NR
3419	360 „	
3424	399 „	NR
3425	399 „	NR
3429	400 „	
3430	400 „	
3439	440 „	
3445	479 „	
3448	479 „	
3457	39 (XXXII)	
3459	40 „	
3467**)	79 „	
3468	80 „	
3472	80 „	
3474	119 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3488	159 (XXXII)	
3493	160 „	
3495	199 „	
3497	199 „	
3499	199 „	
3504	200 „	
3506	239 „	
3512	240 „	
3513	240 „	
3521	279 „	
3522	280 „	NR
3523	280 „	NR
3533	320 „	NR
3534	320 „	
3535	359 „	
3536 ***)	438 „	
3542	360 „	NR
3545	398 „	NR
3546	399 „	
3547	399 „	. . . 366
3551	39 (XXXIII)	
3572	480 (XXXII)	NR
3573	480 „	NR
3584	79 (XXXIII)	
3589	80 „	
3597	120 „	
3600	120 „	
3607 ****)	159 „	
3608	159 „	NR
3610	160 „	
3620	199 „	
3622 *****)	239 „	
3625	239 „	
3627	278 „	NR
3632 ******)	279 „	
3635	279 „	NR
3640******)	280 „	
3644	319 „	
3647	320 „	NR
3653	359 „	
3657	359 „	NR
3658	360 „	
3659	360 „	
3660	360 „	
3664	399 „	

*) Un început de soluție s'a dat la pag. 314, Vol. XXX. Se așteaptă soluția completă.
**) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXII.
***) Vezi erata pag. 40, Vol. XXXIII.
****) Vezi erata pag. 240, Vol. XXXIII.
*****) Vezi erata pag. 280, Vol. XXXIII.
******) Problema rezolvată la pag. 95, Vol. XLII este 3630, iar nu 3632. A se rectifica în consecință tabla de materii a Vol. XLII și a volumelor următoare.
*******) Problema rezolvată la pag. 35, Vol. XLII este 3639, iar nu 3640. A se rectifica în consecință tabla de materii a Vol. XLII și a volumelor următoare.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3677	440 (XXXIII)	
3681	478 „	NR
3682	478 „	
3689	480 „	
3693	39 (XXXIV)	
3699	40 „	NR
3700	40 „	NR
3705	79 „	. . . 255
3706	79 „	
3713 *)	119 „	NR
3720	120 „	
3725	160 „	
3732	199 „	
3733	119 (XXXV)	
3736	200 (XXXIV)	NR
3749	240 „	
3762	319 „	
3764	319 „	
3768	320 „	
3772	359 „	
3776	360 „	
3780	360 „	
3784	399 „	
3787	400 „	
3790	400 „	
3792	439 „	
3793	439 „	NR
3802	479 „	NR
3804	479 „	
3807	480 „	
3808 **)	480 „	
3810	480 „	
3817	40 (XXXV)	
3819	40 „	
3820	40 „	
3823	79 „	
3824	79 „	
3829	80 „	NR
3836	120 „	NR
3844	159 „	NR
3845	159 „	
3849	160 „	
3853	199 „	NR
3863	239 „	
3864	239 „	NR
3867	240 „	
3873	279 „	. . . 643
3874	38 (XXXVIII)	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3876	279 (XXXV)	
3880	280 „	
3883	319 „	
3896	360 „	NR
3902	398 „	
3909	400 „	NR
3913	439 „	NR
3920 ***)	53 (XLVI)	
3933	39 (XXXVI)	NR
3934	39 „	
3939	40 „	
3944	79 „	NR
3945	79 „	. . . 427
3950	80 „	
3961	159 „	
3965	159 „	
3975	200 „	
3976	200 „	
3983	238 „	NR
3999	280 „	
4000	280 „	. . . 207
4010	320 „	NR
4013	359 „	NR
4022	398 „	
4028	400 „	
4030	400 „	NR
4034	439 „	NR
4035	440 „	
4041	38 (XXXVIII)	
4045	479 (XXXVI) / 142 (XL)	NR
4053 ****)	39 (XXXVII)	NR
4056	79 „	
4059	40 „	NR
4060	40 „	
4062	79 „	489, 590, 653
4067	80 „	
4070	80 „	NR
4074	119 „	
4075	120 „	
4080	120 „	
4084	159 „	
4085	159 „	NR
4096	200 „	
4098	200 „	
4102	239 „	NR
4103 *****)	239 „	NR
4104	239 „	

*) A se vedea erata dela pag. 672, Vol. XLVI.

**) A se vedea completarea enunțului la pag. 288, Vol. XL.

***) Înlocuește problema 3920 dela pag. 440, Vol. XXXV.

****) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXVIII.

*****) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXVIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4105	240 (XXXIII)	
4107	240 „	
4111	279 „	NR
4112	279 „	
4118	280 „	
4121	318 „	. . . 368
4126	319 „	
4127	320 „	
4132	359 „	NR
4148	400 „	NR
4150	400 „	NR
4151	438 „	NR
4155	439 „	
4163	478 „	. . . 370
4167	479 „	NR
4169	480 „	NR
4172	39 (XXXVIII)	NR
4181	78 „	. . . 647
4184	79 „	
4185	79 „	
4192	118 „	
4194	119 „	
4199	120 „	
4206	160 „	NR
4210	160 „	
4214	198 „	
4234	279 „	
4236	280 „	NR
4245	319 „	
4247	320 „	. . . 491
4249	320 „	NR
4250	383 (XXXIX)	
4251	359 (XXXVIII)	
4252	359 „	NR
4256	359 „	NR
4257	359 „	
4270	400 „	
4274	439 „	
4275	439 „	NR
4277	440 „	NR
4279	118 (XXXIX)	. . 38
4280 *)	164 (XLVI)	NR
4281	479 (XXXVIII)	NR
4283	479 „	NR
4285 **)	479 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4287	480 (XXXVIII)	
4289	480 „	NR
4290	383 (XXXIX)	NR
4297	40 „	
4302	78 „	
4303	78 „	NR
4307	79 „	
4315	120 „	NR
4316	120 „	
4319	120 „	NR
4320 ***)	120 „	. . . 568
4326	159 „	
4333	198 „	NR
4335	198 „	
4337	200 „	NR
4340	200 „	NR
4342	239 „	. . . 39
4350	240 „	
4352	286 „	NR
4356	287 „	NR
4357	288 „	NR
4358	288 „	NR
4360	334 „	NR
4362	334 „	NR
4363	335 „	NR
4368 ****)	164 „ (XLVI)	. 593
4370	336 „ (XXXVII)	
4373	383 „	
4376	384 „	
4380	384 „	NR
4384	431 „	NR
4389	432 „	NR
4393	478 „	NR
4395 *****)	479 „	NR
4396 ******)	502 „ (XLVI)	
4399	480 (XXXIX)	NR
4400	480 „	. . . 648
4402	480 „	
4404	526 „	NR
4405	526 „	
4407	527 „	
4411	528 „	
4412	528 „	NR
4416	46 (XL)	NR
4426	48 „	NR

*) Inlocueşte problema 4280 propusă la pag. 440, Vol. XXXVIII.

**) Vezi erata pag. 40, Vol. XXXIX.

***) Soluţia este cuprinsă în articolul dela pag. 568, Vol. XLVI.

****) Inlocueşte problema 4368 propusă la pag. 336, Vol. XXXVIII.

*****) Vezi erata pag. 48, Vol. XL.

******) Inlocueşte problema 4396 propusă la pag. 479, Vol. XXXVII şi pe cel dela pag. 165, Vol. XLVI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4435	96 (XL)	
4445	143 „	NR
4446	143 „	
4449	144 „	NR
4450	144 „	
4452 *)	165 (XLVI)	
4453	190 (XL)	
4458	191 „	
4468	239 „	NR
4470	240 „	443
4473	240 „	NR
4478 **)	285 „	
4480	286 „	NR
4481	286 „	NR
4484	287 „	
4486 ***)	288 „	NR
4487	334 „	NR
4489	334 „	NR
4490	335 „	NR
4492	335 „	NR
4494	336 „	
4496	336 „	
4509	384 „	
4511	430 „	NR
4513	430 „	NR
4515	431 „	
4516 ****)	165 (XLVI)	NR
4520	432 (XL)	
4525	478 „	
4533	480 „	
4534	480 „	NR
4540	527 „	
4547	573 „	NR
4548	573 „	
4550	574 „	
4553 *****)	574 „	
4557	575 „	
4558	576 „	NR
4559	116 (XLI)	
4560 ******)	116 „	
4561	116 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4564 *******)	117 (XLI)	
4566	118 „	
4568	118 „	
4571	119 „	
4573	119 „	
4576	119 „	
4578	120 „	
4581	166 „	
4587	262 „	NR
4588	168 „	
4589	168 „	
4590	168 „	
4592	215 „	NR
4593	215 „	
4596	215 „	
4598 ********)	216 „	NR
4601	216 „	NR
4602 *********)	53 (XLVI)	594
4603	262 (XLI)	NR
4605	263 „	85
4607 **********)	263 „	
4613	264 „	
4614	264 „	
4615	310 „	NR
4618	311 „	
4620	311 „	
4621	311 „	
4625	312 „	
4628	359 „	
4630	359 „	NR
4631	359 „	
4633	359 „	
4634	360 „	
4636	360 „	NR
4637	360 „	
4638	360 „	
4639	406 „	
4640	406 „	
4641	407 „	NR
4644	407 „	
4647	408 „	NR

*) Inlocuește problema 4452 propusă la pag. 190, Vol. XL.

**) Vezi erata pag. 384, Vol. XL.

***) Vezi erata pag. 120, Vol. XLI.

****) Inlocuește problema 4516 dela pag. 431, Vol. XL.

*****) I s'a dat o soluție la pag. 352, Vol. XLI. A se vedea nota dela pag. 302. Vol. XLII. Se așteaptă completarea soluției.

******) Vezi erata pag. 160, Vol. XLI.

*******) Vezi o soluție la pag. 412, Vol. XLI.

********) Vezi erata pag. 264, Vol. XLI.

*********) Inlocuește problema 4602 dela pag. 216, Vol. XLI.

**********) Vezi erata pag. 312, Vol. XLI.

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
4652	453 (XLI)	260
4657	454 „	NR
4660	455 „	
4664	503 „	
4667 *)	501 (XLV)	
4670	504 (XLI)	NR
4671	504 „	
4672	504 „	NR
4673	504 „	
4674	504 „	
4675	550 „	NR
4680	550 „	NR
4683	551 „	
4685 **)	552 „	NR
4686	552 „	NR
4688	598 „	
4690	598 „	NR
4693	599 „	NR
4695	600 „	
4696	600 „	
4697	600 „	
4698	600 „	
4703	647 „	
4704	647 „	
4705	647 „	
4706	647 „	
4710	648 „	NR
4717	55 (XLII)	
4720	56 „	
4722	56 „	
4723	110 „	
4726	110 „	
4729	111 „	
4730	111 „	
4731 ***)	112 „	
4734	112 „	NR
4738	166 „	261
4741	167 „	NR
4742	167 „	NR
4745	168 „	
4749	223 „	NR
4753	223 „	
4755	224 „	
4765	279 „	
4768	280 „	
4770	280 „	

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
4772	334 (XLII)	NR
4779	336 „	
4780	336 „	
4781	336 „	208
4783	390 „	
4785	390 „	
4788 ****)	390 „	
4790	391 „	
4791	391 „	NR
4793	392 „	
4798	446 „	597
4801	447 „	
4804	448 „	
4812	503 „	NR
4815	504 „	
4817	504 „	
4821	558 „	
4825	559 „	
4826	559 „	
4836	615 „	
4839 *****)	616 „	NR
4840	616 „	
4846	670 „	264
4848	671 „	
4849	671 „	NR
4853	672 „	
4854	672 „	
4859	55 (XLIII)	
4866	56 „	
4870	110 „	
4871	111 „	597
4872	111 „	
4879	166 „	NR
4880	166 „	
4889	168 „	
4890	168 „	NR
4892	222 „	599
4894	222 „	NR
4896	223 „	87
4897	223 „	
4898	223 „	
4901	224 „	NR
4905	278 „	NR
4907	279 „	316
4909	279 „	
4913	280 „	NR

*) Inlocueşte problema 4667 propusă la pag. 503, Vol. XLI.

**) I s'a rectificat numărul de ordine la pag. 600, Vol. XLI.

***) Vezi erata pag. 56, Vol. XLIII.

****) Problema rezolvată la pag. 611, Vol. XLII, este 4787, iar nu 4788. A se rectifica în consecinţă tabla de materii a Vol. XLII şi a volumelor următoare.

*****) Vezi erata pag. 672, Vol. XLII.

Nr. problemei	Propusă [1]	Pagina la care a fost: Rezolvată [2]
4914 *)	501 (XLV)	NR
4915	334 (XLIII)	601
4917	334 „	
4920	334 „	NR
4922	335 „	
4923	335 „	
4926	336 „	494
4928	390 „	
4929 **)	390 „	
4931	391 „	
4934	391 „	434
4935	391 „	43
4936	392 „	44
4937	392 „	NR
4938	392 „	NR
4940	446 „	
4942	446 „	377
4944	447 „	NR
4946	447 „	
4947	447 „	318
4948	447 „	151
4949	448 „	NR
4953 ***)	614 „	
4954	502 „	
4955	503 „	
4958	503 „	
4959	504 „	
4962	504 „	NR
4967	559 „	
4968	559 „	
4969	559 „	
4973	560 „	NR
4974	560 „	NR
4977	614 „	
4978	614 „	
4979	615 „	NR
4981	615 „	NR
4982	615 „	
4984	616 „	
4985	616 „	
4986	616 „	
4989	670 „	
4991	670 „	NR
4992	671 „	NR
4993	671 „	
4995	671 (XLIII)	
4997	672 „	NR
5001	54 (XLIV)	
5002	54 „	
5003 ****)	109 „	
5006	55 „	
5009	55 „	
5010	56 „	NR
5012	56 „	
5013	56 „	
5016	109 „	
5020	110 „	
5021	110 „	
5022	111 „	
5023	111 „	
5024	111 „	
5026	112 „	
5027	112 „	
5028	112 „	NR
5030	166 „	
5031	166 „	
5033	166 „	
5034	167 „	
5036	167 „	46
5037	167 „	NR
5039	168 „	266
5040	168 „	
5042	168 „	
5043	168 „	NR
5045 *****)	222 „	NR
5046	222 „	
5047	222 „	
5049	222 „	NR
5050 ******)	223 „	438
5051	223 „	
5052 *******)	223 „	
5053	223 „	
5054	223 „	
5055	224 „	
5056	224 „	
5059	277 „	NR
5060	277 „	
5061 ********)	334 „	
5064	278 „	
5068	278 „	

*) Înlocuește problema 4914, propusă la pag. 280, Vol. XLIII.

**) Numărul problemei rezolvate la pag. 494 este 4926 iar nu 4929.

***) I s'a modificat enunțul dela pag. 502, Vol. XLIII.

****) Înlocuește problema 5003 dela pag. 54, Vol. XLIV.

*****) Vezi erata pag. 280, Vol. XLIV.

******) Vezi erata pag. 448, Vol. XLIV.

*******) Vezi erata pag. 336, Vol. XLIV.

********) Înlocuește problema propusă cu același număr la pag. 277, Vol. XLIV.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
5069	279 (XLIV)	
5070*)	279 „	88
5072	280 „	NR
5073**)	280 „	NR
5074	334 „	NR
5075***)	335 „	
5076	335 „	NR
5079	335 „	
5080****)	335 „	439
5081	335 „	
5082	335 „	
5085	336 „	
5086	336 „	
5091	390 „	
5092	390 „	
5093	390 „	NR
5094	391 „	NR
5095	391 „	NR
5096	391 „	153
5097	391 „	209
5098	391 „	210
5099	391 „	NR
5102	392 „	603
5105	445 „	NR
5106	445 „	NR
5108	446 „	
5109	446 „	47
5110	446 „	
5111	446 „	
5112	447 „	212
5113	447 „	
5114	447 „	
5116	447 „	
5117	448 „	NR
5118	448 „	268
5119	501 „	
5121	501 „	
5123	501 „	NR
5125	502 „	
5126	502 „	NR
5127	502 „	NR
5128	503 „	
5129	503 „	NR
5130	503 „	NR
5131	504 „	89

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
5134	558 (XLIV)	
5135	558 „	214
5136	558 „	
5137	558 „	NR
5138	559 „	NR
5139	559 „	NR
5140	559 „	NR
5141	559 „	537
5142	559 „	
5143	560 „	
5144	560 „	
5145	560 „	
5146	560 „	NR
5147	560 „	
5149	614 „	548
5150	614 „	215
5153*****)	614 „	92
5154	615 „	94
5155	615 „	
5156	615 „	604
5157	615 „	NR
5158	615 „	
5160	616 „	154
5161	616 „	
5162******)	616 „	
5163	616 „	154
5165	669 „	650
5166*******)	109 (XLV)	
5167	669 (XLIV)	
5168	669 „	
5169	670 „	
5170	670 „	
5171	670 „	
5172	670 „	
5173	671 „	
5174	671 „	
5176	671 „	
5177	672 „	
5178	672 „	NR
5179	672 „	NR
5181********)	53 (XLV)	
5182	53 „	
5183	53 „	
5184	54 „	NR
5185********)	389 „	155

*) Din eroare a fost trecută ca publicată în tabla de materii a Vol. XLIV.
**) Vezi erata pag. 448, Vol. XLIV.
***) A se vedea erata pag. 3-9. Vol. XLIV.
****) Vezi erata pag. 448, Vol. XLIV.
*****) Vezi completarea enunțului la pag. 224, Vol. XLV.
******) Vezi erata pag. 672, Vol. XLIV
*******) Rectificat enunțul dela pag. 669, Vol. XLIV.
********) Vezi rectificarea numărului de ordine la pag. 112, Vol. XLV.
*********) Inlocuește problema 5185 propusă la pag. 54, Vol. XLV.

Pagina la care a fost

Nr. problemei	Propusă [1])	Rezolvată [2])
5186	54 (XLV)	381
5189	55 „	322
5190	55 „	95
5192	55 „	
5193	56 „	
5194	56 „	
5195	109 „	439
5196	109 „	NR
5197 *)	110 „	
5198	110 „	323
5199 **)	110 „	651
5200	110 „	NR
5202	111 „	156
5203 ***)	669 „	
5204	111 „	NR
5205	111 „	
5206	111 „	
5208	112 „	
5209	112 „	
5211	166 „	
5212	166 „	NR
5214	166 „	
5215	167 „	325
5216	167 „	
5217	167 „	
5218	167 „	216
5219	168 „	
5220	168 „	NR
5221	168 „	NR
5222	168 „	97
5223	168 „	383
5225	220 „	NR
5226	221 „	
5227	221 „	
5228	221 „	
5229	221 „	97
5230	221 „	NR
5231	222 „	
5232	222 „	48
5233	222 „	
5234	222 „	
5236	223 „	
5237	223 „	269
5239	224 „	605
5242	278 „	

Pagina la care a fost:

Nr. problemei	Propusă [1])	Rezolvată [2])
5244	278 (XLV)	
5245	278 „	99
5246	278 „	
5247	279 „	
5248	279 „	
5249	279 „	NR
5250	279 „	
5252	280 „	
5253	280 „	
5254	280 „	NR
5255	280 „	
5258	334 „	
5260 ****)	557 (XLVI)	557
5261	334 (XLV)	
5262*****)	334 „	
5263	335 „	607
5264	335 „	
5265	335 „	100
5267	335 „	
5268	336 „	
5270	336 „	273
5272	389 „	
5274	390 „	NR
5276	390 „	
5277	390 „	499
5278	390 „	
5279	391 „	NR
5280	391 „	217
5281	391 „	652
5282	391 „	101
5284	392 „	NR
5285	392 „	103, 157
5286	392 „	NR
5288	446 „	
5289	446 „	NR
5290	446 „	
5291	446 „	
5292	446 „	
5293 ******)	447 „	NR
5294	447 „	
5295	447 „	NR
5296	447 „	
5297	448 „	49
5298	448 „	NR
5299	448 „	329

*) Vezi erata pag. 168, Vol. XLV.

**) Vezi erata pag. 168, Vol. XLV.

***) Inlocueşte problema 5203 propusă la pag. 111, Vol. XLV.

****) Inlocueşte vechea problemă 5260 a cărei soluţie dela pag. 271, Vol. XLVI se anulează, după cum se anulează şi noua problemă 5260, propusă la pag. 444, Vol. XLVI. A se vedea nota dela pag. 529, Vol. XLVI şi erata dela pag. 672, Vol. XLVI.

*****) Vezi erata pag. 392, Vol. XLV.

******) Vezi erata pag. 560, Vol. XLV.

Nr. problemei	Propusă [1]	Pagina la care a fost: Rezolvată [2]
5300	448 (XLV)	385
5301	448 „	
5302	501 „	
5303	502 „	
5304	502 „	
5305	502 „	
5306	502 „	
5307	502 „	
5308	503 „	
5309	503 „	NR
5311	503 „	
5312	503 „	
5313	504 „	
5314	504 „	387
5316	504 „	
5317	557 „	161
5318	557 „	
5319	557 „	
5320	557 „	
5321	557 „	
5322	558 „	
5323	558 „	441
5324	558 „	
5325	558 „	
5326	558 „	
5327	559 „	
5328	559 „	
5329	559 „	219
5330	560 „	549
5331	560 „	654
5332	613 „	
5333	613 „	NR
5334	614 „	
5335	614 „	NR
5336	614 „	
5337	614 „	
5338	615 „	442
5339	615 „	
5340	615 „	552
5341	615 „	
5342	615 „	NR
5343	616 „	
5344	616 „	NR
5345	616 „	NR
5346	616 „	NR
5347	669 „	NR
5348	670 „	
5349	670 „	NR
5350	670 „	
5351	670 „	NR
5352	670 „	
5353	670 „	501
5354	671 „	NR
5355	671 „	

Nr. problemei	Propusă [1]	Pagina la care a fost: Rezolvată [2]
5356	671 (XLV)	608
5357	671 „	NR
5358	671 „	656
5359	672 „	
5360	672 „	NR
5361	672 „	
5362	53 (XLVI)	162
5363	53 „	
5364	53 „	
5365	54 „	
5366	54 „	
5367	54 „	
5368	54 „	
5369	54 „	
5370	55 „	NR
5371	55 „	
5372	55 „	
5373	55 „	658
5374	56 „	
5375	56 „	554
5376	56 „	NR
5377	110 „	388
5378	110 „	609
5379	110 „	
5380	110 „	
5381	110 „	NR
5382	110 „	NR
5383	111 „	NR
5384	111 „	
5385	111 „	661
5386	111 „	
5387	112 „	661
5388	112 „	NR
5389	112 „	610
5390	112 „	
5391	112 „	NR
5392	165 „	
5393	165 „	
5394	166 „	NR
5395	166 „	
5396	166 „	
5397	166 „	
5398	167 „	612
5399	167 „	
5400	167 „	662
5401	167 „	663
5402	167 „	
5403	168 „	
5404	168 „	
5405	168 „	NR
5406	168 „	664
5407	221 „	332
5408	221 „	NR
5409	222 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
5410	222 (XLVI)	NR
5411	222 „	NR
5412	222 „	
5413	222 „	
5414	223 „	
5415	223 „	
5416	223 „	
5417	223 „	
5418	224 „	
5419	224 „	
5420	224 „	
5421	224 „	NR
5422	578 „	NR
5423	278 „	
5424	278 „	
5425	278 „	NR
5426*)	389 „	
5427	278 „	
5428	279 „	
5429	279 „	NR
5430	279 „	
5431	279 „	
5432	280 „	
5433	280 „	
5434	280 „	
5435	280 „	
5436	280 „	. . 442
5437	333 „	. . . 668
5438	333 „	
5439	334 „	
5440	334 „	
5441	334 „	
5442	335 „	
5443	335 „	
5444	335 „	NR
5445	335 „	
5446	335 „	
5447**)	445 „	
5448	336 „	NR
5449	336 „	NR
5450	336 „	NR
5451	336 „	
5452	389 „	NR
5453	389 „	NR
5454	389 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
5455	389 (XLVI)	NR
5456	390 „	
5457	390 „	
5458	390 „	
5459	391 „	
5460	391 „	NR
5461	391 „	NR
5462	391 „	NR
5463	392 „	NR
5464	392 „	
5465	392 „	NR
5466	392 „	NR
5467	445 „	
5468	445 „	
5469	445 „	
5470	446 „	NR
5471	446 „	NR
5472	446 „	NR
5473	446 „	
5474	447 „	
5475 ***)	502 „	
5476 ****)	669 „	
5477	447 „	
5478	447 „	NR
5479	448 „	NR
5480	448 „	
5481	448 „	NR
5482	502 „	. . . 613
5483	502 „	
5484	503 „	NR
5485 *****)	503 „	NR
5486	503 „	
5487	503 „	NR
5488	503 „	
5489	503 „	
5490	503 „	NR
5491	504 „	NR
5492	504 „	NR
5493	504 „	
5494	504 „	NR
5495	504 „	NR
5496	504 „	
5497	557 „	NR
5498	557 „	NR
5499	557 „	NR

*) Înlocuește problema 5426 de la pag. 278, Vol. XLVI.

**) Înlocuește problema 5447 de la pag. 335, care a fost propusă anterior în o revistă străină.

***) Înlocuește enunțul de la pag. 447, Vol. XLVI.

****) Înlocuește problema de la pag. 447, Vol. XLVI.

*****) Vezi erata de la pag. 560, Vol. XLVI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
5500	558 (XLVI)	NR
5501	558 „	NR
5502	558 „	NR
5503	558 „	NR
5504	559 „	NR
5505	559 „	NR
5506	559 „	NR
5507	559 „	NR
5508	560 „	NR
5509	560 „	NR
5510	560 „	NR
5511	560 „	NR
5512	614 „	NR
5513	614 „	NR
5514	615 „	NR
5515	615 „	NR
5516	615 „	NR
5517	615 „	NR
5518	615 „	NR
5519	616 „	NR
5520	616 „	NR
5521*)	616 (XLVI)	NR
5522	616 „	NR
5523	616 „	NR
5524	616 „	NR
5525	616 „	NR
5526	616 „	NR
5527	664 „	NR
5528	669 „	NR
5529	670 „	NR
5530	670 „	NR
5531	670 „	NR
5532	670 „	NR
5533	670 „	NR
5534	670 „	NR
5535	671 „	NR
5536	671 „	NR
5537	671 „	NR
5538	671 „	NR
5539	671 „	NR
5540	672 „	NR
5541	672 „	NR

I. EXERCIŢII **)

Aritmetica şi Teoria Numerelor . . . . . 20(669).
Geometria . . . . . 4(109), 8(221).
Algebra . . . . . 7(220), 11(277), 16(555), 19(614).
Trigonometrie . . . . . 1(52), 6(163), 9(221), 12(333), 13(388), 14(444), 15(501), 17(556), 18(556).
Mecanica . . . . . 3(108).
Geomeria Analitică . . 2(108), 5(109), 10(277).

J. TABLOUL NUMELOR

Abason E., 7, 37.
Abel H. N., 394.
Abeles J. F., 100, 383.
Abramescu N., 6, 7, 27, 53, 64, 105, 107, 195, 254, 315, 418, 559, 583.
Achile, 464.
Adam N., 614.
Alaci V., 7, 146, 312, 363, 446, 559, 641, 671.
Aldea V. M., 163, 220, 303, 354.
Aldea N. N., 7.
Aldea V. V., 49, 100, 102, 354.
Alexandrescu C., 154.
Alexandroff I., 255.
Alexe C., 594.
Alexie, Ţar al Rusiei, 250.
Alexiu I., 5, 6, 7, 260.
Allard, 313.
Amaldi U., 584.
Amărăşteanu F. M., 261.
Ampère, 417.
Ancochea G., 583.
Andonie Gh., 7.
Andonie S. I., 100, 102, 220, 594, 610, 660, 668.
Andreescu Gh. I., 354.
Andrei Gh. A., 353.
Andrei M. C., 332, 594, 610.
Andriescu Virg., 97.
Andrievici N. 594, 610.
Andronescu Pl. 7, 289, 345, 408, 512, 623.

*) A se vedea erata de la pag. 672, Vol. XLVI.

**) Numerele din paranteză indică pagina la care a fost propus exerciţiul al cărui număr precede paranteza.

Angelescu A., 20, 184, 450, 451.
Anghelichi E. R., 594.
Angheluţă Th., 5, 6, 7, 195, 315, 336, 365, 391, 416, 423, 424, 426, 448, 467, 481, 504, 559, 607, 608, 615, 652, 653.
Antomari X., 484.
Antoniu Corn., 7.
Antoniu S. I., 5, 6, 7, 217, 219, 271, 273, 530, 555, 556, 575, 647, 648.
Apollonius, 557, 574.
Appell M., 535.
Appell P., 535.
Appeltauer, 304.
Arago Fr., 71, 305, 417.
Archimede, 400, 485, 641.
Archytas, 400.
Arendt R. E., 100, 354.
Arghiriade Em., 7, 484, 534.
Aristotel, 463.
Armeanca I., 7.
Aron I. Gh., 354.
Arşavschi K Al., 208
Asachi Gh., 304.
Atanasiu C. V., 156.
Aubert P., 315, 442, 451, 452, 484, 584.
Aurian A. J., 648.
Autenheimer Fr., 365.
Avram N. C. Lt., 28.
Avramescu A., 536.
Avramescu C., 7.

Bacaloglu E., 68, 69, 315, 416.
Bădărău E., 7, 138.
Bădărău Gab., 481.
Badea A. I., 163, 219, 271, 594, 614.
Bădescu Em. A., 370.
Bădescu F. Fl., 354.
Bădescu A. L., 7.
Bădescu R., 7, 314, 448, 481, 616, 663.
Bădulescu P. N., 442, 554, 594, 664.
Baidaff Ig. B., 8, 445, 640, 641.
Bailly S. J., 417.
Bakonyi C. C., 101, 102, 220, 332, 388, 610.
Balaban I. Gh., 279.
Bălan G. Şt., 8.
Banciu I., 8, 57, 58.
Bănulescu M., Maior, 482.
Baranga T. G., 613.
Barbarin P., 584.
Barbilian D., 5, 8, 58, 418, 535, 640.
Bărbuţ T., 614.
Bârlea Gh. V.*), 303, 354, 594.
Bârlea-Suhăţeanu G. V.**), 89, 98, 154, 330, 332, 610.
Bârzu G. V., 100.
Başturescu Gh., 417.
Bazacov Gh. 153.
Beghin H., 584.
Belian R., 36.
Bell, 305.
Bellavitis, 71.
Benedict T. E., 641.
Beneş P., 5, 8, 450.
Bercovici M., 82.
Bernouilli, 68.
Bernouilli, Joh., 68.
Bertrand J., 71, 72, 293, 297, 298, 299, 305.
Bessel, 71, 305.
Bianchi L., 483.
Biggeri C., 641.
Binet, 71, 305, 417.
Biot, 71, 305, 417.
Blanchet M., 71, 305.
Blumen M., 38.
Bodewig, 644.
Bodnărescu M. H., 47, 95, 98, 100, 153, 154, 156, 157, 167, 220, 266, 268, 279, 318, 324, 331, 382, 383, 390, 438, 501, 594, 612, 658, 660, 663, 671.
Bogdan Gr. Gh., 99, 156, 219, 220, 354, 441, 594, 614.
Boian D. Em., 44, 438.
Boiangiu D. D., 49, 101, 102, 157, 215, 220, 303, 330, 332, 352, 353, 354, 610, 614.
Bojin D., 330.
Boldescu P., 54, 533
Bolgiu O., 565.
Boltzmann, 313.
Bonnet O., 305.
Boole, 305.
Borda, 417.
Borel E., 312
Born M., 313.
Borneanu G., 8.
Bornerus C., 461.
Borş C., 204, 640.
Bose, 313, 314.
Botea G. Em., 6, 8, 195.
Botea G. N., 20, 195, 434.
Botez St M., 5, 6, 8, 146, 168, 204.
Bouchéry G., 439.
Bouligand G., 418.
Bour E., 584.
Boutaric A., 451.
Brahy Ed. 451.
Brătila F., D-ra, 482, 583.
Bratu Gh., 8,
Brener M. A., 8.
Brezeanu N. Corn., 99.
Brianchon, 194, 532.
Bricard R., 584.
Brighiu I. Corn., 353.
Briot Gh., 316.
Brocard, 105, 167, 213, 322, 323.
Broch, 71, 72.
Broglie L. de 137.
Bromwick, 365.
Broşteanu Gh. Gh., 354, 612, 613, 663.
Broşteanu-Tazlău Gh., 388.
Broşteanu Th., 613.
Bruckner V., 8.
Brül M. L., 38.
Bruno G., 290, 305.
Bucur N. G., 613.
Bucurescu I. Cpt., 8.
Budeanu I. C., 8, 416.
Buicliu Gh. G-l., 5, 6, 8, 34, 54, 85, 86, 92, 93, 96, 99, 100, 110, 135, 140, 197, 207, 219, 223, 261, 277, 323, 334, 350, 352, 353, 368, 377, 381, 389, 390, 412, 416, 445, 450, 468, 503, 528 530, 559, 600, 609, 610, 616, 637, 643, 646, 669, 670.
Bujoreanu N., 8.
Bunescu D. A., 5, 8, 302, 450, 467.

*) Acelaşi cu *Bârlea-Suhăţeanu G. V.*
**) Acelaşi cu *Bârlea Gh. V.*

Bungescu I. Lt· Col., 8.
Bungeţeanu D., 21.
Bungeţeanu Preduţa, 20, 21, 22, 255, 316, 365, 418, 484, 535, 584.
Buradescu T., 9.
Burileanu Şt. g-l., 9
Buşilă Ad., 9.
Buşilă D. C., 9.
Buşilă G. I., 6, 9, 29.
Buzincu I. I., 39, 209.
Buznea D. D., 93, 100, 223, 267, 381.

Căldăraru L., 38.
Caligny, 305.
Călin I. D., 100.
Călin Gh., 38.
Călugăreanu G., 75, 392.
Cambureanu V. D., 9.
Cambureanu V. V., 9.
Câmpan Florica, 70, 416.
Cantor M., 398.
Capriel I., 9.
Caracudovici Margareta Florica, 584.
Carafoli E, 9, 481.
Caraman E., 9.
Cardan, 546.
Cârdeiu D. Gh, 153, 154.
Carmichael D. R, 591, 646.
Carnot L., 109, 417.
Carnoy J., 418.
Caron J., 484.
Caronnet Th., 484.
Cârstoiu I., 208.
Cartan E., 24, 115, 483, 583.
Cartianu Gh., 9.
Căruntu D. F., 613.
Cassian Gh. Col., 9.
Catalan, 71, 305.
Catanev O., 641.
Cauchy A., 71, 72, 250, 251, 293, 297, 305, 306, 394, 417, 489, 490, 562.
Caula V. I., 614.
Cavalliero G. V., 640.
Caylay, 71, 394.
Cazacu N. C., 9.
Cazan V. Gh., 38.
Cazanacli V. P., 9, 154.
Ceauşescu I. V., 39.
Ceauşoglu V., 207.
Cech, 24, 483.
Cerchez M.*, 383, 385.
Cetăţeanu St., 39, 43, 44, 49, 53, 102, 146, 215, 323, 324, 331, 383, 415, 441, 548, 594, 610, 650.
Ceva, 193, 212, 234, 532.
Chasles M., 71, 394.
Cherţman S. M., 43, 89, 93, 154, 382.
Chintescu M. M., 154, 354, 514.
Chiriac I. C., 600.
Chiricescu V., 9.
Chiricuţă A., 9.
Chiriţă M. M., 648.
Chiţulescu I. I., 5, 9, 450.
Chollet T., 452.
Cioc. M., 9.
Ciorănescu I. C, 38.
Ciorănescu I. N., 6, 10, 416, 584.
Ciorapciu F. M., 10.
Cioroianu M. C., 353.
Cirill, 460.
Claudian V., 10, 89, 254, 255.
Clausen, 71.
Clausius R., 365.
Clebsch A., 315.
Cocea Gh. Th., 87, 111, 264, 279, 389.
Cojocaru P. P., 39, 209.
Colerus E., 451.
Collignon Ed., 70.
Coman I. L., 614.
Comberousse Gh. de 255, 315, 316, 532.
Conachi C.**), 146.
Condorcet, 417.
Constantin C. P., 220.
Constantin V. P.***) 47, 87, 95, 99, 154, 156, 210, 216, 219, 409, 438, 548.
Constantinescu I. E., 354, 452, 482.
Constantinescu Gh. Ing. 10.
Constantinescu Gh. Prof. 490.
Constantinescu Gh. Gh., 5, 6, 10, 55, 76, 110, 278, 299, 450, 453, 482, 483, 615, 634, 640.
Constantinescu N. I., 489.
Constantinescu T., 10.
Constantinescu Z., 10.
Copernic N., 397, 641.
Coriolis, 305.
Cornăţeanu I. A., 44, 87, 89, 438.
Coşereanu I., 10, 112, 610.
Coşniţă C., 311, 534, 583.
Coşniţă V., 38.
Costăchel A., 481.
Costăchescu C. Cpt., 416, 504.
Costescu Gh. I., 49, 303, 354.
Costin D. Al., 613.
Costinescu C. A., 156.
Costinescu D., 10.
Crăciunescu C., 10.
Crăciunescu Marcel, 354.
Crăciunescu I. Mioara, 44, 438, 614.
Craiu N. I., 38.
Cramer H., 219, 423, 483.
Cranz, 291.
Crelle, 71, 305.
Creţianu A., 58.
Creţianu Gh., 57.
Cristea I. C., 49, 95, 100, 156, 354, 381.
Cristescu C-dor, 58.
Cristescu V., 39, 52, 96, 249, 316, 365 635, 658, 669.
Cruceanu Gh. C., 49, 330, 354.
Cruceru Gh. A., 332.
Cruceru Gh. C., 101, 102, 219, 303, 594.
Crut, 395.
Culianu Al., 58.
Cuşută H. 207.

D'Adhémar R., 418.
D'Alembert, 293, 294, 295,
Damaschin C., 614.
Darboux G., 75, 483.
Dăscălescu Hr., 10.

*) Acelaşi cu *Mihu C.* şi cu *Mihul C.*
**) Acelaşi cu *Konaki Logofătul.*
***) Acelaşi cu *Pantelimon V. C.*

Dasen C., 641.
Deaux R., 359.
Debye, 313.
Degranges E., 452.
Delambre, 417.
Delaunay Ch., 71, 305.
Delsol E., 205.
Desargues, 47.
Desboves H. A., 489.
Descartes, 394, 545.
Descent R., 641.
Despot Vodă, 464, 466.
Diaconescu V. C., 49, 330, 354, 441.
Diaconescu D. I., 44, 324.
Diaconescu I. I., 153.
Diaconescu C. N., 613.
Diaconescu V. T., 38.
Dieudonné J., 413.
Dikson, 644
Dimitriu G. I., 250.
Dinescu P. Al., 536.
Dinu St., 38.
Dirac, 313.
Dirichlet L. P. G., 71, 305.
Djebcu L., 154.
Dobrescu A., 10, 534, 583, 670.
Dobrescu P. P., 491.
Doehlemann K., 418.
Donciu N., 10.
Donici N., 416.
Dorneanu V., 38.
Dovgan V. Gh., 154.
Drăghicescu P. P., 48, 95, 98, 99, 101, 156, 163, 214, 219, 220, 271, 324, 330, 354, 383, 388, 441, 442, 444, 451, 501, 536, 552, 594, 610, 612, 613, 651, 659, 660, 661, 662, 668.
Dragomir M. A., 154, 354, 594, 668.
Dragomirescu-Buzne Ed. Cpt., 10, 482.
Drâmbă C., 75, 535.
Drosescu Gh. I., 10.
Droz, 630, 632, 633.
Dubois Ed., 535.
Duffailley J., 316, 535.
Dufrénois, 451.
Duhamel C. M., 71, 154, 217, 294.
Dumitrescu C., 614, 637.
Dumitrescu A. D., 10.
Dumitrescu F. Dan, 353, 450.
Dumitrescu Eug., 260.
Dumitrescu I. Gh., 5, 6, 10, 409.
Dumitrescu M. Gh., 153, 322.
Dumitrescu C. I., 10.
Dumitrescu Victor, 57, 58.
Dumitriu I. Călin, 154.
Dumitriu C. I., 416.
Dumitriu-Duică I., 44.
Duporcq E, 255.
Dupuis J., 415.
Durrande, 70.

Eckstein V., 86, 274, 277.
Edison, 647.
Eftimie D. C., 93, 99, 101, 102, 163, 216, 220, 221, 269, 331, 383, 441, 550, 594, 604, 607, 610, 613, 656, 663.
Einstein A, 289, 313.
Elefterie M., 57.
Eliade V., 441.
Elias T. P., 332, 610.
Ellis, 305.
Emanuel D, 418, 561, 562,
Encke, 305, 306.
Enculescu O., 146.
Enulescu O., 76, 237.
Escardos L., 583.
Escary J. M., 535.
Euclide, 29, 306, 314, 327, 393, 398, 461, 525.
Euler, 68, 165, 394, 597.

F. G. M., 36, 213, 255, 265, 316, 609.
F. J. 535, 584.
Faa de Brunno F. C., 315.
Fabry E., 365.
Farny, 630, 632, 633.
Fehr H., 77.
Felix C. G-l. 11.
Fermat, 71, 306, 352, 394, 591, 592.
Fermi, 313, 314.
Feuerbach, 95, 397, 413.
Fibonacci, 82, 83, 84, 467, 578.
Fila G. E., 101, 102, 165, 220, 268, 324, 325, 381.
Filipescu C., 58.
Filipescu Em. Gh., 20, 147, 150, 484, 489.
Filiti Gr. Gr., 49, 102.
Fischer B. P., 584.
Fistié G., 646.
Fitz-Patrik J., 255, 415.
Florea C. Al., 38.
Florescu B. I., 252, 278, 503, 526, 558, 590, 615, 643, 645, 653, 654, 669.
Florescu M. U., 11, 616.
Florescu L. V., 27, 28, 87, 108, 317, 442, 444, 594, 662.
Floreşteanu D. Al., 354.
Florian Z., 11.
Focşeneanu I. M. Căp., 6, 11, 168, 245, 335, 363, 558, 566, 568, 656, 658.
Fontené G., 364.
Forti B. C., 77.
Fourier, 417.
Fourret G., 69.
Franke, 130, 187.
Frenet F., 365.
Fridman-Câmpina B., 609.
Friedmann I. B., 89.
Fubini G., 24, 483.
Fulgeanu D., 154.
Fundăţeanu C. I., 11.
Furtunescu, col., 58.
Furs, 68.

Gabrielescu R., 11.
Gâlcă I T., 11.
Galileu G., 394, 641.
Galois, 394.
Ganea M. M., 303, 354, 594,
Gascheau, 305.
Gassarus Ach., 460.
Gataianţu V. B., 38.
Gauss, 50 51, 71, 300, 301, 305, 394, 597.
Gauthier, 313.
Gavrilescu Al, 58.
Genochi A. 515.
Georgescu I. C., 530.
Georgescu D., 80.
Georgescu N., 614.
Georgescu I. N., 11.
Georgescu N. N., 11.
Georgescu Răducanu, 103, 582.
Georgescu-Racoviţă I.I.,38.
Georgescu-Roegen N., 11.
Georgescu-Roegen Otilia, 5, 6, 11, 74, 167, 222, 504.
Georgescu-Val N, 11.
Gereanu G. Ana, 44, 438.
Gergonne, 132, 186, 305.

Gerling, 71.
Gheoculescu A., 35.
Gheorghe I. M., 614.
Gheorghieş Al. G-l, 11.
Gheorghiu C. Ad., 5, 6, 11, 137, 253, 261, 450, 574, 604, 605, 609, 670.
Gheorghiu Al., 536.
Gheorghiu Th. Gh., 5, 6, 11, 38, 52, 74, 76, 82, 89, 91, 280, 308, 309, 450, 453, 579, 669.
Gheorghiu S. I., 11.
Gheorghiu A. M., 11.
Gheorghiu D. M., 354
Gheorghiu E, Oct. 89, 101, 102, 220, 594, 609, 614, 668
Gheorghiu P. P., 89.
Gheorghiu A. Ş., 11, 207, 209, 223, 280, 336, 392, 503.
Ghermănescu M., 5, 6, 11, 33, 44, 46, 49, 51, 56, 67, 80, 88, 97, 110, 153, 154, 155, 204, 205, 208, 209, 221, 237, 253, 268, 269, 307, 335, 392, 434, 446, 453, 457, 458, 459, 460, 467, 481, 504, 560, 583, 670.
Ghermani D., 12.
Ghica Al., 418.
Ghimicescu Gh., 38.
Chimuş D. A. Lt.-Col., 12.
Ghimuş A. D., 614.
Ghiocel V. V., 648.
Ghircoiaşu V. N., 12, 534.
Ghişoiu I. P., 12, 95, 367.
Ghiţescu V., 5, 6, 12, 55, 108, 205, 329, 331, 359, 363, 612 629, 658, 660.
Gibbs, 314.
Gingian D., 614.
Gligor N. I., 102, 220, 303, 330, 354, 594.
Gloden A., 73, 200, 355, 645, 646.
Godeaux L., 452.
Gogâţa Drosida, 100, 102.
Goldbach, 641.
Goldstein F., 38.
Gonzales O. M., 641.
Gonzales G. T., 641.
Goormaghtigh R, 189.
Gorciu Gh. V., 536.
Gorovei S., 207.
Gospodin T., 105, 383, 387.
Goursat E., 365.
Granville W., 451.
Grassmann H., 71, 77.
Gregory, 305.
Grigorescu C., 12
Grigorescu E., 534.
Grigoriu A. D., 381.
Grinaerus*), 400.
Grofşoreanu Gh, 38.
Grumăzescu M. S-Lt., 55, 86, 88, 146, 154, 210, 224, 267, 322, 381, 438, 600.
Grunert, 304, 305.
Grynaerus**), 398.
Gudermann, 71.
Guichard Cl, 484.
Guimaraes R., 35, 147.
Guţu I. Al., 12, 193, 253.
Guţu I., 536.
Guţu V., 12.

Haberland G., 452.
Hadamard H., 255.
Hadamard J., 115, 451.
Haedenkamp. 71, 305.
Hamilton J. N. 71.
Hanganu D. M., 12.
Haret C Sp., 316, 449.
Hasse H., 584.
Heisenberg W., 313.
Hergopol Gh., 301, 302.
Herlea V., 101.
Hermann V., 208.
Hermite Ch., 30, 364, 394.
Hesse O., 71.
Hessenberg G., 584.
Hjelmslev J., 535.
Hoheisel G., 584.
Holywood J.***), 398.
Homer, 464.
Horia D. I, 614.
Hornstein H. S., 43.
Hospital, 194.
Hristea H., 207.
Hulubei I. D., 480.
Hulubei T., 38.
Humbert E., 255.
Hütte, 450.

Iacob Caius, 253, 481, 482, 483, 534, 535.
Iacomi D. M., 99, 441, 594, 610.
Iaculescu M., 364.
Iancu I. I., 382.
Ianculescu A., 154.
Ianculescu R., 12.
Ieşan Şt. Al., 303, 353, 451.
Ilie A. I. ****), 301.
Iliescu C. C., 353.
Iliescu D., 38.
Iliescu Gh., 5, 12, 450, 459.
Iliescu P., 38.
Iliescu Tr., 219.
Iliescu I. V., 44.
Imber A., 418.
Inculeţ I. I., 594, 613.
Ioachimescu Gh. A., 12, 46, 255, 315, 365.
Ioachimescu A. Gh., 12, 450.
Ioanovici A., 12.
Ionaş I., 465.
Ionescu Cicerone, 610, 614.
Ionescu V. D., 6, 12, 32, 75, 135, 151, 222, 237, 419, 422, 447, 481, 494, 534, 615, 669.
Ionescu B. N. Gh., 44, 87, 153, 266, 318, 438.
Ionescu P. H., 5, 6, 12, 43, 44, 88, 438.
Ionescu Ion, 5, 6, 12, 35, 40. 53, 70, 71, 76, 77, 110, 121, 146, 147, 161, 162, 163, 165, 178, 190, 205, 221, 230, 250, 254, 255, 278, 315, 332, 333, 350, 351, 353, 364, 365, 366, 368, 370, 378, 388, 389, 394, 396, 410, 417, 439, 454, 450, 451, 460, 483, 489, 502, 526, 534,

*) Acelaşi cu *Grynaerus*.
**) Acelaşi cu *Grinaerus*.
***) Acelaşi cu *Sacrobosco* şi *Sacrobusto*.
****) Acelaşi cu *Ioan A. I.* şi cu *Ţiţeica I. I.*

535, 557, 583, 584, 590, 601, 613, 614, 635, 641, 642, 653, 668, 669.
Ionescu I., elev, 613.
Ionescu F. P., 610.
Ionescu Th. P., 642.
Ionescu D. St., 154.
Ionescu Tib., 12.
Ionescu-Bis P. H.*) 146, 433, 438.
Ionescu-Bujor C., 5. 6, 13, 33, 47, 48, 70, 76, 146, 249, 450, 524, 566, 568, 575.
Ionescu-Ţiu D. C. Cpt., 5, 6, 13, 112, 154, 157, 166, 222, 391, 416, 450, 615.
Ionescu-Zane D. Gh., 13.
Iorgulescu N. F., 154, 220, 330, 594.
Irimescu I. P., 330, 614.
Istinie-Brezuicu I. C., 38.
Istrati C. Lt-C-dor, 13, 36.
Iuliu Caesar, 460.
Ivan C. Z.**), 156, 219, 610.
Ivănescu C., 39, 309, 433.

Jacobi, 71, 305, 394.
Jareghie V. I., 100, 101, 211, 321, 322, 324, 382.
Javary A., 484.
Jerabek, 165.
Jiletcovici G. Al., 51, 89, 93, 99, 101, 102, 156, 215, 330, 387, 614.
Jipa C. Al., 438.
Jipa C., 549.
Jipa N., 614.
Joachimsthal F., 365.
Jordan C. M., 143, 364.
Jouffert F., 418.
Julia G., 418, 535, 584.
Jullien M. P., 584.
Jupcianu N. N., 353.
Jürgensen, 71, 72.

Kahane A., 38.
Karya, 130, 132, 186. 187, 214.
Kaufmann N., 13.
Kaufmann Seb., 206. 269, 467.
Kedrov N., 249.
Kerciu G., 44, 438.
Kiepert, 213, 255.
Kirilov Gh., 583.
Klein F., 483.
Klompers Th., 255.
Knopp K, 584.
Koenigs G., 535.
Konaki Logofătul ***), 146.
Kummer, 71.

Lacour E., 316.
Lacroix F. S., 417.
Lacusteanu N., 35.
Lagrange J., 313, 394, 417, 335.
Laguerre, 269.
Lainé E., 451.
Laisant A. C., 315, 395.
Lalescu Tr., 222, 255, 315, 345. 356, 365, 389, 418, 434, 535, 640.
Lambert A., 115.
Lamé G. M., 71, 305, 584.
Lamoth P., 13.
Laplace P. S., 31, 37, 73, 394, 417, 481, 584.
Lascu Bal., 13, 503.
Laurent H., 418, 535, 584.
Lazăr Gh., 450, 452.
Lăzărescu G. M. G. 77.
Lazu C., 13.
Le Verrier, 305.
Lebădă I. D., 433.
Lebesgue H., 305.
Lebon E., 535.
Lecat M., 394.
Lechalas G., 584.
Lefter D., 158.
Legendre, 525.
Legoux A. 70.
Leibniz G. G., 394, 641.
Leibovici S., 88, 89, 220, 387.
Lemaire J., 105.
Lemoine E., 105, 146, 165, 395, 567.
Lemoyne T., 105, 255.
Leonida D., 13.
Lepădatu I. V., 38.
Leroy A. F. C., 535.
Leverrier, 71.
Levi Civita T., 584.
L'Hopital, 194, 293, 295, 296, 298, 299.
Libri, 71.
Linteş G. I. C-dor, 5, 6, 13, 53, 75, 110, 138, 142, 166, 207, 214, 216, 222, 254, 278, 293, 302, 336, 353, 356, 362, 364, 384, 415, 445, 450, 481, 482, 503, 557, 603, 604, 606, 634, 654, 671.
Liouville, 71, 72, 294, 297 305, 306.
Lipschitz, 72.
Liteanu I. Gh. G-l., 5, 6, 13.
Livada F, Gr., 13.
Lobocevschi, 71, 73.
Longchamps I. de, 418.
Lorentz A. H., 364.
Lorenz, 289.
Lucas de Burgo, 525.
Lucas Ed., 255, 590.
Lupaş L., 38.
Luther M., 346, 397.

Mac-Laurin, 519.
Macovei G., 416.
Macovschi E., 483.
Măgeanu N., 154.
Malaxa Elena, 13.
Malaxa N., 13.
Malcoci C. 13.
Malus, 417.
Manafu V. 13, 38.
Mănescu Gh. I., 303, 354, 594.
Mănescu M., 353, 482.
Mangeron I. D., 73, 251, 306.
Manoilescu M., 13.
Manoliu Al., 207.
Manoliu V., 594.
Mansion P., 418, 535, 584, 641.
Mărăcine B., 13.
Mărculescu Origen, 46, 267, 318, 438, 605.

*) Acelaşi cu *Ionescu P. H.*
**) Acelaşi cu *Zamfir C. L.*
***) Acelaşi cu *Conachi C.*

Mareş T, 13.
Mărgărit I. N., 303, 354, 452.
Margulius M., 370.
Marian V., 6, 19, 315, 400, 417, 466, 524.
Marin M. Dan, 353.
Marin Paul, 38.
Marinaş B. M. 366.
Marinescu G., 614.
Martac V. R., 28, 594.
Marteş V. Gr., 39, 89, 213, 322, 594.
Martinian A. V. 481.
Martonfi A., 35.
Mateescu A., 49, 102.
Mateescu Cr., 14, 312, 450,
Mateescu P. Mihaela, 353,
Matei D. D., 434.
Mavrodin D. D., 39, 209, 493, 648.
Maxwell, 482.
Mazilu C. P., 648.
Méchain, 417.
Melanchton P. *), 396, 397, 398, 400, 460, 461, 462, 464, 465, 466.
Menelaus 193, 202, 234, 316, 617.
Menge, 452.
Mereuţă E., 14, 54, 100, 101, 102, 112, 166, 450,
Mereuţă V., 14.
Metea G. R., 102.
Metea Virg. 580.
Michel Ch, 255.
Miclescu A. Cpt., 14.
Mihai I, Regele Românilor, 3.
Mihail G., 594.
Mihăileanu N. N., 5, 6, 14, 46, 76, 95, 99, 111, 144, 164, 165, 167, 204, 210, 253, 316, 335, 391, 439, 447, 450, 499, 501, 502, 536, 552, 594, 616, 651, 662.
Mihăilescu C. C., 49, 102, 220, 382, 441, 594, 610, 614.
Mihailescu St. N., 38.
Mihailescu I. St., 353.
Mihailescu Tib., 481.
Mihalcu I. I., 353.
Mihalopol C., 14.
Mihoc Gh., 14, 38.
Mihu C. **) 14, 89, 110, 166, 450, 481.
Mihul C., ***) 253.
Milea C. C,. 613.
Milescu Cârnu N. Spătar, 249, 250.
Milèse, 395.
Milichius I., 400, 464.
Milick E., 115, 116, 117, 118, 121, 171, 226, 230.
Minding, 71, 72, 305, 306.
Minea V. Aldea. 154, 163.
Mineur, Ad., 434.
Mineur P., 452.
Miquel, 46, 47, 95, 203, 261, 264, 299, 300, 301, 335, 389, 499, 500, 651.
Mircea M. E., 14.
Mirea N., 335.
Mirescu P., 14, 450.
Mironescu D., 154.
Miroslav St. T., 156, 381.
Mişicu V. M., 303, 353.
Mitescu C., 14.
Mititelu C. Cl., 14.
Mititelu C. I., 14.
Mittag-Leffter, 562.
Miu M. I., 14.
Möbius F. A., 38.
Mocanu D. C., 71, 305.
Mocanu I. C., 100, 154.
Modâlcă S. Em., 44, 154, 215, 220, 381, 387, 438, 442, 470, 550, 554, 607, 656.
Moessner A., 197.
Moigno F., 71, 72.
Moisil I., 154.
Moisil Gr., 418, 481, 482, 563, 583
Moivre, 194.
Moldoveanu N. D., 102.
MongeG ,230,300,301,417.
Montel P., 418, 535.
Morţun Gh. Em., 14, 48, 385, 387.
Moruzi Al., 146.
Moscovici E. N., 101, 102, 220, 330, 659.
Mosnat E., 484.
Müller F., ****) 397.
Munteanu I., 614.
Musceleanu S. Dan, 332, 354, 594, 610.
Musceleanu M, 610.

Nadaşan Şt., 146.
Nadolu T. A., 44.
Nagel T., 590.
Năsturaş, D, 418.
Neamţu N., 36.
Neamţu P., 14.
Nedelcu V. N., 44, 438,
Negoescu C. I., 594, 610,
Negoiţă V. P., 438.
Negrea A. L. M., 39, 101, 103, 154, 156, 209, 261, 318, 330, 493, 659.
Negrescu C. I., 663, 668.
Negri C., 146.
Negură Gr. St., 14.
Neper J., 641.
Nernst, 314.
Nestor G. D, 14
Nestor I. I., 614.
Nestorescu Val., 58.
Neuberg J., 535, 651.
Neuberg T., 584.
Neumann J. Von.. 314.
Newton, 82, 83, 84, 121, 300, 101, 394.
Nichifor A. G., 14.
Nicolau Al., 15.
Nicolau C-tin, 303, 354, 594.
Nicolau H. C., 15.
Nicolau I. Lt., 608.
Nicolau T. M., 15.
Nicolau-Dobridor C. I., 38.
Nicolescu I. R., 15.
Niculescu V. Al, 5, 6, 15, 146, 253.
Niculescu Cr., 15, 312.
Niculescu C. Mircea, 89, 101, 102, 154, 156, 220, 303, 331, 354, 383, 467, 610, 614, 663.

*) Acelaşi cu *Schwarzerd.*
**) Acelaşi cu *Cerchez M.*
***) Acelaşi cu *Cerchez M.* şi cu *Mihu C.*
****) Acelaşi cu *Regismontanus.*

Niculescu Miron, 15, 253, 481, 648.
Niewenglowski B., 315, 418, 451, 658.
Niţescu Gh., 433.
Noether M., 205.
Noguerra R., 641.
Novac A., 38.
Novac Val. 423.
Novacu V., 137, 138, 583.

Ocagne M. d', 534.
Odobescu I. N., 312.
Oettinger, 305.
Olivier, 305.
Olteanu E. St., 208.
Oltramare, 305.
Onicescu O., 6, 15, 138, 483.
Oprea G., 613.
Oprea M., 613.
Orănescu O., 15.
Orăşanu D. C., 15, 450.
Orăşeanu Gr., 15.
Orts M. J., 583.
Overim M. C. A., 641.
Ozanam, 525.

Pălărieru E., 38.
Panaitescu Sc., 20,
Panaitescu N. Tr. Lt.-Col. 364.
Pantazi Al., 6, 15, 36, 350, 352, 418, 450, 481.
Pantelimon V. C. *), 51, 93, 97, 101, 213, 214, 215, 316, 329, 331, 499, 594, 597, 607. 659, 663.
Papadopol D. Elena, 102, 303, 354.
Papelier G., 200, 201, 255, 315, 450, 452, 483, 484, 584.
Paraipan N. C., 216.
Parepeanu C. I. S-Lt., 262.
Pârvu A., 15.
Păsărică Fl., 5, 15.
Păsărică I., 36.
Pascal, 103, 194, 253, 386.
Pascaru I. C., 102, 153, 154, 318, 438.
Patriciu G. T., 20.
Pătroianu M., 38.
Pauli, 313, 314.
Pavel Dorin, 15.
Pavlovschi Şt., 154.
Pecarski, 250.
Perlea G. D., 536.
Perrin Fr., 312, 314.
Persu A., 16.
Petrescu V. Achile, 89, 101, 102, 156, 210, 267, 438, 499, 597.
Petrescu D-tru, 205, 525.
Petrescu Gh., 101, 102, 154, 594.
Petrescu R. G., 324, 610.
Petrescu S. Gh., 16.
Petrescu Iulian, 93, 111, 154, 167, 195, 220, 303, 331, 354, 439, 521, 522, 575, 612, 650, 651, 661, 662, 671.
Petrescu Oct, 39.
Petrescu P. Lt. Col., 16.
Petrescu S., 253, 481, 594,
Petrescu I. Şt., 303, 354, 481.
Petru Cel Mare, 250.
Peucer C., 466.
Philipide M., 16.
Picard E., 364, 562, 641.
Pillet J. J., 535.
Pintilie I. I., 354.
Plăcinţeanu I. I., 482.
Plana, 71.
Plank, 313, 314.
Platon, 314, 399, 461, 462, 463, 464.
Pletea M., 154.
Plücker, 71.
Poenaru P., 304.
Poienaru P, **), 525.
Poincaré H., 205, 394, 483, 535.
Poinsot, 305, 314, 481.
Poirée, J., 451.
Poisson S., 71, 417.
Pompeiu D., 190, 416, 418, 481, 483, 582.
Poncelet, 71, 305, 417.
Popa N. A., 49, 93, 99, 100, 102, 156, 214, 215, 219, 332, 354, 501, 605, 609, 614, 659, 660, 663, 668.
Popa A. Ilie, 38, 69.
Popa I. I., 416.
Popa M., 594.
Popa D.M., 28, 44,47, 48,49, 51, 87, 93, 99, 102, 109, 145, 150, 154, 157, 210, 215, 216, 219, 220, 262, 267, 268, 277, 322, 324, 331, 358, 381, 388, 390, 409, 438, 439, 442, 466, 467, 552, 553, 597, 599, 605, 607, 612, 614, 652, 662.
Popa I. M., 154.
Popa T., 303, 354, 452.
Popescu Ad. S-Lt., 49, 278,
Popescu N. C., 38.
Popescu F, 594
Popescu St. Gh., 614.
Popescu I, 20.
Popescu M. I. Cpt., 16.
Popescu M., 594.
Popescu Gh. M., 303, 332, 354, 461, 659.
Popescu St. M., 366.
Popescu N, 38.
Popescu Sim., 155.
Popescu I. St., 38.
Popescu V., 16.
Popescu-Botoşani, Gh., 16, 112, 335
Popescu-Greaca, S., 610, 614.
Popescu-Zorica N. Al., 87, 153, 322.
Popovici C. Prof., 418.
Popovici C. C., 38.
Popovici Dan, 38.
Popovici Th. I., 38.
Popovici-Corodeanu N.,38.
Popoviciu Tib., 6, 16, 31, 55, 111, 130, 141, 146, 168, 185, 224, 241, 253, 334, 350, 358, 392, 446, 450, 453, 456, 457, 459, 460, 481, 519, 560, 638.
Popp N. Lct. C-dor, 16.
Popp Tr., 16, 450,
Porchon P., 316.
Portocală M., 16.
Postelnicescu M. C., 433, 434.
Postolache I. Val., 310, 578.
Potopeanu Gh. G-l., 16.
Potopeanu Gh. Elev. 102.
Prandtl L., 535.
Praporgescu N., 16, 76, 481.

*) Acelaşi cu *Constantin V. P.*
**) Acelaşi cu precedentul.

Predoescu I. M., 334.
Predoescu Tr., 86, 208.
Predoescu-Ţânţăreni Tr., 600.
Prişcu R. Al., 303, 454.
Prisecaru D. M., 353.
Proclus, 398.
Prony, de, 251, 417.
Protopopescu Gr. Col., 16.
Provinceanu M., 536.
Pruvost E., 418.
Ptolomeu, 193, 397, 398, 400.
Puchiu T. Gh., 156, 613.
Puisseux P., 535.
Purbach G., 399, 400, 464. 665.
Puşcariu Sextil, 34.

Raabe, 71, 154, 217, 293, 294, 295, 296, 297, 299, 305, 637.
Racoviceanu Gr. Vl., 102, 331.
Rados G., 30.
Radoslav I., 544.
Rădulescu Gh. Oct., 87, 100, 279, 317.
amus, 71.
Rebière A., 525.
Regiomontanus I. *), 397, 399.
Reidemeister R., 314, 315.
Reifenstein I., 461.
Reinhorn M., 207.
Reischer L. H., 154, 215, 322, 381, 600, 610, 650.
Reiss R., 38.
Rémond A., 418.
Resal H., 70, 535.
Revici T., 16.
Rheticus I. G., 397, 460, 466.
Riemann, 481, 562.
Ripianu D., 88, 89, 159, 208, 216, 268, 325, 385.
Risser, 451.
Ritt G., 315.
Rociu I. Margareta, 44.
Rodrigues, 71.
Rohr I. A., 44, 48, 49, 89, 93, 100, 102, 103, 154, 214, 215, 220, 267, 331, 387, 438, 441, 442, 466, 548, 600.
Rolle, 319, 322.
Rollea C. V., 101, 154, 610.
Romanescu C., 441.
Romaşcan G. Georgeta, 44.
Roşculeţ N. M., 208, 597.
Rosenzweig S. M., 101, 109, 220.
Roşu Al. Al., 5, 6, 16, 409. 450.
Roşu M. M., 353.
Roşu V., 16.
Rouché E., 255, 532.
Rousier, 451.
Rusu L. M., 37, 51, 100, 105, 169, 219, 303, 312, 354, 383, 594, 607, 609, 651.

Sacrobosco J.**), 398, 460.
Sacrobusto J. de***), 398, 460.
Sacter O., 85.
Şaichin O. A., 88, 153, 154, 216.
Saint-Germain A. de, 70.
Saint-Loup L., 316.
Saladini, 68.
Sălăgeanu A., 16.
Saligny M., 16.
Salmon G., 300, 315, 418.
Sandu I., 594.
Săndulache C., 334.
Săpunaru S. Gh., 17.
Sarian M., 17.
Sarrus, 305, 306.
Savin C. I. Lt., 17, 224.
Savovici Fl., 377.
Sbârnea D. Gh., 100, 101, 102, 154, 156, 216, 220, 303, 332, 354, 452, 594, 610, 612, 651, 668.
Schileru-Dili C. I., 17.
Schlöfli, 71.
Schrider, 452.
Schrödinger, 313.
Schumacher, 71.
Schwartzerd ****), 396.
Scodrano A., 578.
Scurtu I. I., 154.
Segal J., 150, 325, 331.
Segre C., 205.
Şeibulescu A. C., 221, 381.
Şenchi M. E., 89, 102, 220,
Şerban C. C., 93, 354, 452,
Şerban A. T., 103, 216, 385, 442, 604, 655, 668.
Şerbănescu Gh. V., 17.
Şergescu B., 17.
Sergescu P., 6, 17, 22, 74, 75, 138, 364, 417, 446, 468, 482, 502, 519, 521, 534, 558, 583, 616.
Sfinţescu I. C., 17.
Simionescu D. G., 5, 6, 17, 33, 36, 135, 165, 187, 203, 214, 217, 253, 265, 266, 280, 318, 336, 381, 390, 448, 491, 493, 599.
Simionescu M., 17.
Simon P., 220, 277, 333.
Simson T., 204, 279, 328, 413, 433, 500, 536, 633.
Şleahtenea D., 536.
Şlioskine, 481.
Smântânescu A., 17.
Smith E. D., 641.
Smolouchowski, 313.
Solomon I. I., 322.
Sommerfeld, 313
Sotirescu N., 613.
Souto B. T., 641.
Spathy I. R., 38.
Staicu I. C., 353, 610.
Stamate I. I., 77, 105, 145, 154, 210, 215, 278, 423, 607, 652.
Stamatescu I. G., 17, 450.
Stamatescu I., 17.
Stamatin M., 38.
Stan I. A. Cpt., 17, 482.
Stan A. D., 17, 29, 146.
Stancu S. M., 536.
Stănculescu I., 130, 212.
Stănculescu M., 550, 594, 664.
Staudt, 71.
Ştefan, 314.
Ştefan C. T. *****) 86, 87, 154, 260, 381, 438, 600.

*) Acelaşi cu *Müller J.*
**) Acelaşi cu *Holywood J.* şi cu *Sacrobust*
***) Acelaşi cu *Holiwood J.* şi cu *Socrobosco J. J. de.*
****) Acelaşi cu *Melanchton.*
*****) Acelaşi cu *Tilică C. Ştefan.*

Ştefănescu Em., 38.
Ştefănescu D. N., 93, 153, 155, 261, 318, 383, 438, 439, 503.
Ştefănescu-Goangă A. 536.
Ştefanovici I. M., 89, 100, 102, 220, 354, 594.
Steiner, 71, 300, 305, 501, 564, 671.
Stern E., 71, 305, 306.
Stieltjes J. T., 481.
Stewart, 156, 193.
Stifel M., 397.
Stirling, 209.
Stoenescu I. Al., 6, 17, 53, 56, 81, 109, 150, 164, 168, 273, 277, 280, 364, 442, 444, 448, 450, 451, 452, 453, 489, 554, 560, 577, 589, 594, 596, 634, 664, 667, 672.
Stoenescu D. Mirel, 93, 100, 101, 154, 156, 210, 220, 325, 331, 442, 594, 609, 612, 659, 663.
Stoffaes L. Abbé, 315.
Stoianovici I. Ş, 93, 99, 354, 388, 451, 594, 613.
Stoica D. Al., 38, 377, 433.
Stoica V. D., 5, 18, 195, 302, 350, 352, 409, 450, 524, 575.
Stoicescu I. T., 38.
Stoicescu T. T., 39, 43, 52
Stoika V., 536.
Stoika V. V., 99, 354.
Stoilov S., 416.
Streder G. I., 44, 87, 438.
Sturm, 305, 306.
Sturm Ch., 71.
Sturm G., 535, 548.
Sylvester J., 305, 394, 418.

Tănăsescu M. A. G-l, 18.
Tănăsescu A. T, 18.
Tannenberg N. de, 483.
Tarry G., 364.
Tataru N. N., 438.
Tchapliquine M., 480, 482.
Teixeira G., 105.
Teodoreanu *V.*, 18, 365, 366.
Teodorescu C. C., 6, 18, 450.
Teodorescu N., 483.
Teodorescu V. N., 18.
Teodoriu L., 36, 207.
Teodoru H.*), 557, 612.
Terqueru, 171, 305.
Thébault V., 76, 96, 165, 260, 391, 413, 441, 447, 481, 502, 504, 599, 614.
Theodorescu N. Dorin, 433, 434.
Theodorescu N., 75, 416, 481.
Theodoru H.**), 18.
Thierrin H. G., 18, 450.
Thomson S., 255.
Ţilenschi M. S. Lt., 634.
Tilică C. Şt.***), 208, 210, 215.
Tilly J. M. de, 641.
Timerding H., 584.
Timotin A. A., 353.
Ţino N. O., 5, 6, 18, 85, 222, 255, 260, 280, 329, 370, 377, 427, 433, 453, 524, 537, 548, 575, 671.
Ţintea M. I., 18.
Tipei N., 481.
Tisserand F., 24, 25, 365.
Ţiţeica Gabriela, 6, 18, 224, 269, 271, 364, 387, 450, 451, 452, 471, 549, 552, 560, 562, 672.
Ţiţeica G., 20, 58, 113, 144, 146, 190, 253, 255, 350, 351, 365, 416, 434, 449, 483, 552, 580, 641.
Ţiţeica I. I.****), 54, 201, 209, 216, 504, 616, 649.
Ţiţeica G. R, 18, 450.
Ţiţeica Şerban, 450.
Ţocu Gh. P., 154.
Tofan M., 154.
Tomescu Al., 57.
Tomescu Şt. I., 18.
Topalescu Gh., 101, 102, 154.
Topârceanu Gh., 614
Torricelli, 589.
Transon A., 24, 305.
Trefilov I. M., 47, 49, 95, 100, 101, 102, 154, 156, 220, 303, 323, 354, 382, 500, 594, 609, 651.
Trofim I. P., 604.
Tudoran M. Lydia, 49, 273, 332, 441, 610, 614.
Tuhai N., 589.
Tullea C. Gh., 18.
Turcu R. S., 99, 100, 214.
Turculeţ D. T., 353.
Turtoiu F., 438.

Udrea C. I., 353.
Uléscu A. 18.
Ungureanu P. I., 594, 614.

Văduva D., 594, 614.
Văduva Fl. M., 89, 95, 101, 102, 154, 215, 220, 303, 331, 332, 354 363, 594, 609, 610.
Vahlen T., 253, 363, 534.
Vâlcovici V., 18, 69, 70, 314, 483, 583.
Van der Lyn, 468.
Van der Waals, 314.
Van der Waerden L.B., 483.
Vandermonde, 417.
Van' T. Hoff, 314.
Vardala I., 18.
Vârban V., 38.
Vasilache I., 18.
Vasile Gh., 77, 634.
Vasilescu C. Gr., 19.
Vasilescu C. I., 19.
Vasilescu A. M.*****), 614.
Vasilescu I. T., 19.
Vasilescu-Karpen N., 481, 548, 585, 650.
V-lescu-Stabu A. M.******), 27, 47, 48, 87, 93, 95, 153, 154, 214, 216, 261, 262, 265, 329, 382, 438, 585, 597, 651.

*) Acelaşi cu *Theodoru H.*
**) Acelaşi cu *Teodoru H.*
***) Acelaşi cu *Ştefan C. T.*
****) Acelaşi cu *Ioan A. I.* şi cu *Ilie A I.*
*****) Acelaşi cu *Vasilescu-Stabu A. M.*
******) Acelaşi cu *Vasilescu A. Mircea.*

Vasiliu C. D, 594, 610.
Vasiliu G. Dan, 19, 452.
Vasiliu G. D-tru, 353.
Vasiliu Gh., 19, 38, 39.
Vasiliu Gh. elev, 614.
Vasiliu C. I., 38, 54, 80, 167, 204, 307, 335, 362, 532, 616, 630.
Vasiliu C. Margareta, 354
Vasiliu M., 19, 450.
Vecten, 213.
Velea M., 646.
Verhulst, 306.
Vernescu P., 594.
Vescan T. T., 6, 19, 33, 641.
Viciu A. A., 19.
Vidal C., 483.
Viète F., 395, 641.
Vigarié E., 247.
Vijelie Ch. E., 93, 154, 273, 303, 354, 382, 388, 447, 501, 610, 651.
Villars, 313.
Villie E., 365.
Virgil Al., 154.
Vişa E., 33, 253, 254.
Vlădea I. 38.
Vlădescu I. Gh., 614.
Vlădescu M., 154.
Vlădoianu R., 594.
Vogelin I., 461, 463, 464.
Vogt H., 255.
Voicu D. Gh., 220, 594, 610.
Voinea P. R., 146, 303, 354, 388, 594, 610, 663, 668, 670.
Volterra V., 452
Vrânceanu G., 481.

Walsch, 305.
Walter P., 154.
Walton, 305.
Waring, 641.
Webster G. A., 584.
Weierstrass, 561, 562.
Weill M., 418.
Weiss L., 38.
Weiss S., 38.
Wien, 314.
Wolnarovski R., 19.
Wronski, 55.

Yano K, 253, 481.
Yvon M., 255.

Zacharias M., 315.
Zaharia Gh., 594.
Zaharia O. I., 38.
Zaharia-Lupu I. M., 89.
Zamfir C. I.*), 101, 219.
Zamfirescu C. Gr., 19, 36.
Zamfirescu G. I. Cpt., 56, 112, 325, 336, 482, 504, 536, 559, 597, 616, 661, 671.
Zane D N., 370.
Zapan Gh., 6, 19.
Zapan Gr. C-dor, 5, 6, 19, 450.
Zavati C. C., 614.
Zeissing A., 526.
Ziff M., 648.
Zlatcu St. C., 19.

K. LUCRĂRI CITATE **)

1. Cărţi, lucrări extrase, teze

		Pag.
N. Abramescu	Curs de geometrie Analitică	195
N. Abramescu	Geometrie pură infinitezimală	105, 107
A. Angelescu	Calcul diferenţial	450, 451, 452
Th. Angheluţă	Curs de Algebră superioară	195, 426, 608, 653
Appeltauer	Elemente de algebră	304
E. Arghiriade	Geometria axială diferenţială a curbelor strâmbe	484
Aristotel	Etica	463
D. Asachi	Ueber die Umkehrung der Reihen	304
A. Aubert et G. Papelier	Exercices d'Algébre d'Analyse et de Trigonometrie	451
A. Aubert et G. Papelier	Exercices de géometrie analytiques	451
Gh. Baştursescu	Cifrele arabe	417
J. Bertrand	Eloges académiciens	72
G. Bouchery	Curiosités & Recréations	439
A. Boutaric	Précis de Physique	451
E. Brahy	Exercices methodiques de calcul differentiel	451
E. Brahy	Exercices methodiques de calcul integral	451
Brocard & J. Lemoine	Courbes géometriques remarquables	105

*) Acelaşi cu *Ivan C. Z.*

**) In acest capitol nu sunt trecute lucrările citate în *Bibliografie* şi în *Diverse*: Sporirea bibliotecii *Gazeta Matematică*.

		Pag.
R D. Carmichael	Analyse indeterminée	591, 646
E Cartan	Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective	24
E. Cartan	Théorie des groupes finis et continue et la géometrie differentielle traitée par la methode du repère mobile	24
Cauchy	Exercices d'Analiyse et de Physique Mathématique	72, 250
Cauchy	Exercices mathématiques	72
T. Chollet et P. Mineur	Traité de géometrie descriptive	452
E. Colerus	Vom Punkt zur vierten Dimension	451
E. Collignon	Note sur les courbes synch	70
Cranz	Lehrbuch der aüssere Ballistik	291
V. Cristescu	Culegere de probleme de trigonometrie	52, 96, 330, 669
E. Degranges	Arithmetique commercielles et pratique	452
Dikson-Bodewig	Einführung in die Zahlentheorie	644
Dufrenois, Risser et Rousier	Les methodes actuelles de la Balistique	451
Euclide	Cartea II	525
Euclide	Elemente	29, 398
Euler	Mechanica, sive motus scientia analytice exposita.	68
F. G. M.	Exercices de géometrie	36, 213, 265, 609
Fitz-Patrick	Exercices d'Arithmetique	415
Fubini et Cech	Introduction à la géometrie projective differentielle des surfaces	24
Gh. Th. Gheorghiu	Probleme de analiză matematică	89
A. Gloden	Recherches sur les égalités multigrades	198
L. Godeaux	Les géometries	452
W. Grainville	Eléments de calcul differentiel et integral	451
J. Hadamard	Leçons de géometrie élémentaire	451
Hütte	Manuel de l'Ingenieur	450
A. G. Ioachimescu	Culegere de probleme de Algebră	46, 74
I. Ionescu	Beton armat	451, 452
I. Ionescu	Culegere de probleme de aritmetică	70, 332, 378, 440
I. Ionescu	Maxime şi minime geometrice	350, 351
Joanes de Sacro Busto	Computul	460
E Lainé	Précis d'Analyse mathématique	451
Gh. Kirilov	Cursul de Mecanică raţională	583
Laplace	Essai philosophique sur les probabilités	73
G. Lazăr	Trigonometrie	450, 451
M. Lăzărescu	Cifrele	76
M. Lecat	Erreurs élémentaires des fonctions elliptiques	306
J. Lemaire	Hypocycloïdes et epicycloïdes	105
Lobacevschi	Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien	73

		Pag.
Menge & Schrieder	Mechanik-Aufgaben	452
N. Milescu Cârnu, Spătar	Aritmologia	249, 250
E. Milick	Eléments d'Algèbre ornamentale	116
E. Milick	L. Algèbre ornamentale	115, 171
F. Moigno	Leçons de calcul differentiel et de calcul integral rédigées d'après les methodes et les ouvrages publiés ou inédits de A. L. CAUCHY	72
T. Nagel	Analyse indeterminée d'un degré supérieur au 2-e	590
B. Niewenglovski	Cours d'Algèbre II	688
B. Niewenglovski	Cours de géometrie analytique	451
V. Novacu	Evoluţia concepţiei despre lumină	137
Ozanam	Recreaţiuni matematice	525
G. Papelier	Exercices d'Algèbre, d'Analyse et de Trigonometrie	451
G. Papelier	Exercices de géometrie moderne	200, 201, 452
E. Papelier	Précis de mécanique	450
Pecarski	Ştiinţele şi literatura în vremea lui PETRU CEL MARE	250
D. Petrescu	Elemente de geometrie	205, 525
Peurbach	Elementa Arithmetices	434, 465
P. Poienaru	Traducerea geometriei lui LEGENDRE	525
J. Poirée	La géometrie à la portée de tous	451
Prochus	Comentarii	398
Purbach	Libellus theoriticarum	400
Ptolomeu	Almagesta	397, 398
A. Rebière	Mathématiques et Mathématiciens	525
Regiomontanus	Opus algorismi jocundissimum	399
E. Rouché & Ch. de Comberousse	Traité de géometrie	532
Sacrobosco	De anni ratione	460
Sacrobosco	De sphaera	398, 460
M. Stifel	Arithmetica integra	397
Al. Stoenescu	Probleme de oscilaţie	452
Al. Stoenescu	Probleme de dinamică	451
Al Stoenescu	Teoria relativităţii	451, 452
Al. Stoenescu	Unităţi de măsură în mecanică	452
G. Texeira	Traité de courbes speciales remarquables	105
H. Teodoru	Curs de statică grafică	612
E. Tisserand	Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitesimal	24, 25
Gabriela Ţiţeica şi Al. Stoenescu	Probleme de calcul vectorial	450, 451, 452
G. Ţiţeica	Culegere de probleme de geometrie	29, 434, 501, 651
Verhulst	Traité élémentaire des fonctions elliptiques	306

Pag.

I. Vogelin . . . . . Elementale geometricum ex EUCLIDES geometria 461, 464
V. Volterra . . . . . Leçons sur les fonctions de lignes 452
A. Zeissing . . . . . Neue Lehre von den Propositionen des menschlichen Körpers, aus einem bisher unbekannt gebliebenen, die ganze Natur und Kunst durch dringendem morphologischem Grundsetze . 526
*** . . . . . Cunoştinţe Filosofice 77

2. Periodice

Acta Erud 68
Annalles de Mathématiques pures et appliqués 305
Annalles de Toulouse 70
Archiv der Mathematik und Physik 304
Association Française 70
Buletinul de Matematică şi Fizică pure şi aplicate al Şc. Polit. din Bucureşti 190
Buletinul Soc. Politehnice din România 115
Bulletin de la Société des Sciences 65, 70
Bulletin Sc. Math. 70
Comptes rendus de l'Académie de Sciènces de Paris 69, 70, 72, 306, 396, 515
Curierul Matematic 565
Foaia Matematică 610
Gazeta Matematică 5, 10, 20, 21, 27, 28, 29, 33, 57, 58, 60, 64, 73, 74, 85, 86, 92, 96, 113, 114, 115, 116, 130, 138, 140, 144, 146, 164, 165, 169, 170, 171, 179, 182, 183, 184, 195, 196, 197, 214, 237, 241, 249, 252, 262, 277, 301, 302, 303, 308, 311, 345, 349, 350, 351, 352, 353, 358, 362, 363, 365, 366, 367, 378, 389, 394, 395, 409, 411, 424, 434, 449, 450, 453, 457, 458, 459, 460, 466, 467, 468, 471, 484, 489, 502, 519, 524, 527, 528, 530, 532, 533, 536, 563, 566, 568, 574, 577, 578, 580, 600, 630, 634, 635, 636, 637, 638, 642, 672
Gazeta Matematică, Suplimentul cu Exerciţii 170, 318, 362, 471, 575
Gazeta Matematică, Volum jubilar 452
Journal de l'Ecole Polytechnique 69
Journal de Liouville 294, 297
Journal de Mathématiques 71
Journal de Mathématiques pures et appliquées 24, 305
Journal für die reine und angewandte Mathematik 305
L'Education Mathématique 365
L'Intermediaire des Mathématiciens 394, 395
Mathematica 468
Mathematikai ès Termèszettudomànyi Ertesitö 30
Mathesis 96, 189, 359, 362, 413, 434, 500, 643, 644, 646, 651
Natura 138
Nouvelles Annales pe Mathématiques 70, 489

Pag.

Pozitiva 70, 536
Revista de Filosofie 137
Revista de matematicas y fisicas elementales 445
Revista Fundațiilor Regale 250
Revista Matematică din Timișoara 39, 135, 365, 389, 453, 530
Revista Universitară Matematică 434
Rivista di Artigleria e Genio 290
Revue de Mathématiques Spéciales 342
România Militară 146
Știință și Progres 137, 197
The Mathematical Gazette 415
Viața Românească 137
Zeitschrift für Mathematik 68
Zeitschrift für Mathematik und Physik 294
Ziarul Științelor și Călătoriilor 77

L. FOTOGRAFII ȘI PLANȘE

Fotografia M. S. REGELUI MIHAI I 3

M. ERATA

Pagina și Volumul sau Problema de îndreptat	*Pagina la care se indică îndreptarea de făcut*
Problema 5361 Vol. XLV pag. 672	56
Problema 5380	168
Problema 5485	560
Problema 3713 pag. 119 Vol, XXXIV	672
Pag. 590	672
Problema 5521 pag. 616 Vol. XLVI	672
„ 5260 „ 557 „ „	672
„ 4929	672

N. SUPLIMENTE

Burse și premii de fondurile Societății *Gazeta Matematică*. Supliment la No. 1 . . . . . 11 pagini
Recreațiuni Matematice. Supliment la No. 2 . . . . . 4 „
„ „ „ „ „ 5 . . . . . 6 „
„ „ „ „ „ 8 . . . . . 4 „
„ „ „ „ „ 12 . . . . . 4 „
Darea de seamă asupra mesei comune, care a încheiat concursul «*Gazeta Matematică*» în seara de 26 Aprilie 1941. Supliment la No. 9 . . . . . 8 „

O. PUBLICAȚIUNI IN AFARĂ DE „GAZETA MATEMATICĂ“

Gazeta Matematică. Supliment cu Exerciții. Vol. VII. 9 numere. . 228 pagini
Elementele lui EUCLID. (Cărțile VII—IX de Aritmetică și Cartea X-a iraționalelor) tradusă din limba greacă de V. MARIAN . . .

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Badea A. I. (5412); *Baltă C.* (4452, 5372, 90); *Bodnărescu M. Horia* (5431, 40); *Buzincu I. I.* Subloc. (5309); *Cetăţeanu St.* (5486, N); *Drăghicescu P. P.* (4360, 5021, 34, 170, 72, 205, 84, 96, 317, 36, 66, 84, 402); *Ionescu Corneliu* (5369, 99, 410); *Jiletcovici Alex.* (5488); *Modâlcă S. Em.* (4452, 5390, 469, 86, 99); *Niculescu C. Mircea* (5176, 313, 56, 488); *Popa D. Mircea* (5429, 30, 88, 91, 92); *Petrescu Iulian* (A); *Russu C. Mircea* (5449); *Thébault V.* (A, P); *Voinea P. R.* (5452, 86, 93).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Folle vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, III, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 72.944.